

Title	Clock dependence of the computational heat found by simulation (Analytical Study of Quantum Information and Related Fields)
Author(s)	吉田, 宣章; 後藤, 英一; 天野, 力; 白鳥, 紀一
Citation	数理解析研究所講究録 (2001), 1196: 21-31
Issue Date	2001-04
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/64859">http://hdl.handle.net/2433/64859</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## Clock dependence of the computational heat found by simulation

吉田宣章 (Nobuaki Yoshida) 関西大総合情報学部  
後藤英一 (Eiichi Goto) 神奈川大理学部  
天野力 (Chikara Amano) 神奈川大理学部  
白鳥紀一 (Kiichi Shiratori)

### 1. 序

Shannon は情報量を定義するために「エントロピー」という言葉を使った[1]。物理で使われる「エントロピー」を意識してのものだが、彼は情報、物理という2種のエントロピーの関係については言及しなかった。以来、Brillouin、Landauer ら、多くの研究者によって、両者の関係が論じられ、時に混同されてきた[2,7-10,12-15,18-19]。

特に、「計算に伴う発熱はどこまで小さくできるか」という問題は、Landauer を始め、「可逆計算」を提唱した Bennett、更に Feynman にも取り組んでいる。議論は主として、メモリー消去は不可逆過程ゆえエントロピーを発生し、したがって発熱が起きる、というものである。そこで発熱を抑えるために、メモリー消去を伴わない「可逆計算」が提唱された。

我々は、情報のエントロピーが物理のエントロピーと同じではないという考えから、情報の消去されても発熱が生じない過程を探ってきた。計算機のクロックの速度を遅くすると発熱がどこまで小さくできるかという問題を、計算素子のモデルとして「量子磁束パラメトロン」を使い、クロック速度の依存性を調べた。この報告では数値シミュレーションの経過を示す。

### 2. 量子磁束パラメトロン

量子磁束パラメトロン (Quantum Flux Parametron, QFP) [11]とはジョセフソン素子を使った図1のような超伝導素子で、回路は図1のようにになっている。これは2階の常微分方程式

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + a \frac{d\phi}{dt} + \phi - c \sin\phi - b = 0$$

で表される、極めて簡単な古典力学的な系である。ここで $\phi$ は磁束、 $a$ はダンピング抵抗、 $c$ は制御パラメーター、 $b$ は入力バイアスを表す。計算素子としてはパラメトロン[6]と同じ多

数決論理回路に使われる。QFPの動作を図2に示す。制御パラメータ $C$ をクロックに従って変化させることにより、 $\Phi$ に対するポテンシャルが単一井戸型ポテンシャルのクエンチ状態( $C = -1$ )から二重井戸型ポテンシャルの励起状態( $C = 3$ )の間を往復する。クエンチ状態の入力バイアス $b$ の符号により、励起状態の $\Phi$ が二重井戸のうちのどちらに落ち着くか決まる。

### 3. 数値シミュレーション

最初の出発点としては量子力学も統計力学もない2階の常微分方程式の解の性質を問題とする。上記の微分方程式をルンゲ・クッタ法により数値積分して、種々の条件の下でQFPのシミュレーションを行った。図3のように、クロック周期を基準より $M$ 倍にするとして、発熱の $M$ 依存性を調べた。

#### (1) ダンピング抵抗なし ( $\alpha=0$ )

まず、ダンピング抵抗のない場合のシミュレーションを行った。このままでは振動が収まらないという問題があるが、それを避けるために、たとえばダンピング抵抗はスイッチ式にして、クエンチ状態で付けるようにすればよい。この場合、発熱はクエンチ状態に戻ったときの振幅の自乗に比例する。

計算は、 $b=0.1, 0.01, 0, -0.1, -0.01$ ;  $M=10^2, 10^3, 10^4$  ( $, 10^5$ )について行い、クエンチ後の振幅を調べた。結果を図4に示す。すなわち、入力を保持するとき、発熱はほぼ  $O(1/M^2) = O(M^{-2})$  のオーダーで減ってゆく。

#### (2) ダンピング抵抗あり

次に、ダンピング抵抗が常に存在する場合について調べた。この場合、ダンピング抵抗に於いて  $a \int \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)^2 dt$  の熱が生ずる。入力バイアスは  $b=0$  と固定し、ダンピング抵抗の

部分は  $a=2, 0.2, 0.02$  の3種類の場合について発熱を調べた。結果を図5に示す。すなわち発熱はほぼ  $O(M^{-1})$  に比例する。

#### (3) ダンピング抵抗なしで繰り返し

ダンピング抵抗なしで、入力バイアス  $b$  を固定したまま、サイクルを繰り返して行き、振幅の増大のしかたを調べた。固定バイアスは  $b=0.1, 0.01$  について行った。計算の結果得られた各サイクル後の振幅の平方を図 6 に示す。すなわち、振幅の増え方には上限があり、疑似周期的に変化するようである。但しこのシミュレーションは入力固定されている場合であり、計算素子としては意味がない。

#### (4) ダンピング抵抗なしで、 $b$ をサイクル毎にリセット

上記と同様のシミュレーションで、サイクル毎にバイアス  $b$  を 0 にもどしながらクエンチした。各サイクル後の振幅の平方を図 7 に示す。疑似周期的振幅は増減を繰り返しながら、振幅は結局は増えて行く。

更に温度を考慮したシミュレーションを行うには、各サイクルの諸処に、エネルギーの Maxwell 分布を仮定してみるなどすればよいであろう。それでももしエネルギーの増大が抑制できれば、発熱のない計算が可能かもしれない。

#### 4. 我々の主張

デジタル計算装置の電氣的等価回路として、純リアクタンス  $-X$  書くとする。これは非線形のインダクタンス、キャパシタンスを含むが、抵抗損失はないものとする。  $-X$  回路からの発熱はない。実際の回路では、たとえば超伝導インダクタンスでも、高周波損失は必ず存在し、物質（非真空）のキャパシタンスは誘電体損失をもつ。本当の純粹の  $-X$  素子は存在しないが、数学モデルとして無損失  $-X$  回路を考察する。我々は実例として  $-X$  QFP を考察し、数値解を示した。解析的な解の追求は残された問題である。

Pure  $-X$  (純リアクタンス) QFP は数クロックについては普通の QFP と同様に正しく作動するが、振動エネルギーが次第に増大して計算できなくなる。この振動は減衰抵抗を付けて熱として逃がせば正しい計算ができる。

シミュレーションの結果、消費電力はクロック周期増大率  $M$  ( $M=1$  は最高速クロックに相当) のべき乗則で与えられる。

$f(M)$  は情報を別の QFP に保存する場合

$g(M)$  は情報を廃棄する場合の 1 クロック周期辺りの発熱とする。

$$f(M) = O(M^{**(-2)})$$

$$g(M) = O(M^{**(-\beta)}) \quad (0.9 < \beta < 1)$$

ということが、 $M=10^4$  以下のシミュレーションの結果である。

前期量子論では、振動のエネルギー  $E$  で振動数  $\nu$  を割った  $\nu/E$  を不変量として adiabatic

invariant と呼んだ。速度への依存のしかたは

$$\frac{E}{v} = \text{constant} + M^\alpha$$

となる。すなわち我々の結果は、これらの「十分ゆっくり」を数量的に表そうとするものである。古典熱力学では、quasi-static process で十分ゆっくりやれば熱はいくらでも減らせると言っている。我々の結果は数量的に  $M^{**\alpha}$  で表したものになっている。Landauer のようにはならない。メモリーがあるかないかに関わりなく  $f$  と  $g$  も 0 に近づく。

なお、普通の Run の度に入力を入れない“Free Run”を付けること、または普通の Run の度に逆論理の入力“Bar Run”を付けること、などの工夫をし、位相を調節して振幅の増大を防ぐ方法も考えられる。

Free Run:  $X0Y0Z0\dots$  または  $X00Y00Z00\dots$  等

Bar Run:  $X\bar{X}Y\bar{Y}Z\bar{Z}\dots$  等

更に研究を進める必要がある。

### 将来の問題

1. この  $M$  のべき乗則の解析的な解明。
2. QFP 回路の変更または QFP 以外の回路によって、 $-X-$  (純リアクタンス) 無損失計算回路が作れるか。もし不可能ならば、Maxwell の魔物と関連付けて証明すること。もし可能ならば、シミュレーションを行って示すこと。
3. 2 階の常微分方程式でなく、より複雑な回路、量子力学、量子統計力学的取扱への拡張。しかしそれには先ず問題 1、2 を解く必要がある。

### 参考文献

- [1] C. E. Shannon, "The Mathematical Theory of Communication", Bell Syst. Tech. J., vol. 27, pp. 379-423, pp. 623-656 (1948).
- [2] L. Brillouin, "Science and Information Theory", (Academic Press, New York, 1956). (佐藤洋訳:「科学と情報理論」、(みすず書房、1969))
- [3] E. A. Armstrong, "A New System of Short Wave Amplification", Proc. IRE, vol. 9, pp. 3-27 (1921); E. A. Armstrong, "The Super-Heterodyne-Its Origin, Development, and some Recent Improvements", Proc. IRE, vol. 12, pp. 539-552 (1924).
- [4] K. B. Jefferts and E. D. Jones, "Ultrahigh Frequency Nuclear Magnetic Resonance Spectrometer", Rev. Scientific Instr., vol. 36, pp. 983-984 (1965).
- [5] J. von Neumann, U. S. Patent 2,815,488, applied 1954, published 1957; R. L. Wigginton, "A New Concept in Computing", Proc. IRE, vol. 47, pp. 516-523, April 1959.
- [6] E. Goto, "The Parametron, a Digital Computing Element which Utilizes Parametric

Oscillation", Proc. IRE, vol. 47, pp. 1304-1316, Aug. 1959.

[7] R. Landauer, "Irreversibility and Heat Generation in the Computing Process", IBM J. Res. Dev., vol. 5, pp. 183-191 (1961).

[8] W. Porod, R. O. Grondin, D. K. Ferry and G. Porod, "Dissipation in Computation", Phys. Rev. Lett. 52, 232 (1984); C. H. Bennett, "Thermodynamically Reversible Computation", Phys. Rev. Lett. 53, 1202 (1984); P. Benioff, "Comments on "Dissipation in Computation"", Phys. Rev. Lett. 53, 1203 (1984); W. Porod, R. O. Grondin, D. K. Ferry and G. Porod, "Porod *et al.* Respond", Phys. Rev. Lett. 53, 1206 (1984).

[9] C. H. Bennett, "Logical Reversibility of Computation", IBM J. Res. Dev., vol. 17, 525-532 (1973).

[10] K. K. Likharev, IEEE Trans. Magn. vol. MAG-13, 242 (1977).

[11] E. Goto and K. F. Loe, DC Flux Parametron (World Scientific, Singapore, 1986).

[12] E. Goto, N. Yoshida, K. F. Loe and Willy Hioe, "A Study on Irreversible Loss of Information without Heat Generation", Proc. 3rd Int. Symp. Foundations of Quantum Mechanics, Tokyo, 1989, pp. 412-418.

[13] R. Landauer, "Reversible Computation: Implications for Measurement, Communication, and Physical Law", Proc. 3rd Int. Symp. Foundations of Quantum Mechanics, Tokyo, 1989, pp. 407-411.

[14] E. Goto, W. Hioe and M. Hosoya, Physica C, vols. 185-189, 385 (1991).

[15] R. Landauer, Physica C, vol. 208, 205 (1993).

[16] R. P. Feynman, Feynman Lectures on Computation, Addison Wesley, New York, 1996.

[17] D. P. Hamilton, Science, vol. 258, pp. 517-712, Oct. 1992, p. 574.

[18] 石岡俊也、淵上信子、「計算の熱力学について」、物性研究 71-1 (1999-4).

[19] N. Fuchikami, H. Iwata and S. Ishioka, "Thermodynamic Entropy of Computer Devices", J. Phys. Soc. Jpn., vol. 68, pp. 3751-3754 (1999).

[20] 朝永振一郎「量子力学 I」、第 2 版 (みすず書房、1969)。

#### 文献註釈

[1] Shannon は情報量をエントロピーと命名した。[16] Feynman に拠ると、von Neumann の示唆によるとしている。けれども Shannon は情報と物理のエントロピーの関係については論文に記述していない。

[2] Brillouin は負エントロピーをネグエントロピーと命名した。ネグエントロピーは情報の秩序を表し、物理のエントロピーは無秩序を表すとした。だが QFP[11]のエントロピーを計算すると全く合わない。

[3] Armstrong は再生増幅、FM などの発明者として著名であり、1923 年には非常に簡単な

回路で高感度が得られる超再生 (superregeneration) を提案した。これは振動回路を間歇的にクエンチ (quench、Armstrong の命名) して非クエンチ時の振動の指数関数的増大を利用して増幅を行うものである。なお、初期条件の僅かな違いが後に大きな変化が生ずることは、カオス的振る舞いのひとつの条件であるが、超再生はこれを満たしているかもしれない。

[4] この超再生を NMR の増幅器に使用しようとする論文である。しかし超再生には周波数特性が劣悪で、簡単 (1 個の真空管) という利点は多数のトランジスタを集積する技術の進展により超再生の意義が全くなくなった。

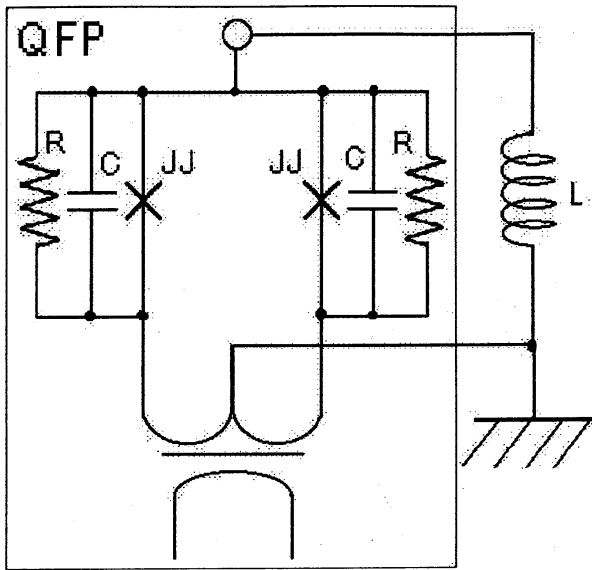
[5,6] パラメトロンと PLO (Phase Locked Oscillator) による増幅は phase lock (位相引込み) 作用のある超再生増幅と考えられる。パラメトロンは非線形インダクタンス (PLO は非線形静電容量) を利用して 1/2 分周によって記憶と増幅を閾値論理を実現している。しかしパラメトロンと PLO ではダンピング抵抗によって振動エネルギーを熱にして逃がす必要があり、純リアクタンス回路による無発熱計算はできない。

[7] Landauer は 1 ビットの情報損失は  $kT \log 2$  の発熱を伴うと主張した。[8] Porod et al. はそれに対する批判である。

[9] Bennett は情報を失わない可逆計算による無発熱計算法を提案した。[16] Feynman は計算に伴う発熱の最小化の問題に於いて、Bennett の可逆計算法は major breakthrough であるとしている。

[11] 筆者らはジョセフソン接合を使う論理回路 QFP (Quantum Flux Parametron) を提案した。数学的には [10] Likharev の Quantron と同じものである。QFP [12,14] の消費電力を数値計算で求めたところ、クロック周波数を下げれば情報を消去しても消費電力を任意に低減できることを示した。これは Landauer の [7] に対する数値実験による反論である。[13,15] Landauer は納得せず反論を書いたが、1999 年に亡くなった。[18,19] Ishioka, Fuchikami は Landauer の [7] と同じ結論を導いたとしている。

[17] Science 誌の記者 Hamilton は、ビット損失に伴う発熱はクロックを遅くすることによって任意に小さくできると主張する筆者らを第 2 種永久機関の研究者としてふざけた口調で紹介している。



-X- (純リアクタンス) QFP では  $R=\infty$

図 1. QFP 回路



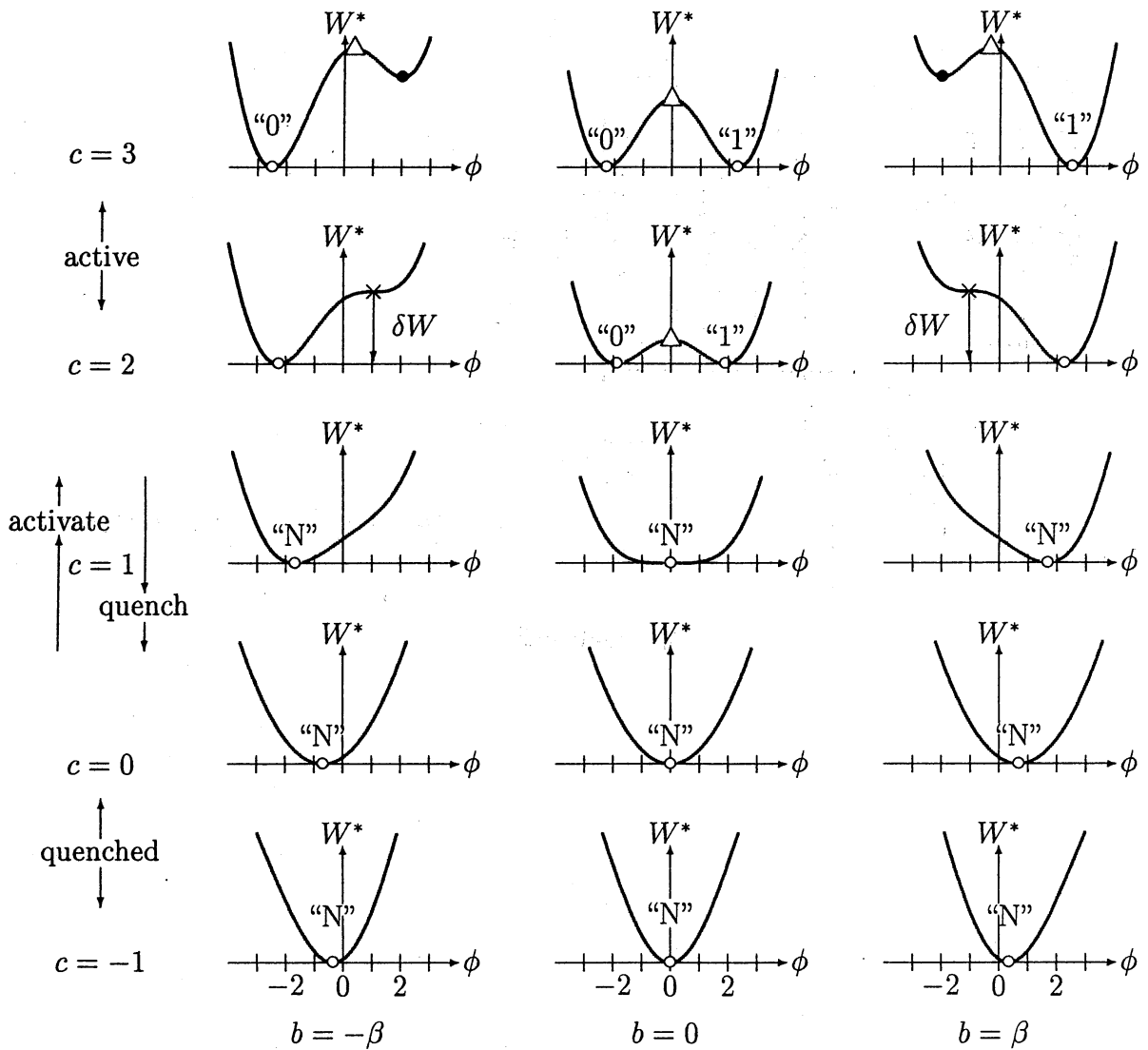


Figure 2: Potential energy  $W^* = W - \text{Min}(W)$ ,  $W = W(b, c; \phi) = E_D(\phi^2/2 + c \cos \phi - b\phi)$ .

$c$ : Control parameter.  $b$ : (Input/Output) Bias.  $\beta = \sqrt{3} - \pi/3$ .

$\phi$ : Flux angle  $\phi = 2\pi\Phi/\Phi_0$ ,  $\Phi_0 = h/2e$ .

Stationary Points  $\partial W/\partial\phi = 0$

- |              |                                   |                      |
|--------------|-----------------------------------|----------------------|
| ○ Stable     | $\partial^2 W/\partial\phi^2 > 0$ | "N" No memory        |
| ● Metastable | $\partial^2 W/\partial\phi^2 > 0$ | "0" Memorizing bit 0 |
| × Critical   | $\partial^2 W/\partial\phi^2 = 0$ | "1" Memorizing bit 1 |
| △ Unstable   | $\partial^2 W/\partial\phi^2 < 0$ |                      |

$\delta W$ : Difference of  $W$  by decay of metastable to stable state, giving fEP,  
 $\Delta_i S = \int_0^1 (d_i S/dt) dt = \delta W/T$ .

図 2. QFP のポテンシャルエネルギー

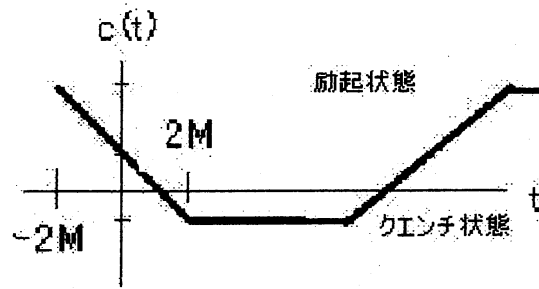


図3: 数値シミュレーションに於ける制御パラメター

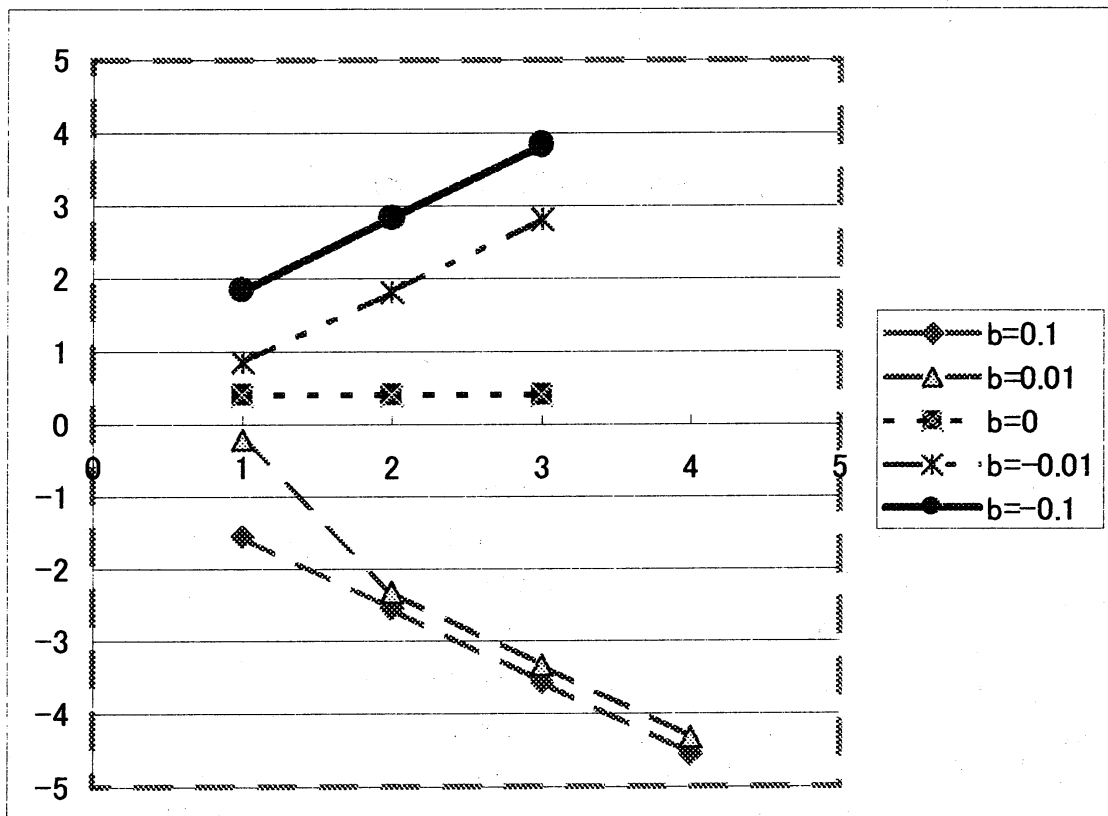


図4. ダンピング抵抗のない場合

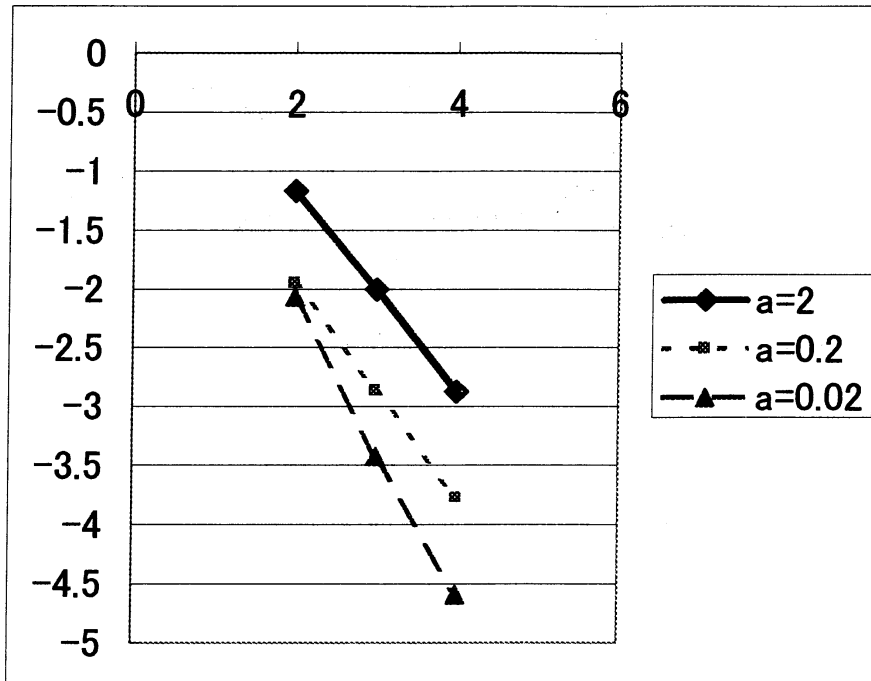


図5. ダンピング抵抗のある場合

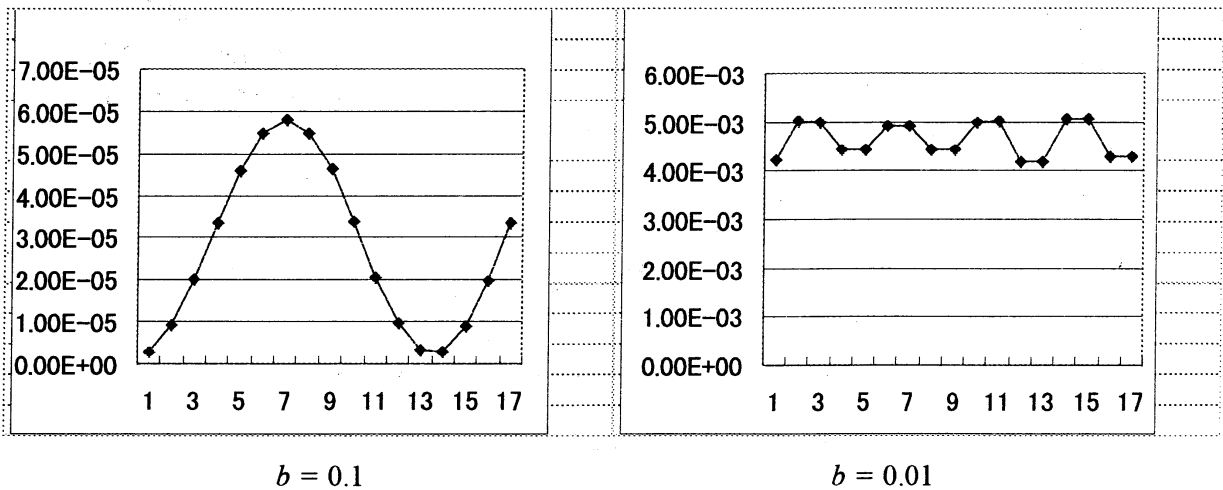


図6. ダンピング抵抗なしでの繰り返す場合

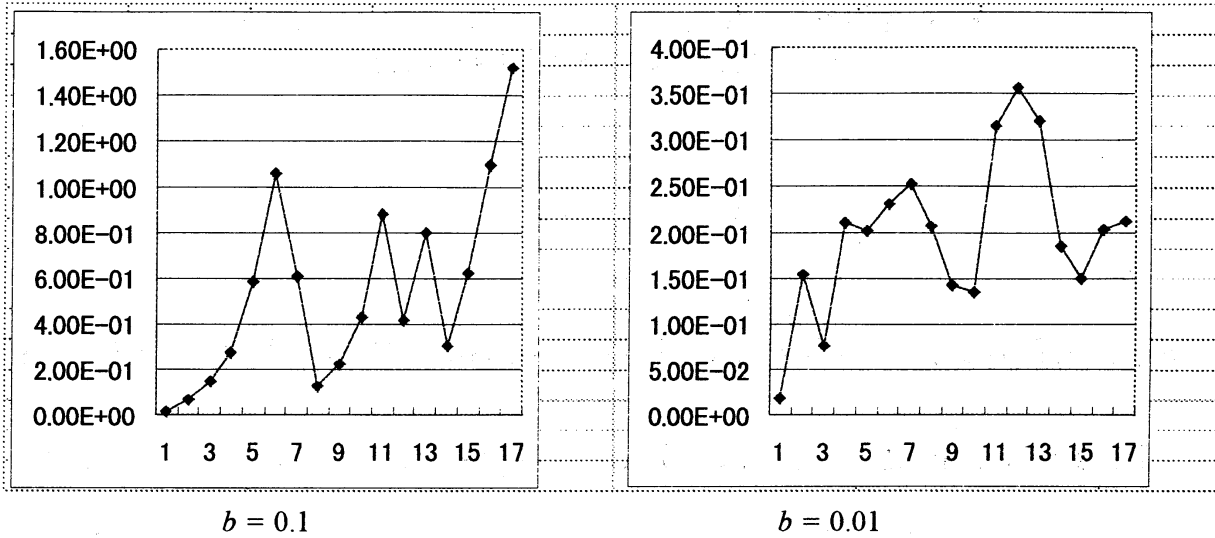


図7. ダンピング抵抗なしで、サイクル毎にバイアスをリセットして繰り返す場合