

| | |
|-------------|---|
| Title | 多次元非線形ナップザック問題のGA解の評価 (不確実性 の下での数理モデルの構築と最適化) |
| Author(s) | 並川, 哲郎; 岩崎, 彰典; 太田垣, 博一; 仲川, 勇二 |
| Citation | 数理解析研究所講究録 (2001), 1194: 105-110 |
| Issue Date | 2001-03 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/64812 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

多次元非線形ナップザック問題のGA解の評価

姫路獨協大学 並川哲郎
岡山理科大学 岩崎彰典
岡山理科大学 太田垣博一
関西大学 仲川勇二

従来, 一次元非線形ナップザック問題の解法として動的計画法や分枝限定法などの有効なアルゴリズムが開発されてきた。しかし, 多次元非線形ナップザック問題では, それらの解法は有効ではなく, グリーディー法, 有効勾配法, 遺伝的アルゴリズム (GA), タブーサーチなどのヒューリスティック解法が試みられてきた。それらの解法は, 制約条件がきびしい (多数の制約条件を持つ, もしくは制約許容量が小さい) ときには有効に働かない。そこで我々は, 制約条件がきびしい問題に対し, 代理制約法 (SD) と GA とを適用し目的関数の上界値と GA 解の与える目的関数の近似値とを比較し, GA 解の評価を行う。

1 多次元非線形ナップザック問題

多次元非線形ナップザック問題はつぎの式で定式化される。

$$\begin{aligned} & \text{maximize } f(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N f_n(x_n) \\ & \text{subject to } g_m(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N g_{mn}(x_n) \leq b_m, \quad m = 1, 2, \dots, M, \\ & \quad x_n \in \mathcal{A}_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nK_n}\}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

ここで, $f_n(x_n)$, $g_{mn}(x_n)$ はそれぞれ目的関数, 制約関数, b_m は制約許容量, \mathcal{A}_n は選択される項目の集合である。

2 代理制約法 (SD)

岩崎ら [1] は代理制約法を多次元非線形ナップザック問題へ適用した。代理双対問題は次式で与えられる。

$$\min\{\text{opt}[S(\mathbf{u})] : \mathbf{u} \in U\},$$

ただし, $\text{opt}[S(\mathbf{u})]$ は問題 $S(\mathbf{u})$ の最適な目的関数値,

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{M-1})^T \in R^{M-1},$$

$$U = \{\mathbf{u} \in R^{M-1} : \sum_{m=1}^{M-1} u_m \leq 1, \mathbf{u} \geq 0\},$$

である。ここで, $S(\mathbf{u})$ は代理問題とよばれ次式で与えられる。

$$\text{maximize } f(\mathbf{x})$$

$$\text{subject to } \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \leq \beta,$$

ただし,

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{M-1} u_m \{g_m(\mathbf{x}) - g_M(\mathbf{x})\} + g_M(\mathbf{x}),$$

$$\beta = \sum_{m=1}^{M-1} u_m \{b_m - b_M\} + b_M,$$

である。

代理問題の実行可能領域は, 原問題の実行可能領域をすべて含んでいるので, 代理問題の解は原問題の上界値を与える。代理制約法は, その上界値を最小化するように代理乗数 \mathbf{u} を最適化しているので, 代理双対問題の解は原問題のよい上界値を与える。しかし, 代理双対問題の解は実行可能になるとは限らない。従来実行可能解を得る方法として, 有効勾配法, グリーディ法, シミュレーティッドアニーリング, 遺伝的アルゴリズム, タブーサーチ等が開発されてきた。ここでは, 遺伝的アルゴリズムを多次元非線形ナップザック問題へ適用する。

3 遺伝的アルゴリズム (GA)

遺伝的アルゴリズムは適用可能な問題の範囲が広い手法であり, 近年多次元組合せ最適化問題へ, 遺伝的アルゴリズム [2] やタブーサーチ [3] が応用されている。

遺伝的アルゴリズムを制約条件付き最適化問題へ適用するためにペナルティ関数を導入する。しかし, 問題の制約条件がきびしい時, ペナルティ関数を工夫しても生成される解集団のほとんどが実行不可能解となり, 実行可能解が得られなかったり, 得られてもよい解集団を得ることは困難である。

4 計算機実験

遺伝的アルゴリズムを多次元非線形ナップザック問題へ適用するために、各遺伝子を多次元非線形ナップザック問題の変数へ対応させ、各遺伝子として各変数のもつ項目のなかからランダムに項目を選んだ。交叉は2点交叉とした。適応度Fを次式とした。

$$F = f(\mathbf{x}) \quad \text{実行可能解のとき}$$

$$F = f(\mathbf{x}) - \lambda \sum_{m=1}^M \left(\sum_{n=1}^N g_{nm}(x_n) - b_m \right) \quad \text{実行不可能解のとき}$$

各項目の目的関数値と制約関数値をつぎのように設定し計算機実験を行った。

$$0 \leq f_n(a_{nk}) \leq 256K_n, \quad k = 1, 2, \dots, K_n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$0 \leq g_{mn}(a_{nk}) \leq 256K_n, \quad k = 1, 2, \dots, K_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

$f_n(a_{nk})$ and $g_{mn}(a_{nk})$ are all integers, and

$$b_m = \left\lfloor \alpha \sum_{n=1}^N (g_{mn}(a_{n1}) + g_{mn}(a_{nK})) \right\rfloor, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

この問題は単調増加でなく、制約条件数が多いときや制約許容量が小さいときは初期集団の解のほとんどが実行不可能である。

乱数のseedを1,2,3とし各規模に対し3問題を解いた。表1に制約条件数を変えたときの上限値とGA解の与える近似値を示す。表2に制約許容量を変えたときの上限値とGA解の与える近似値を示す。

5 まとめ

大規模で、制約条件のきびしい問題に対し、代理制約法と遺伝的アルゴリズムを適用し、遺伝的アルゴリズムの解を評価した。制約条件数が多くなると遺伝的アルゴリズムの解は品質が低下し、それは変数の数が多くなると顕著になる。また、遺伝的アルゴリズムの解は制約許容量に強く依存し、わずかに制約許容量が小さくすると遺伝的アルゴリズムの効率も解の品質も低下する。

参考文献

- [1] 岩崎彰典, 太田垣博一, 仲川勇二, 宮下文彬, 成久洋之, “代理制約法の多次元非線形ナップザック問題への適用” 信学論 A, Vol. J78-A, No. 8, pp. 691-697, 1999.
- [2] 坂和正敏, 加藤浩介, 柴野俊弘, 宮原伸二, “多次元整数ナップザック問題に対する3重構造文字列遺伝的アルゴリズムによる近似解法,” 信学論 A, Vol. J82-A, No.5, pp. 691-697, 1999.
- [3] Løkketnagen A., Glover F., “Solving zero-one mixed integer programming problems using tabu search,” European Journal of Operational Research, Vol. 106, pp. 624-658, 1998.

表 1 制約条件数を変えた場合の上界値とGA解の与える近似値 ($\alpha = 0.5$)

K=20

| | N=100 | | | N=500 | | | N=1000 | | |
|-------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | seed=1 | seed=2 | seed=3 | seed=1 | seed=2 | seed=3 | seed=1 | seed=2 | seed=3 |
| 上界値 | 487279 | 488315 | 492103 | 2437075 | 2438071 | 2433414 | 4876191 | 4880841 | 4869760 |
| M=1 GAの目的関数値 | 487279 | 488158 | 492103 | 2436384 | 2438071 | 2432793 | 4875739 | 4876801 | 4865119 |
| 上界値-GAの目的関数値 | 0 | 157 | 0 | 691 | 0 | 621 | 452 | 4040 | 4641 |
| 上界値とGAの目的関数値の相対誤差 | 0 | 0.000322 | 0 | 0.000284 | 0 | 0.000255 | 9.27E-05 | 0.000828 | 0.000953 |
| 上界値 | 487279 | 488315 | 492083 | 2436830 | 2437939 | 2432355 | 4876160 | 4880562 | 4869670 |
| M=3 GAの目的関数値 | 487279 | 487988 | 492043 | 2435555 | 2436966 | 2429931 | 4875379 | 4874733 | 4863819 |
| 上界値-GAの目的関数値 | 0 | 327 | 40 | 1275 | 973 | 2424 | 781 | 5829 | 5851 |
| 上界値とGAの目的関数値の相対誤差 | 0 | 0.00067 | 8.13E-05 | 0.000523 | 0.000399 | 0.000997 | 0.00016 | 0.001194 | 0.001202 |
| 上界値 | 487249 | 488301 | 492056 | 2436757 | 2437360 | 2432309 | 4875756 | 4880562 | 4869043 |
| M=5 GAの目的関数値 | 487065 | 487798 | 491783 | 2434726 | 2434128 | 2427533 | 4872868 | 4875718 | 4860298 |
| 上界値-GAの目的関数値 | 184 | 503 | 273 | 2031 | 3232 | 4776 | 2888 | 4844 | 8745 |
| 上界値とGAの目的関数値の相対誤差 | 0.000378 | 0.00103 | 0.000555 | 0.000833 | 0.001326 | 0.001964 | 0.000592 | 0.000993 | 0.001796 |
| 上界値 | 487249 | 488301 | 491888 | 2436701 | 2437360 | 2432204 | 4875349 | 4880281 | 4868893 |
| M=8 GAの目的関数値 | 487189 | 487974 | 491551 | 2434039 | 2432744 | 2426087 | 4871080 | 4874317 | 4751544 |
| 上界値-GAの目的関数値 | 60 | 327 | 337 | 2662 | 4616 | 6117 | 4269 | 5964 | 117349 |
| 上界値とGAの目的関数値の相対誤差 | 0.000123 | 0.00067 | 0.000685 | 0.001092 | 0.001894 | 0.002515 | 0.000876 | 0.001222 | 0.024102 |

GAの世代数 < 20000

表2 制約許容量を変えた場合の上界値とGA解の与える近似値

M=8
N=1000
K=20

| α | 1 | 50 | 100 | 500 | 1000 | 5000 | 10000 | 20000 | 上界値 |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.300 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 0.307 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 0.340 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 6 | 6 | 6 | 4188083 |
| 0.350 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 4 | 2 | 3581392 | 4188083 |
| 0.400 | 8 | 8 | 8 | 7 | 3444529 | 2 | 3 | 1 | 4664107 |
| 0.450 | 8 | 8 | 8 | 3553801 | 3972854 | 4367680 | 4486006 | 4580036 | 4828470 |
| 0.460 | 8 | 8 | 8 | 3587111 | 4011203 | 4463998 | 4532552 | 4634603 | 4843487 |
| 0.470 | 8 | 8 | 8 | 2848717 | 3681469 | 4483573 | 4581288 | 4660657 | 4853694 |
| 0.480 | 7 | 2729962 | 2943712 | 3784566 | 4155262 | 4553295 | 4629358 | 4708519 | 4861082 |
| 0.490 | 8 | 2835559 | 3009508 | 3810289 | 4169522 | 4549958 | 4641548 | 4722342 | 4866034 |
| 0.500 | 2575642 | 2874829 | 3129376 | 3857493 | 4224636 | 4577812 | 4672293 | 4751544 | 4868893 |
| 0.505 | 2587510 | 2942571 | 3121591 | 3896836 | 4244692 | 4588344 | 4676918 | 4761622 | 4869661 |

実行不可能解
実行可能解は存在しない