

Title	RANKS AND EMBEDDINGS OF C^* -ALGEBRAS OF CONTINUOUS FIELDS (Free products in operator algebras and related topics)
Author(s)	須藤, 隆洋
Citation	数理解析研究所講究録 (2000), 1177: 26-36
Issue Date	2000-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/64506
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

RANKS AND EMBEDDINGS OF
C*-ALGEBRAS OF CONTINUOUS FIELDS

須藤 隆洋 (SUDO Takahiro) 琉球大理

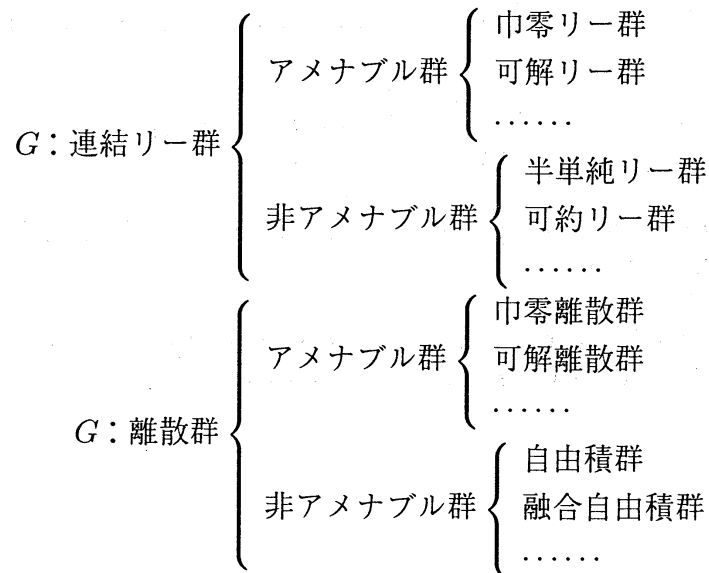
§0. 研究の動機 (MOTIVATION) など

次の問題が今回の講演の研究の動機である：

問題. 離散ハイゼンベルグ群 $H_3^{\mathbb{Z}}$ の C^* -群環 $C^*(H_3^{\mathbb{Z}})$ のステイブル・ランク (stable rank) を (群の言葉で) 計算せよ。つまり、記号では、 $\text{sr}(C^*(H_3^{\mathbb{Z}})) = ?$ となる。ただし、

$$H_3^{\mathbb{Z}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & l \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (l, m, n), \quad n, m, l \in \mathbb{Z} \right\}$$

この問題は、 $H_3^{\mathbb{Z}}$ を一般のリー群 G で置き換えたときの Rieffel の問題 [Rf1] の特殊な場合である。一般の (リー) 群 G の場合は、コンパクトのときは簡単で、 $\text{sr}(C^*(G)) = 1$ なので、非コンパクトとして、ラフに言うと、次のように場合分けされる：



Talk on June 6, 2000
2000 Mathematics Subject Classification. Primary 46L05, 46L80, 19K56
Key words and phrases. Stable rank, real rank, continuous field, Heisenberg group.

ただし、 G が非アメンブルのときは、 G の縮約 C^* -群環を考える。Rieffel の問題は、[ST1, 2] より巾零単連結リー群、I 型単連結可解リー群の場合は済みで、[Sd1,2,3] より I 型アメンブル連結リー群、I 型非アメンブル連結リー群の場合はほぼ済みで、[Sd4,5] より非 I 型可解リー群の重要な例である Mautner 群、Dixmier 群を含む特殊なリー半直積群の場合は済みである。一方、[DHR], [DH] より自由積群の場合は済みで、融合自由積群の場合は一部済みである。 $H_3^{\mathbb{Z}}$ はアメンブル巾零離散群であり、今回の研究結果は、アメンブル離散群の場合の Rieffel の問題への第一ステップと考えられる。

次に、 C^* -群環 $C^*(H_3^{\mathbb{Z}})$ は、連続場の C^* -環の構造をもつことを復習する。 $H_3^{\mathbb{Z}}$ は、上の行列とベクトルの同一視で、半直積 $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$ に同型なものと、フーリエ変換を用いて、 $C^*(H_3^{\mathbb{Z}})$ は、次の接合積に同型である：

$$C^*(H_3^{\mathbb{Z}}) \cong C^*(\mathbb{Z}^2) \rtimes \mathbb{Z} \cong C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}.$$

ただし、2-トーラス \mathbb{T}^2 上の \mathbb{Z} の作用 α は、

$$\alpha_n(w, z) = (w, w^n z) \quad w, z \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{Z}$$

このとき、各 $w \in \mathbb{T}$ に対して、 $\{w\} \times \mathbb{T}$ は α で不変で、特に $\{1\} \times \mathbb{T}$ は α で不動である。

従って、次の上への $*$ -準同型 π_w が定義できる：

$$\pi_w : C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \rightarrow C(\{w\} \times \mathbb{T}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \equiv \mathfrak{A}_w \cong \mathbb{T}_{\theta}^2$$

ただし、 $w = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in [0, 1]$ で、 \mathbb{T}_{θ}^2 は非可換 2-トーラス (=無理数回転環) である。さらに、次の \mathbb{T} 上の関数：

$$\hat{a} : \mathbb{T} \ni w \mapsto \pi_w(a) \in \mathfrak{A}_w$$

は \mathbb{T} 上の $\{\mathfrak{A}_w\}_{w \in \mathbb{T}}$ をファイバーとする C^* -環の連続場で、ノルム値関数 $w \mapsto \|\pi_w(a)\|$ は \mathbb{T} 上連続である。このとき次の同型対応がある：

$$C^*(H_3^{\mathbb{Z}}) \ni a \mapsto \hat{a} \in \Gamma(\mathbb{T}, \{\mathfrak{A}_w\}_{w \in \mathbb{T}}, \mathfrak{F})$$

ただし、右辺は \hat{a} 全体 (= \mathfrak{F} としてよい) で定義される連続場の C^* -環である (cf.[AP]).

一般には、底空間 (base space) として局所コンパクト、ハウスドルフ空間 X と、ファイバーとして C^* -環の族 $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}$ と、 X 上の C^* -環の連続場の適当な族 \mathfrak{F} (各点の代数演算で閉じていて、各点の局所収束でも閉じている) を与えると、(無限遠で消える) 連続場の C^* -環 $\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})$ が定義できる (cf.[Dx]).

この連続場の C^* -環は、ファイバー空間のファイバーを、一般に非可換の C^* -環にした、ある非可換ファイバー空間の無限遠で消えるノルム値連続断面全体とみなせるが、次の意味での局所自明性は一般にはない：連続場の C^* -環の底空間の適当な開近傍 W への制限は、テンソル積 $C_0(W) \otimes \mathfrak{A}_w$, $w \in W$ に同型である。ちなみに、各ファイバーが、同次的 (homogeneous) C^* -環の場合は、その連続場の C^* -環は局所自明性をもつ。しかしながら、 $C^*(H_3^{\mathbb{Z}})$ の場合は、局所自明性がまったくなく、これ以上の解析は、不能であると思われる、そのランクの計算は、これまで成されてなかった。

§1. 主結果

次の命題が、今回の研究の鍵 (キー) である：

命題. *Let X be a locally compact Hausdorff space and $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}$ a family of C^* -algebras \mathfrak{A}_t . Then $\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})$ is a quotient of a C^* -subalgebra of $\bigoplus_{t \in X}^{c_0} C_0(X, \mathfrak{A}_t)$.*

ただし、 $\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})$ は、適当な C^* -環の連続場 \mathfrak{F} に附随する連続場の C^* -環で、 $C_0(X, \mathfrak{A}_t)$ は、 X から \mathfrak{A}_t への無限遠で消える連続関数全体のなす C^* -環で、 $\bigoplus_{t \in X}^{c_0}$ は (位的) 制限直和である。すなわち、 $(a_t)_{t \in X}$ をこの直和の元とすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある X のコンパクト集合 C が存在して、 $\|a_t\| < \varepsilon$, $t \in X \setminus C$ が成り立つ。この命題の証明のキーは、連続場の C^* -環を拡大し、上の制限直和に埋め込むことである。実際、次の拡大を考える：

$$\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F}) \ni f \mapsto \tilde{f} \in \bigoplus_{t \in X}^{\text{co}} C_0(X, \mathfrak{A}_t),$$

$$\tilde{f}(\cdot, t) \in C_0(X, \mathfrak{A}_t), \quad \tilde{f}(t, t) = f(t) \in \mathfrak{A}_t.$$

拡大の仕方は一意的ではなく、全ての f に対して、このような拡大全ての集合を \mathfrak{B} とおくと、 $\bigoplus_{t \in X}^{\text{co}} C_0(X, \mathfrak{A}_t)$ の部分 C^* -環になる。このとき、次が成り立つ：

定理 1. *Let X be a locally compact Hausdorff space and $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}$ a family of C^* -algebras \mathfrak{A}_t . Then we have that*

$$\begin{cases} \text{sr}(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})) \leq \sup_{t \in X} \text{sr}(C_0(X, \mathfrak{A}_t)), \\ \text{RR}(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})) \leq \sup_{t \in X} \text{RR}(C_0(X, \mathfrak{A}_t)), \\ \text{csr}(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})) \leq \sup_{t \in X} (\text{csr}(C_0(X, \mathfrak{A}_t)) \vee \text{sr}(C_0(X, \mathfrak{A}_t))). \end{cases}$$

ただし、 $\text{sr}(\cdot)$, $\text{RR}(\cdot)$, $\text{csr}(\cdot)$ はそれぞれステイブル・ランク、リアル・ランク (*real rank*), 連結ステイブル・ランク (*connected stable rank*) を意味し、 \vee は最大値を意味する。

証明の概略. 上で定義した C^* -環 \mathfrak{B} から $\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})$ の上への $*$ -準同型が自然にあるので、

$$\text{sr}(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})) \leq \text{sr}(\mathfrak{B}), \quad \text{RR}(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})) \leq \text{RR}(\mathfrak{B})$$

が成り立つ。さらに、ランク特有の細かい議論より次を証明する：

$$\text{sr}(\mathfrak{B}) \leq \sup_{t \in X} \text{sr}(C_0(X, \mathfrak{A}_t)), \quad \text{RR}(\mathfrak{B}) \leq \sup_{t \in X} \text{RR}(C_0(X, \mathfrak{A}_t)).$$

連結ステイブル・ランクの評価式は、連結ステイブル・ランクの基本事実 ([Rf1], [Eh1])

と上のステイブル・ランクの評価式を示す際の議論を使う。細かい証明に興味ある読者は、[Sd7] を参照せよ。□

注意. 逆の不等式として、次が成り立つ：

$$\begin{cases} \text{sr}(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})) \geq \sup_{t \in X} \text{sr}(\mathfrak{A}_t), \\ \text{RR}(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})) \geq \sup_{t \in X} \text{RR}(\mathfrak{A}_t), \end{cases}$$

望ましい新事実として、次を述べたが、一般には間違いのようである。

$$\text{csr}(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})) \geq \sup_{t \in X} \text{csr}(\mathfrak{A}_t).$$

ここでお詫びしたい。間違いは、 $\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})$ から \mathfrak{A}_t への上への写像が分裂して
る (split) と勘違いした所でした (分裂してる場合は上の不等式は正しい)。反例として、
 $C_0(\mathbb{R}^2) = C_0(\mathbb{R}, C_0(\mathbb{R}))$ より、 $\mathfrak{A}_t = C_0(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$ とすると、

$$\text{csr}(C_0(\mathbb{R}^2)) = 1 < \text{csr}(C_0(\mathbb{R})) = 2.$$

さらに、次の完全列：

$$0 \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow C_0(\mathbb{R}) \rightarrow 0$$

が分裂すると仮定すると、 K_0 群の完全列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

が従うはずであるが、これは矛盾である。

一方、次が成り立つ：

定理 2. X を局所コンパクト、ハウスドルフ空間とし、 $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}$ を C^* -環の族とする。このとき連続場の C^* -環 $\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})$ は、(フル) 直和 $\bigoplus_{t \in X} (C^b(X) \otimes \mathfrak{A}_t)$ に埋め込み可能である。ただし、 $C^b(X)$ は、 X 上の有界連続関数全体のなす C^* -環である。

証明の概略. 次の埋め込み (embedding) を考える：

$$\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F}) \ni f \mapsto \{1 \otimes f(t)\}_{t \in X} \in \bigoplus_{t \in X} (C^b(X) \otimes \mathfrak{A}_t).$$

□

定理 1 の証明と同様にして、次が成り立つ：

定理 3. Let X be a locally compact Hausdorff space and $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}$ a family of C^* -algebras \mathfrak{A}_t . Then we have that

$$\begin{cases} \text{sr}(\Gamma^b(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})) \leq \sup_{t \in X} \text{sr}(C^b(X) \otimes \mathfrak{A}_t), \\ \text{RR}(\Gamma^b(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})) \leq \sup_{t \in X} \text{RR}(C^b(X) \otimes \mathfrak{A}_t), \\ \text{csr}(\Gamma^b(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})) \leq \sup_{t \in X} (\text{csr}(C^b(X) \otimes \mathfrak{A}_t) \vee \text{sr}(C^b(X) \otimes \mathfrak{A}_t)). \end{cases}$$

ただし、 $\Gamma^b(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})$ は、有界な連続場の C^* -環である。

注意. 各 \mathfrak{A}_t が単位元 1_t を持ち、 \mathfrak{F} が (局所) 単位連続場 $t \mapsto 1_t$ を含めば、

$$M(\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})) \cong \Gamma^b(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})$$

ただし、左辺は、連続場の C^* -環の multiplier.

§2. 応用

まず最初に、以下で使うランクの公式をあげておく。

(F1): C^* 環の完全列 $0 \rightarrow \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{J} \rightarrow 0$ に対して、

$$\begin{cases} \text{sr}(\mathfrak{J}) \vee \text{sr}(\mathfrak{A}/\mathfrak{J}) \leq \text{sr}(\mathfrak{A}) \leq \text{sr}(\mathfrak{J}) \vee \text{sr}(\mathfrak{A}/\mathfrak{J}) \vee \text{csr}(\mathfrak{A}/\mathfrak{J}), \\ \text{csr}(\mathfrak{A}/\mathfrak{J}) \leq \text{csr}(\mathfrak{A}) \vee \text{sr}(\mathfrak{A}), \quad \text{csr}(\mathfrak{A}) \leq \text{csr}(\mathfrak{J}) \vee \text{csr}(\mathfrak{A}/\mathfrak{J}), \\ \text{RR}(\mathfrak{J}) \vee \text{RR}(\mathfrak{A}/\mathfrak{J}) \leq \text{RR}(\mathfrak{A}) \leq \text{RR}(\mathfrak{J}) \vee \text{RR}(\mathfrak{A}/\mathfrak{J}), \end{cases}$$

ただし、 \vee は最大値。 ([Rf1], [Sh], [Eh1,2], [NOP]).

(F2): X をコンパクト、ハウスドルフ空間として、[Rf1], [Ns1], [BP] により、

$$\begin{cases} \text{sr}(C(X)) = [\dim X/2] + 1 \equiv \dim_{\mathbb{C}} X, \\ \text{csr}(C(X)) \leq [(\dim X + 1)/2] + 1, \quad \text{RR}(C(X)) = \dim X, \end{cases}$$

ただし、 $\dim X$ は X の被覆次元で、 $[x]$ は x 以下の最大の整数を意味する。

(F3): C^* 環 \mathfrak{A} 上の n 次の行列環 $M_n(\mathfrak{A})$ について、[Rf1], [Rf2], [BE] により、

$$\begin{cases} \text{sr}(M_n(\mathfrak{A})) = \{(\text{sr}(\mathfrak{A}) - 1)/n\} + 1, \quad \text{csr}(M_n(\mathfrak{A})) \leq \{(\text{csr}(\mathfrak{A}) - 1)/n\} + 1, \\ \text{RR}(M_n(C(X))) = \{\dim X/(2n - 1)\}, \end{cases}$$

ただし、 $\{x\}$ は x 以上の最小の整数である。

(F4): \mathbb{K} を可算無限次元のヒルベルト空間上のコンパクト作用素全体の C^* 環とする。

このとき、

$$\begin{cases} \text{sr}(\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}) = \text{sr}(\mathfrak{A}) \wedge 2, & \text{csr}(\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}) \leq \text{csr}(\mathfrak{A}) \wedge 2, \\ \text{RR}(\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}) = \text{RR}(\mathfrak{A}) \wedge 1 \end{cases}$$

ただし、 \wedge は最小値を意味する。[Rf1], ([Sh], [Ns1], [Rf2]), ([BE], [BP]) をそれぞれ参照。

さて、階数 $(2n+1)$ の離散ハイゼンベルグ群 $H_{2n+1}^{\mathbb{Z}}$ は次で定義される：

$$H_{2n+1}^{\mathbb{Z}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & l \\ & 1_n & m^t \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = (l, m, n) : n, m \in \mathbb{Z}^n, l \in \mathbb{Z} \right\}$$

ただし、 1_n は n 次単位行列で、 m^t は、 m の転置である。上の行列とベクトルの同一視より、 $H_{2n+1}^{\mathbb{Z}}$ は半直積 $\mathbb{Z}^{n+1} \rtimes \mathbb{Z}^n$ に同型である。

上の定理 1 を主に用いて、

定理 4. $H_{2n+1}^{\mathbb{Z}}$ を階数 $(2n+1)$ の離散ハイゼンベルグ群とし、 $C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{Z}})$ をその C^* -群環とする。このとき、

$$\begin{cases} \text{sr}(C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{Z}})) = n+1 = \dim_{\mathbb{C}}(\hat{H}_{2n+1}^{\mathbb{Z}})_1, \\ 2 \leq \text{csr}(C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{Z}})) \leq n+1, \\ \text{RR}(C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{Z}})) = 2n = \dim(\hat{H}_{2n+1}^{\mathbb{Z}})_1. \end{cases}$$

ただし、 $(\hat{H}_{2n+1}^{\mathbb{Z}})_1$ は、 $H_{2n+1}^{\mathbb{Z}}$ の 1 次元表現全体の空間である。

証明の概略. §0 の $n=1$ の場合を参考にして、次が成り立つ：

$$C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{Z}}) \cong C^*(\mathbb{Z}^{n+1}) \rtimes \mathbb{Z}^n \cong C(\mathbb{T}^{n+1}) \rtimes \mathbb{Z}^n \cong \Gamma(\mathbb{T}, \{\otimes^n \mathfrak{A}_w\}_{w \in \mathbb{T}})$$

ただし、 \otimes^n は n 重テンソル積である。定理 1 を直接用いて、

$$\begin{cases} \text{sr}(C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{Z}})) \leq \sup_{w \in \mathbb{T}} \text{sr}(C(\mathbb{T}, \otimes^n \mathfrak{A}_w)), \\ \text{csr}(C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{Z}})) \leq \sup_{w \in \mathbb{T}} (\text{csr}(C(\mathbb{T}, \otimes^n \mathfrak{A}_w)) \vee \text{sr}(C(\mathbb{T}, \otimes^n \mathfrak{A}_w))), \\ \text{RR}(C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{Z}})) \leq \sup_{w \in \mathbb{T}} \text{RR}(C(\mathbb{T}, \otimes^n \mathfrak{A}_w)). \end{cases}$$

さらに、 $w = 1$ のとき、

$$\begin{cases} \text{sr}(C(\mathbb{T}^{2n+1})) = n + 1, & \text{csr}(C(\mathbb{T}^{2n+1})) = n + 2, \\ \text{RR}(C(\mathbb{T}^{2n+1})) = 2n + 1, \end{cases}$$

$w \neq 1$ のとき、 w によって、 \mathfrak{A}_w が単純 AT 環か、同次的 C^* 環であることより、

$$\begin{cases} \text{sr}(C(\mathbb{T}, \otimes^n \mathfrak{A}_w)) \leq 2, & \text{csr}(C(\mathbb{T}, \otimes^n \mathfrak{A}_w)) \leq 2, \\ \text{RR}(C(\mathbb{T}, \otimes^n \mathfrak{A}_w)) \leq 1. \end{cases}$$

がわかる (cf. [EE], [Rf1]).

よりシャープなランク評価式を得るために、次の可換図式を考える：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{J} & \longrightarrow & C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & C(\mathbb{T}^{2n}) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{J} & \longrightarrow & M(\mathfrak{J}) & \longrightarrow & M(\mathfrak{J})/\mathfrak{J} \longrightarrow 0 \end{array}$$

ただし、 $\mathfrak{J} = C_0((\mathbb{T} \setminus \{1\}) \times \mathbb{T}^n) \rtimes \mathbb{Z}^n$ で、 $M(\mathfrak{J}) \cong \Gamma^b(\mathbb{T} \setminus \{1\}, \{\mathfrak{A}_w\}_{w \in \mathbb{T} \setminus \{1\}}, \mathfrak{F})$ が成り立

つ。このとき、[NOP, Proposition 1.6] と定理 3 と上の評価式を用いて、

$$\begin{aligned} \text{sr}(C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{Z}})) &\leq \text{sr}(C(\mathbb{T}^{2n})) \vee \text{sr}(M(\mathfrak{J})) \\ &\leq (n + 1) \vee \sup_{w \in \mathbb{T} \setminus \{1\}} \text{sr}(C^b(\mathbb{T} \setminus \{1\}) \otimes \mathfrak{A}_w) \leq n + 1, \\ \text{RR}(C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{Z}})) &\leq \text{RR}(C(\mathbb{T}^{2n})) \vee \text{RR}(M(\mathfrak{J})) \\ &\leq (2n) \vee \sup_{w \in \mathbb{T} \setminus \{1\}} \text{RR}(C^b(\mathbb{T} \setminus \{1\}) \otimes \mathfrak{A}_w) \leq 2n. \end{aligned}$$

ここで、 $C^b(\mathbb{T} \setminus \{1\}) \cong C(\beta(\mathbb{T} \setminus \{1\}))$, $\dim \beta(\mathbb{T} \setminus \{1\}) = \dim \mathbb{T}$ がなりたつことに注意す

る。一方、(F1) と定理 3 より、

$$\begin{aligned} \text{csr}(C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{Z}})) &\leq \text{csr}(C(\mathbb{T}^{2n})) \vee \text{csr}(\mathfrak{J}) \\ &\leq (n + 1) \vee \sup_{w \in \mathbb{T} \setminus \{1\}} (\text{csr}(C_0(\mathbb{T} \setminus \{1\}) \otimes \mathfrak{A}_w) \vee \text{sr}(C_0(\mathbb{T} \setminus \{1\}) \otimes \mathfrak{A}_w)) \leq n + 1. \end{aligned}$$

□

$H_{2n+1}^{\mathbb{Z}}$ の定義において、 \mathbb{Z} を \mathbb{R} で置き換えると、実 $(2n + 1)$ 次元のハイゼンベルグ・

リー群 $H_{2n+1}^{\mathbb{R}}$ が定義できる。このとき、定理 4 と同様の論法で、次が計算される：

定理 5. $H_{2n+1}^{\mathbb{R}}$ を実 $(2n+1)$ 次元ハイゼンベルグ・リー群とし、 $C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{R}})$ をその C^* -群環とする。このとき、

$$\begin{cases} \text{sr}(C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{R}})) = n+1 = \dim_{\mathbb{C}}(\hat{H}_{2n+1}^{\mathbb{R}})_1, \\ 2 \leq \text{csr}(C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{R}})) \leq n+1, \\ \text{RR}(C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{R}})) = 2n = \dim(\hat{H}_{2n+1}^{\mathbb{R}})_1. \end{cases}$$

注意. C^* -群環 $C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{R}})$ は、次に同型である：

$$C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{R}}) \cong C^*(\mathbb{R}^{n+1}) \rtimes \mathbb{R}^n \cong C_0(\mathbb{R}^{n+1}) \rtimes \mathbb{R}^n \cong \Gamma_0(\mathbb{R}, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in \mathbb{R}})$$

ただし、 $\mathfrak{A}_0 = C_0(\mathbb{R}^{2n})$ で、 $t \neq 0$ に対して、 $\mathfrak{A}_t = \mathbb{K}$.

一方、定理 2 と [Pm] を用いて、

定理 6. C^* -群環 $C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{Z}})$, $C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{R}})$ は、有限次元 C^* -環の適当な帰納極限に埋め込み可能である。

さらに、次がなりたつ：

定理 7. 各 \mathfrak{A}_t が同次的 C^* -環の帰納極限ならば、連続場の C^* -環 $\Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X}, \mathfrak{F})$ は、同次的 C^* -環の適当な帰納極限に埋め込み可能である。

別の応用として、次が成り立つ。

定理 8. \mathfrak{A} を C^* -環とし、その既約ユニタリ表現の同値類の空間、スペクトル $\hat{\mathfrak{A}}$ がハウスドルフ空間とする。このとき、

$$\begin{cases} \text{sr}(\mathfrak{A}) \leq \dim_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{A}}^+, & \text{csr}(\mathfrak{A}) \leq [(\dim \hat{\mathfrak{A}}^+ + 1)/2] + 1, \\ \text{RR}(\mathfrak{A}) \leq \dim \hat{\mathfrak{A}}^+. \end{cases}$$

ただし、 $\hat{\mathfrak{A}}^+$ は、 $\hat{\mathfrak{A}}$ の一点コンパクト化である。

証明. 仮定より、 $\mathfrak{A} \cong \Gamma_0(\hat{\mathfrak{A}}, \{\pi(\mathfrak{A})\}_{\pi \in \hat{\mathfrak{A}}})$. ただし、 $\pi(\mathfrak{A}) \cong \mathbb{K}$ or $M_n(\mathbb{C})$ ($n \geq 1$). さらに

定理 1 を直に適用する。□

注意. $\mathfrak{A} = \Gamma_0(X, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in X})$ とし、 \mathfrak{A}_t は AF 環 (有限次元 C^* 環の帰納極限)、 $\dim X \leq 1$ とすると、 $\hat{\mathfrak{A}}$ は一般にハウスドルフ空間ではないが、定理 1 を用いると、

$$\begin{cases} \text{sr}(\mathfrak{A}) = 1, & \text{csr}(\mathfrak{A}) = 1 \text{ or } 2, \\ \text{RR}(\mathfrak{A}) = 0 \text{ or } 1. \end{cases}$$

また、 X が可縮ならば、 X の次元に関係なく、 $\text{csr}(\mathfrak{A}) = 1$ 。また、 $\dim X = 0$ ならば、 $\text{RR}(\mathfrak{A}) = 0$ が成り立つ。

REFERENCES

- [APT] C.A. Akemann, G.K. Pedersen and J. Tomiyama, *Multipliers of C^* -algebras*, J. Funct. Anal. **13** (1973), 277–301.
- [AP] J. Anderson and W. Paschke, *The rotation algebra*, Houston J. Math. **15** (1989), 1–26.
- [BE] E.J. Beggs and D.E. Evans, *The real rank of algebras of matrix valued functions*, Internat. J. Math. **2** (1991), 131–138.
- [Bl] B. Blackadar, *K -theory for Operator Algebras*, Second Edition, Cambridge, 1998.
- [BDR] B. Blackadar, M. Dădărlat and M. Rørdam, *The real rank of inductive limit C^* -algebras*, Math. Scand. **69** (1991), 211–216.
- [BP] L.G. Brown and G.K. Pedersen, *C^* -algebras of real rank zero*, J. Funct. Anal. **99** (1991), 131–149.
- [DNNP] M. Dădărlat, G. Nagy, A. Némethi and C. Pasnicu, *Reduction of topological stable rank in inductive limits of C^* -algebras*, Pacific J. Math. **153** (1992), 267–276.
- [Dv] K.R. Davidson, *C^* -algebras by Example*, Fields Institute Monographs, AMS, 1996.
- [Dx] J. Dixmier, *C^* -algebras*, North-Holland, 1962.
- [DHR] K.J. Dykema, U. Haagerup and M. Rørdam, *The stable rank of some free product C^* -algebras*, Duke. Math. J. **90** (1997), 95–121, errata 94 (1998).
- [DH] K.J. Dykema and P. de la Harpe, *Some groups whose reduced C^* -algebras have stable rank one*, J. Math. Pures Appl. **78** (1999), 591–608.
- [Eh1] N. Elhage Hassan, *Rangs stables de certaines extensions*, J. London Math. Soc. **52** (1995), 605–624.
- [Eh2] ———, *Rang réel de certaines extensions*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 3067–3073.
- [EE] G.A. Elliott and D.E. Evans, *The structure of the irrational rotation C^* -algebra*, Ann. Math. **138** (1993), 477–501.
- [F] J.M.G. Fell, *The structure of algebras of operator fields*, Acta Math. **106** (1961), 233–280.
- [Le1] R. Lee, *On the C^* -algebras of operator fields*, Indiana Univ. Math. J. **25** (1976), 303–314.
- [Le2] ———, *Full algebras of operator fields trivial except at one point*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), 351–372.
- [Mt] K. Matsumoto, *Non-commutative three dimensional spheres*, Japan. J. Math. **17** (1991), 333–356.
- [MT] K. Matsumoto and J. Tomiyama, *Non-commutative lens spaces*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 13–41.
- [Mp] G.J. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, 1990.
- [Ng] K. Nagami, *Dimension Theory*, Academic Press, New York-London, 1970.
- [NOP] M. Nagisa, H. Osaka and N.C. Phillips, *Ranks of algebras of continuous C^* -algebra valued functions*, Preprint.
- [Ns1] V. Nistor, *Stable range for tensor products of extensions of \mathcal{K} by $C(X)$* , J. Operator Theory **16** (1986), 387–396.

- [Ns2] ———, *Stable rank for a certain class of type I C^* -algebras*, J. Operator Theory **17** (1987), 365–373.
- [Os1] H. Osaka, *Counterexamples for Brown-Pedersen's conjecture in " C^* -algebras of real rank zero"*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 495–497.
- [Os2] ———, *Real rank of crossed products by connected compact groups*, Bull. London Math. Soc. **27** (1995), 257–264.
- [Pd] G.K. Pedersen, *C^* -Algebras and their Automorphism Groups*, Academic Press, London-New York-San Francisco, 1979.
- [Pm] M. Pimsner, *Embedding some transformation group C^* -algebras into AF-algebras*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **3** (1983), 613–626.
- [Rf1] M.A. Rieffel, *Dimension and stable rank in the K -theory of C^* -algebras*, Proc. London Math. Soc. **46** (1983), 301–333.
- [Rf2] ———, *The homotopy groups of the unitary groups of non-commutative tori*, J. Operator Theory **17** (1987), 237–254.
- [Sh] A.J-L. Sheu, *A cancellation theorem for projective modules over the group C^* -algebras of certain nilpotent Lie groups*, Canad. J. Math. **39** (1987), 365–427.
- [Sd1] T. Sudo, *Stable rank of the reduced C^* -algebras of non-amenable Lie groups of type I*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3647–3654.
- [Sd2] ———, *Stable rank of the C^* -algebras of amenable Lie groups of type I*, Math. Scand. **84** (1999), 231–242.
- [Sd3] ———, *Dimension theory of group C^* -algebras of connected Lie groups of type I*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 583–590.
- [Sd4] ———, *Structure of group C^* -algebras of Lie semi-direct products $\mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{R}$* , Preprint.
- [Sd5] ———, *Structure of group C^* -algebras of the generalized Dixmier groups*, Preprint.
- [Sd6] ———, *Stable rank of crossed products by \mathbb{R} or \mathbb{T}* , Preprint.
- [Sd7] ———, *Ranks and embeddings of C^* -algebras of continuous fields*, Preprint.
- [ST1] T. Sudo and H. Takai, *Stable rank of the C^* -algebras of nilpotent Lie groups*, Internat. J. Math. **6** (1995), 439–446.
- [ST2] ———, *Stable rank of the C^* -algebras of solvable Lie groups of type I*, J. Operator Theory **38** (1997), 67–86.
- [Tm1] J. Tomiyama, *Invitation to C^* -algebras and topological dynamics*, World Scientific, 1987.
- [Tm2] ———, *The interplay between topological dynamics and theory of C^* -algebras*, Lecture notes series, vol. 2, Seoul National Univ., 1994.
- [TT] J. Tomiyama and M. Takesaki, *Applications of fibre bundles of the certain class of C^* -algebras*, Tôhoku Math. J. **13** (1963), 498–523.
- [Wo] N.E. Wegge-Olsen, *K -theory and C^* -algebras*, Oxford Univ. Press, 1993.

903-0213 沖縄県中頭郡西原町千原一番地 琉球大学 理学部 数理科学科

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF THE RYUKYUS,
NISHIHARA-CHO, OKINAWA 903-0213, JAPAN.

E-mail address: sudo@math.u-ryukyu.ac.jp