

Title	On the Construction of $[q_4+q_2-q, 5, q_4-q_3+q_2-2q; q]$ -Codes Meeting the Griesmer Bound(Combinatorial Structure in Mathematical Models)
Author(s)	浜田, 昇; Helleseth, T.; Ytrehus, O
Citation	数理解析研究所講究録 (1993), 853: 187-195
Issue Date	1993-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/83730
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

On the Construction of $[q^4+q^2-q, 5, q^4-q^3+q^2-2q; q]$ -Codes Meeting the Griesmer Bound

大阪女子大学 浜田昇
ベルゲン大学 T. Helleseth
ベルゲン大学 Ø. Ytrehus

1. はじめに

雑音のある通信路を用いて通信文を送る場合を考える。この場合には、受け取った符号（受信符号）は必ずしも送った符号（送信符号）と一致しない。この雑音によるエラーを正しく訂正できるようにするためには、送りたい通信文を適当に符号化し、受け取った符号から送信符号を正しく推定（復号化）することが必要である。この論文では、符号化の方法として最もよく用いられている q 元線形符号を考える。（符号化、復号化の方法については、MacWilliams and Sloane [53] を参照）

$V(n, q)$ をガロア体 $GF(q)$ 上の行ベクトルからなる n 次元ベクトル空間とし、 C を $V(n, q)$ の k 次元部分空間 ($n > k \geq 3$, q は素数または素数べき) とする。このとき、 C の最小ハミング距離が d であるならば、 C は $[n, k, d; q]$ -code (または、符号長が n 、次元が k 、最小距離が d である q 元線形符号) であるという。

一様 q 元通信路 (注意 1.4 参照) を用いて $[n, k, d; q]$ -code C の元 (符号語) を送るとき、 C のどの元が送られるのも同様に確からしいならば、受信符号 $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in V(n, q)$ から最尤推定法を用いて送信符号 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C$ を推定 (復号化) するとき、誤りの個数が $[(d-1)/2]$ 個以下であれば、誤りを正しく訂正できることが知られている。ここに $[x]$ は x を越えない最大の整数を表す。従って、与えられた整数 n, k, q に対して、最も多くの誤りを訂正できる q 元線形符号を得るためには、 $[n, k, *; q]$ -code の中で、最小距離 d が最も大きい $[n, k, d; q]$ -code を求めればよい。この問題 ("Packing problem" と呼ばれている) を解くためには、すべての整数 k, d, q に対して、次の問題を解けばよいことが知られている。

(問題 1.1) k, d, q を与えられた整数とする。このとき、

- (1) $[*, k, d; q]$ -code の中で符号長 n の最小値 (この値を $n_0(k, d)$ で表す) を求めよ。
- (2) $n = n_0(k, d)$ である $[n, k, d; q]$ -code を求めよ。

与えられた整数 k, d, q に対して、 $[n, k, d; q]$ -code が存在するならば、

$$n \geq \sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d}{q^i} \right\rceil \equiv g_0(k, d) \quad (\text{Griesmer bound}) \quad (1.1)$$

であることが知られている (cf. [18], [57])。ただし、 $\lceil x \rceil$ は x より小さくない最小の整数を表す。

与えられた整数 k, d, q に対して、Griesmer bound (1.1) の等号を満たす $[n, k, d; q]$ -code C が存在するならば、 $n_0(k, d) = g_0(k, d)$ であるから、この場合には、問題 1.1 を解くためには、次の問題を解けばよい。

(問題1.2) (1) Griesmer bound (1.1) の等号を満たす $[n, k, d; q]$ -code が存在するための k, d, q に対する必要十分条件を求めよ。

(2) 与えられた整数 k, d, q に対して、Griesmer bound (1.1) の等号を満たす $[n, k, d; q]$ -code が存在する場合には、すべての $[n, k, d; q]$ -code を構成し、その特徴付けをせよ。

$q = 2, 1 \leq d < 2^{k-1}$ の場合には、問題1.2 は Helleseth [48] によって完全に解かれた。従って、以下 $q \geq 3, k \geq 3, 1 \leq d < q^{k-1}$ の場合を考える。この場合には d と (1.1) は次のように書き表すことができる。

$$d = q^{k-1} - \sum_{i=1}^h q^{\lambda_i} \quad (1.2)$$

$$n \geq v_k - \sum_{i=1}^h v_{\lambda_i+1} \quad (1.3)$$

ただし、 $v_i = (q^i - 1)/(q - 1)$ ($i \geq 0$) で、 $h, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ は次の2つの条件 (a) と (b) を満たす整数である。

(a) $1 \leq h \leq (k-1)(q-1), 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_h < k-1,$

(b) λ_i ($i = 1, 2, \dots, h$) のうち高々 $q-1$ 個が同じ値をとる。

(定義1.1) F を有限射影幾何 $PG(t, q)$ における f 個の点からなる集合とする。 $PG(t, q)$ のすべての hyperplane H に対して、 $|F \cap H| \geq m$ で、かつ、ある hyperplane H に対して、 $|F \cap H| = m$ であるならば、 F は $\{f, m; t, q\}$ -minihyper であるという。ただし、 $t \geq 2, f \geq 1, m \geq 0, |A|$ は集合 A に含まれる元の個数を表す。

Hamada [20] は d が (1.2) のように表される場合には、Griesmer bound (1.3) の等号を満たすすべての同値でない $[n, k, d; q]$ -code からなる集合とすべての $\{f, m; k-1, q\}$ -minihyper からなる集合との間には、1対1の対応があることを示した。(注2.1参照) ただし、

$$f = \sum_{i=1}^h v_{\lambda_i+1}, \quad m = \sum_{i=1}^h v_{\lambda_i} \quad (1.4)$$

従って、 d が (1.2) のように表される場合には、問題1.2 を解くためには次の問題を解けばよい。

(問題1.3) (1) $\{ \sum_{i=1}^h v_{\lambda_i+1}, \sum_{i=1}^h v_{\lambda_i}; t, q \}$ -minihyper が存在するための $t, q, h, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ に対する必要十分条件を求めよ。

(2) $\{ \sum_{i=1}^h v_{\lambda_i+1}, \sum_{i=1}^h v_{\lambda_i}; t, q \}$ -minihyper が存在する場合には、すべての minihyper を構成し、その特徴付けをせよ。

(目的) $k = 5$, $q \geq 3$, $h = q+1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \dots = \lambda_{q+1} = 2$ の場合には、(1.2), (1.3) 式は次のように表される。

$$d = q^4 - \{2q + (q-1)q^2\} = q^4 - q^3 + q^2 - 2q \quad (1.2')$$

$$n \geq v_5 - \{2v_2 + (q-1)v_3\} = q^4 + q^2 - q \quad (1.3')$$

このとき、Griesmer bound (1.3') の等号を満たす $[q^4+q^2-q, 5, q^4-q^3+q^2-2q; q]$ -code が存在するかどうかは $q=3$ の場合ですら未知であった。この論文の目的はこの code に対応する $\{2v_2+(q-1)v_3, 2v_1+(q-1)v_2; 4, q\}$ -minihyper ($q \geq 3$) を構成することによって、 $[q^4+q^2-q, 5, q^4-q^3+q^2-2q; q]$ -code が存在することを示すことである。主な結果は次の通りである。(詳細は、文献 [42] を参照)

(定理1) Ω を有限射影幾何 $PG(4, q)$ における 3-flat, $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_{q^2}, P\}$ を Ω 中の (q^2+1) -cap, $\{P, P_1, P_2, \dots, P_q\}$ を $\Omega \cap \{P, P_1, P_2, \dots, P_q\} = \{P\}$ を満たす $PG(4, q)$ の 1-flat とし、 $F = (\Omega \setminus \{Q_1, Q_2, \dots, Q_{q^2}\}) \cup \{P_1, P_2, \dots, P_q\}$ とおくと、任意の素数または素数べき $q (\geq 3)$ に対して、 F は次の条件を満たす $\{2v_2+(q-1)v_3, 2v_1+(q-1)v_2; 4, q\}$ -minihyper である。

(1) $PG(4, q)$ の任意の 3-flat H に対して、 $|F \cap H| = q^2+1, q^2+q+1, q^2+2q+1$, または、 q^3+q+1 である。

(2) $m_1 = q^2+1, m_2 = q^2+q+1, m_3 = q^2+2q+1, m_4 = q^3+q+1$ とおき、 $|F \cap H| = m_i$ となる $PG(4, q)$ の 3-flat H の個数を x_i で表すと、 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (q^4-q, q^3+q^2+2q-1, 1, 1)$ である。

(定理2) 任意の素数または素数べき $q (\geq 3)$ に対して、Griesmer bound (1.3') の等号を満たし、かつ、重み分布が $1 + n_1 z^{w_1} + n_2 z^{w_2} + n_3 z^{w_3} + n_4 z^{w_4}$ である $[q^4+q^2-q, 5, q^4-q^3+q^2-2q; q]$ -code が存在する。ただし、 $w_1 = q^4-q^3+q^2-2q, w_2 = q^4-q^3+q^2-q, w_3 = q^4-q^3+q^2, w_4 = q^4-q, n_1 = (q-1)(q^4-q), n_2 = (q-1)(q^3+q^2+2q-1), n_3 = q-1, n_4 = q-1$ である。

(注1.1) 問題1.3 は、最近の一連の研究によって、次の場合には解かれている。

- (1) $h = 1$ の場合には、Tamari [58, 59] によって解かれた。
- (2) $h = 2$ の場合には、Hamada [19, 22] によって解かれた。
- (3) $h = 3$ の場合には、Hamada [19-22], Hamada-Deza [25], Hamada-Helleseth [29-36] によって完全に解かれた。
- (4) $h = 4, q > 9$ の場合には、Hamada-Helleseth [37] によって完全に解かれた。
- (5) $h = 4, q \leq 9$ の場合には、Hamada-Deza [24, 27, 28], Hamada-Helleseth et al [32, 39-43] によって解かれたが未解決の部分もある。(cf. 注意1.2)
- (6) $h \geq 5, q > (h-1)^2$ の場合には、Hamada-Helleseth [38] によって部分的に解かれた。

(注1.2) $h=4$, $q \leq 9$ の場合で未解決な部分は次の7つの場合である。

$$(\alpha) \quad h=4, \quad 3 \leq q \leq 4, \quad 1 \leq \lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_1 + 1 < t$$

$$(\beta_1) \quad h=4, \quad 3 \leq q \leq 9, \quad 0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4 < t$$

$$(\beta_2) \quad h=4, \quad 3 \leq q \leq 9, \quad 0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 < t$$

$$(\beta_3) \quad h=4, \quad 3 \leq q \leq 9, \quad 0 \leq \lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < t$$

$$(\gamma_1) \quad h=4, \quad 4 \leq q \leq 9, \quad 0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < t$$

$$(\gamma_2) \quad h=4, \quad 4 \leq q \leq 9, \quad 0 \leq \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 < t$$

$$(\delta) \quad h=4, \quad 5 \leq q \leq 9, \quad 1 \leq \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < t$$

(注1.3) $q=3$ の場合には、定理2より、重み分布が

$$1 + 156z^{57} + 82z^{60} + 2z^{63} + 2z^{78}$$

であり、かつ、Griesmer bound の等号を満たす $[87, 5, 57; 3]$ -code が存在する。

最近の一連の結果については、Hamada [22, 23] を参照のこと。

(注1.4) 送信符号を $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C$, 受信符号を $(x_1 + e_1, x_2 + e_2, \dots, x_n + e_n) \in V(n, q)$ とするとき、 n 個のエラー $e_1, e_2, \dots, e_n \in GF(q)$ は互いに独立で、同一の分布に従い、 $e_i = 0$ となる確率が $1-p$ (> 0.5)、 $GF(q)$ の任意の非零元 θ に対して $e_i = \theta$ となる確率が $p/(q-1)$ であるとき、この通信路を 一様 q 元通信路 という。

(注1.5) $PG(3, q)$ における (q^2+1) -cap については、Bose [2], Hill [49], Qvist [56] を、また、問題1.1 に対する最近の結果については、Brouwer and Sloane [5], Hamada [23], Hill et al [17], [49]-[51] を参照のこと。

2. 予備的結果

$W(k, q)$ をガロア体 $GF(q)$ 上の列ベクトルからなる k 次元ベクトル空間とし、 $S_{k, q}$ を $c_0 = 1$, または、ある整数 i ($1 \leq i \leq k-1$) に対して、 $c_0 = c_1 = \dots = c_{i-1} = 0$, $c_i = 1$ であるような $W(k, q)$ の中のすべてのベクトル \underline{c} , $\underline{c}^t = (c_0, c_1, \dots, c_{k-1})$, からなる集合とすると、 $S_{k, q}$ の中の v_k 個のベクトルは、有限射影幾何 $PG(t, q)$ の v_k の点とみなすことができる。Hamada [20] による次の定理は、 $k \geq 3$, $1 \leq d < q^{k-1}$ の場合に、問題1.2と問題1.3 の間の関係を表す重要な定理である。

(定理2.1) F を $S_{k, q}$ の中の f 個 ($1 \leq f < v_k - 1$) のベクトルからなる集合とする。 G を $S_{k, q} \setminus F$ の中の $v_k - f$ 個の列ベクトルを並べてできる $k \times (v_k - f)$ 行列とし、 C を G によって生成される $V(n, q)$ の k 次元部分空間とする。ここに、 $n = v_k - f$ である。

(1) $W(k, q)$ の非零ベクトル \underline{z} に対して、

$$H_z = \{ \underline{y} \in S_{k, q} \mid \underline{z}^t \underline{y} = 0 \text{ over } GF(q) \} \quad (2.1)$$

とおくと、 H_z は $PG(k-1, q)$ における hyperplane で、 C のコードベクトル $\underline{z}^t G$ の重み

$w(\underline{z}^t G)$ は、次の式で与えられる。

$$w(\underline{z}^t G) = |F \cap H_z| + q^{k-1} - f \quad (2.2)$$

(2) $k \geq 3$, $1 \leq d < q^{k-1}$ の場合には、 C が Griesmer bound (1.1) の等号を満たす $[n, k, d; q]$ -code であるための必要十分条件は、 F が $\{v_{k-n}, v_{k-1-n+d}; k-1, q\}$ -minihyper であることである。

(定義 2.1) C_1, C_2 を $[n, k, d; q]$ -code とする。このとき、ある転置行列 P とある正則な $(GF(q)$ の元をもつ) 対角行列 D に対して、 $G_2 = G_1 D P$ (または、 $G_2 = G_1 P D$) を満たす C_i ($i=1, 2$) の生成行列 G_i が存在するならば、 C_1 と C_2 は同値であるという。

(注 2.1) 定理 2.1 と定義 2.1 より、次のことが成り立つ。

(1) $k \geq 3$, $1 \leq d < q^{k-1}$ の場合には、Griesmer bound (1.1) の等号を満たすすべての同値でない $[n, k, d; q]$ -code からなる集合とすべての $\{v_{k-n}, v_{k-1-n+d}; k-1, q\}$ -minihyper からなる集合の間には、1対1の対応がある。

(2) 特に、 d が (1.2) のように表される場合には、Griesmer bound (1.3) の等号を満たすすべての同値でない $[n, k, d; q]$ -code からなる集合と (1.4) によって与えられる整数 f と m をパラメータにもつすべての $\{f, m; k-1, q\}$ -minihyper からなる集合との間には、1対1の対応がある。

(注 2.2) (1.4) によって与えられる整数 f と m をパラメータにもつ $S_{k,q}$ の中の $\{f, m; k-1, q\}$ -minihyper F が存在し、 $PG(k-1, q)$ の任意の hyperplane H に対して、

$$|F \cap H| = m_1, m_2, \dots, \text{ or } m_r \quad (2.3)$$

($0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_r$) であるならば、定理 2.1 の方法によって作られる k 次元部分空間 C は重み分布 $1 + n_1 z^{w_1} + n_2 z^{w_2} + \dots + n_r z^{w_r}$ をもち、かつ、Griesmer bound (1.3) の等号を満たす $[n, k, d; q]$ -code である。ただし、 d は (1.2) によって与えられる整数で

$$w_i = m_i + q^{k-1} - f, \quad n_i = (q-1)x_i, \quad (2.4)$$

x_i は $|F \cap H| = m_i$ を満たす $PG(k-1, q)$ の中の hyperplane の数を表す。

3. 定理 1 と定理 2 の証明

定理 1 を証明するために、 (q^2+1) -cap に関する次の補題を用いる。(詳細は、Hirschfeld [52] の中の Lemma 16.1.6 を参照)

(補題 3.1) Ω を $PG(3, q)$ のすべての点からなる集合とし、 $T = \{Q_i \mid i=1, 2, \dots, q^2+1\}$ を Ω の中の (q^2+1) -cap とし、 $\tilde{F} = \Omega \setminus T$ とおく。

(1) $PG(3, q)$ の任意の 2-flat Δ に対して、 $|\tilde{F} \cap \Delta| = q^2$ または q^2+q である。

(2) $PG(3, q)$ の任意の 2-flat Δ に対して、 $|T \cap \Delta| = 1$ または $q+1$ である。

(3) F は $(v_2+(q-1)v_3, v_1+(q-1)v_2; 3, q)$ -minihyper である。

(4) n_{ij} ($1 \leq i \leq q^2+1, 1 \leq j \leq q+1$) を $Q_i \in \Delta$ かつ $|T \cap \Delta| = j$ を満たす $PG(3, q)$ の 2-flat Δ の数とすると、任意の整数 i に対して、 $n_{i1} = 1, n_{i, q+1} = q^2+q$ である。

(定理1の証明) $F = (\Omega \setminus \{Q_1, Q_2, \dots, Q_{q^2}\}) \cup \{P_1, P_2, \dots, P_q\}$ であるから、
 $|F| = |\tilde{F}| + v_2 = 2v_2 + (q-1)v_3$ である。

H を $PG(4, q)$ の任意の 3-flat (i.e., hyperplane) とする。

Case 1. $H = \Omega$. $|F \cap H| = |\Omega| - q^2 = q^3+q+1 \geq q^2+1 = 2v_1 + (q-1)v_2$

Case 2. $H \neq \Omega$. $\Delta = H \cap \Omega$ とおくと、 Δ は H と Ω に含まれる 2-flat である。

$T = \{P, Q_1, Q_2, \dots, Q_{q^2}\}, \tilde{F} = \Omega \setminus T, T_0 = T \setminus \{P\},$

$L = \{P, P_1, P_2, \dots, P_q\}, L_0 = L \setminus \{P\}$

とおくと、補題3.1より $|T \cap \Delta| = 1$ or $q+1, |F \cap H| = (q^2+q+1) - |T_0 \cap \Delta| + |L_0 \cap H|$ である。

(A) $P \in \Delta$ の場合 $|T_0 \cap \Delta| = |T \cap \Delta| - 1, |L_0 \cap H| = 0$ or q であるから

① $|F \cap H| = q^2+1, q^2+q+1$ or q^2+2q+1

② $|F \cap H| = q^2+2q+1 \Leftrightarrow |T \cap \Delta| = 1$ かつ $|L \cap H| = q+1$

が成り立つ。

(B) $P \notin \Delta$ の場合 $|T_0 \cap \Delta| = |T \cap \Delta|, |L_0 \cap H| = |L \cap H| = 1$ であるから
 $|F \cap H| = q^2+1$ or q^2+q+1 である。

以上より、 F は定理1の中の条件(1)を満たす $(2v_2+(q-1)v_3, 2v_1+(q-1)v_2; 4, q)$ -minihyper で、
 かつ、 $x_3 = 1, x_4 = 1$ である。

$PG(4, q)$ の中には 3-flat が v_3 個あり、 F の任意の点 P に対して、 P を含む 3-flat は v_4 個あるから、次の2つの式が成り立つ。

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = v_3 = q^4 + q^3 + q^2 + q + 1,$$

$$(q^2+1)x_1 + (q^2+q+1)x_2 + (q^2+2q+1)x_3 + (q^3+q+1)x_4 = |F| v_4$$

これより、 $x_1 = q^4 - q, x_2 = q^3 + q^2 + 2q - 1, x_3 = 1, x_4 = 1$ を得る。

(定理2の証明) 定理1と注2.2より、定理2を得る。

(注3.1) $q = 3$ の場合には、最近、浜田等によって、すべての $(2v_2+2v_3, 2v_1+2v_2; 4, 3)$ -minihyper の特徴付けが行われた。

References

- [1] B. I. Belov, V. N. Logachev and V. P. Sandimrov, Construction of a class of linear binary codes achieving the Varshamov-Griesmer bound, *Problems of Info. Transmission* 10 (3) (1974), 211-217.
- [2] R. C. Bose, Mathematical theory of the symmetrical factorial design, *Sankhyā* 8 (1947), 107-166.
- [3] R. C. Bose, On some connections between the design of experiments and information theory, *Bull. Inst. Internat. Statist.* 38 (1961), 257-271.
- [4] R. C. Bose and J. N. Srivastava, On a bound useful in the theory of factorial designs and error correcting codes, *Ann. Math. Statist.* 35 (1964), 408-414.
- [5] A. E. Brouwer and N. J. A. Sloane, "Tables of Codes", in "Handbook of Coding Theory", edited by R. Brualdi, W. C. Huffman and V. Pless, North-Holland, Amsterdam, 1994, to appear.
- [6] A. R. Calderbank and W. M. Kantor, The geometry of two-weight codes. *Bull. London Math. Soc.* 18 (1986), 97-122.
- [7] L. R. A. Casse and D. G. Glynn, On the uniqueness of $(q+1)$ -arcs of $PG(4, q)$, $q = 2^h$, $h \geq 3$, *Discrete Math.* 48 (1984), 173-186.
- [8] R. H. F. Denniston, Some maximal arcs in finite projective planes, *J. Combin. Theory* 6 (A) (1969), 317-319.
- [9] S. M. Dodunekov, On the achievement of the Solomon-Stiffler bound, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences* 39 (1986), 39-41.
- [10] S. M. Dodunekov, T. Helleseht, N. Manev and Ø. Ytrehus, New bounds on binary linear codes of dimension eight, *IEEE Trans. Inform. Theory* 33 (1987), 917-919.
- [11] P. G. Farrel, Linear binary anticodes, *Electron. Lett.* 6 (1970), 419-421.
- [12] R. A. Fisher, The theory of confounding in factorial experiments in relation to the theory of groups, *Ann. Eugen. Lond.* 11 (1942), 341-353.
- [13] R. A. Games, The packing problem for projective geometries over $GF(3)$ with dimension greater than five, *J. Combin. Theory* 35 (A) (1983), 126-144.
- [14] D. G. Glynn, The non-classical 10-arc of $PG(4, 9)$, *Discrete Math.* 59 (1986), 43-51.
- [15] V. D. Goppa, Codes on algebraic curves, *Soviet Math. Doklady* 24 (1981), 170-172.
- [16] V. D. Goppa, *Geometry and Codes*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
- [17] P. P. Greenough and R. Hill, Optimal ternary quasi-cyclic codes, preprint.
- [18] J. H. Griesmer, A bound for error-correcting codes, *IBM J. Res. Develop.* 4 (1960), 532-542.
- [19] N. Hamada, Characterization resp. nonexistence of certain q -ary linear codes attaining the Griesmer bound, *Bull. Osaka Women's Univ.* 22 (1985), 1-47.
- [20] N. Hamada, Characterization of minihypers in a finite projective geometry and its applications to error-correcting codes, *Bull. Osaka Women's Univ.* 24 (1987), 1-24.
- [21] N. Hamada, Characterization of $\{(q+1)+2, 1; t, q\}$ -minihypers and $\{2(q+1)+2, 2; 2, q\}$ -minihypers in a finite projective geometry, *Graphs Combin.* 5 (1989), 63-81.
- [22] N. Hamada, A characterization of some $[n, k, d; q]$ -codes meeting the Griesmer bound using a minihyper in a finite projective geometry, *Discrete Math.* 116 (1993), 229-268.
- [23] N. Hamada, A survey of recent work on characterization of minihypers in $PG(t, q)$

- and nonbinary linear codes meeting the Griesmer bound, *J. Combin. Inform. Syst. Sci.* 18 (1993), to appear.
- [24] N. Hamada and M. Deza, Characterization of $\{2(q+1)+2, 2; t, q\}$ -minihypers in $PG(t, q)$ ($t \geq 3$, $q \geq 5$) and its applications to error-correcting codes, *Discrete Math.* 71 (1988), 219-231.
- [25] N. Hamada and M. Deza, A characterization of some $[n, k, d; q]$ -codes meeting the Griesmer bound for given integers $k \geq 3$, $q \geq 5$ and $d = q^{k-1} - q^\alpha - q^\beta - q^\gamma$ ($0 \leq \alpha \leq \beta < \gamma < k-1$ or $0 \leq \alpha < \beta \leq \gamma < k-1$), *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica* 16 (1988), 321-338.
- [26] N. Hamada and M. Deza, A survey of recent works with respect to a characterization of an $[n, k, d; q]$ -code meeting the Griesmer bound using a minihyper in a finite projective geometry, *Discrete Math.* 77 (1989), 75-87.
- [27] N. Hamada and M. Deza, A characterization of $\{v_{\mu+1} + \varepsilon, v_\mu; t, q\}$ -minihypers and its applications to error-correcting codes and factorial designs, *J. Statist. Plann. Inference* 22 (1989), 323-336.
- [28] N. Hamada and M. Deza, A characterization of $\{2v_{\alpha+1} + 2v_{\beta+1}, 2v_\alpha + 2v_\beta; t, q\}$ -minihypers in $PG(t, q)$ ($t \geq 2$, $q \geq 5$ and $0 \leq \alpha < \beta < t$) and its applications to error-correcting codes, *Discrete Math.* 93 (1991), 19-33.
- [29] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some $\{3v_2, 3v_1; t, q\}$ -minihypers and some $\{2v_2 + v_{\gamma+1}, 2v_1 + v_\gamma; t, q\}$ -minihypers ($q = 3$ or 4 , $2 \leq \gamma < t$) and its applications to error-correcting codes, *Bull. Osaka Women's Univ.* 27 (1990), 49-107.
- [30] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some minihypers in a finite projective geometry $PG(t, 4)$, *European J. Combin.* 11 (1990), 541-548.
- [31] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some linear codes over $GF(4)$ meeting the Griesmer bound, *Math. Japonica* 37 (1992), 231-242.
- [32] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some minihypers in $PG(t, q)$ ($q = 3$ or 4) and its applications to error-correcting codes, *Lecture Notes in Mathematics* 1518 (1992), 43-62, Springer, Berlin.
- [33] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some $\{2v_{\alpha+1} + v_{\gamma+1}, 2v_\alpha + v_\gamma; k-1, 3\}$ -minihypers and some $[n, k, 3^{k-1} - 2 \cdot 3^\alpha - 3^\gamma; 3]$ -codes ($k \geq 3$, $0 \leq \alpha < \gamma < k-1$) meeting the Griesmer bound, *Discrete Math.* 104 (1992), 67-81.
- [34] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some $\{3v_{\mu+1}, 3v_\mu; k-1, q\}$ -minihypers and some $[n, k, q^{k-1} - 3q^\mu; q]$ -codes ($k \geq 3$, $q \geq 5$, $1 \leq \mu < k-1$) meeting the Griesmer bound, submitted for publication.
- [35] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some $\{v_2 + 2v_3, v_1 + 2v_2; k-1, 3\}$ -minihypers and some $[v_k - 30, k, 3^{k-1} - 21; 3]$ -codes meeting the Griesmer bound, *J. Statist. Plann. Inference* 34 (1993), 387-402.
- [36] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some ternary codes meeting the Griesmer bound, *Proceedings of the second international conference on finite fields: Theory, Applications and Algorithms, Las Vegas 17-21 August 1993.*
- [37] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some minihypers and codes meeting the Griesmer bound over $GF(q)$, $q > 9$, *Lecture Notes in Pure and Applied Math. Ser.* 141 (1992), 105-122, Marcel Dekker, New York.
- [38] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some q -ary codes ($q > (h-1)^2$, $h \geq 3$) meeting the Griesmer bound, *Math. Japonica* 38 (1993), 925-939.
- [39] N. Hamada, T. Helleseth and Ø. Ytrehus, Characterization of $\{2(q+1)+2, 2; t, q\}$ -minihypers in $PG(t, q)$ ($t \geq 3$, $q \in \{3, 4\}$), *Discrete Math.* 115 (1993), 175-185.

- [40] N. Hamada, T. Helleseeth and Ø. Ytrehus, There are exactly two nonequivalent $[20, 5, 12; 3]$ -codes, *Ars Combin.* **35** (1993), 3-14.
- [41] N. Hamada, T. Helleseeth and Ø. Ytrehus, The nonexistence of $[51, 5, 33; 3]$ -codes, *Ars Combin.* **35** (1993), 25-32.
- [42] N. Hamada, T. Helleseeth and Ø. Ytrehus, On the construction of a $[q^4+q^2-q, 5, q^4-q^3+q^2-2q; q]$ -code meeting the Griesmer bound, *Designs, Codes and Cryptography* **2** (1992), 225-229.
- [43] N. Hamada, T. Helleseeth and Ø. Ytrehus, A new class of nonbinary codes meeting the Griesmer bound, *Discrete Applied Math.*, to appear.
- [44] N. Hamada and F. Tamari, On a geometrical method of construction of maximal t -linearly independent sets, *J. Combin. Theory* **25** (A) (1978), 14-28.
- [45] N. Hamada and F. Tamari, Construction of optimal codes and optimal fractional factorial designs using linear programming, *Ann. Discrete Math.* **6** (1980), 175-188.
- [46] N. Hamada and F. Tamari, Construction of optimal linear codes using flats and spreads in a finite projective geometry, *European J. Combin.* **3** (1982), 129-141.
- [47] R. W. Hamming, Error detection and error correcting codes, *Bell. System. Tech. J.* **29** (1950), 147-160.
- [48] T. Helleseeth, A characterization of codes meeting the Griesmer bound, *Inform. and Control* **50** (1981), 128-159.
- [49] R. Hill, Caps and codes, *Discrete Math.* **22** (1978), 111-137.
- [50] R. Hill and D. E. Newton, Some optimal ternary linear codes, *Ars Combin.* **25** A (1988), 61-72.
- [51] R. Hill and D. E. Newton, Optimal ternary linear codes, *Designs, Codes and Cryptography*, to appear.
- [52] J. W. P. Hirschfeld, *Finite projective space of three dimensions*, Oxford University Press, 1985.
- [53] F. J. MacWilliams and N. J. A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*, (North-Holland Mathematical Library Vol. **16** (1977), Amsterdam).
- [54] D. E. Newton, Optimal ternary linear codes, Ph.D. Thesis, University of Salford, 1990.
- [55] V. Pless, On the uniqueness of the Golay codes, *J. Combin. Theory* **5** (1968), 215-228.
- [56] B. Qvist, Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I* (1952), 134.
- [57] G. Solomon and J. J. Stiffler, Algebraically punctured cyclic codes, *Inform. and Control* **8** (1965), 170-179.
- [58] F. Tamari, A note on the construction of optimal linear codes, *J. Statist. Plann. Inference* **5** (1981), 405-411.
- [59] F. Tamari, On linear codes which attain the Solomon-Stiffler bound, *Discrete Math.* **49** (1984), 179-191.
- [60] J. A. Thas, Some results concerning $\{(q+1)(n-1); n\}$ -arcs and $\{(q+1)(n-1)+1; n\}$ -arcs in finite projective plane of order q , *J. Combin. Theory* **19** (A) (1975), 228-232.
- [61] H. C. A. van Tilbolg, On the uniqueness resp. nonexistence of certain codes meeting the Griesmer bound, *Inform. and Control* **44** (1980), 16-35.
- [62] J. F. Voloch, Arcs in projective planes over prime fields, *J. Geom.* to appear.