

Title	$\mathbb{L}^2$ -torsion of 3-manifolds (Recent Progress Towards the Volume Conjecture)
Author(s)	北野, 晃朗; 高沢, 光彦; 森藤, 孝之
Citation	数理解析研究所講究録 (2000), 1172: 8-33
Issue Date	2000-09
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/64432">http://hdl.handle.net/2433/64432</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

# $L^2$ -torsion of 3-manifolds

北野晃朗\* (東京工業大学)    高沢光彦 (東京工業大学)  
森藤孝之† (東京大学)

2000 年 7 月 20 日

## 目次

<b>1</b>	<b>序章</b>	<b>2</b>
1.1	はじめに . . . . .	2
1.2	お礼の言葉 . . . . .	3
<b>2</b>	<b><math>L^2</math>-torsion</b>	<b>4</b>
2.1	諸定義 . . . . .	4
2.2	基本的性質 . . . . .	6
2.3	$L^2$ -torsion の計算例 . . . . .	8
<b>3</b>	<b><math>S^1</math> 上の曲面束の <math>L^2</math>-torsion</b>	<b>11</b>
3.1	降中心化列から定まる $L^2$ -torsion . . . . .	11
3.2	動機 . . . . .	13
3.3	Lück の公式 . . . . .	13
3.4	写像類群の Magnus 表現 . . . . .	15
<b>4</b>	<b>具体例</b>	<b>17</b>
4.1	$S^1$ 上のトーラス束 . . . . .	17
4.2	第一近似 $\rho_1$ について . . . . .	17
4.3	第二近似 $\rho_2$ について . . . . .	19
<b>5</b>	<b>今後の課題</b>	<b>20</b>

---

\*住友財団より援助

†日本学術振興会特別研究員 (PD), 風樹会より援助

# 1 序章

## 1.1 はじめに

Reidemeister torsion と呼ばれる単純ホモトピー不変量は、レンズ空間の分類を目的として Reidemeister, Franz らによって 1930 年代に導入されました。その後、1970 年代に Ray-Singer によって、解析的類似を使って、解析的な不変量である analytic torsion が定義されました。Reidemeister torsion は単体分割、あるいは、より一般に胞体分割による局所係数 (コ) ホモロジーを使って定義され、一方で、analytic torsion は、多様体の距離と平坦ベクトル束の内積を使い定義される解析的ラプラシアンにより定義されます。1970 年代の終わりに Cheeger と Müller によって、独立に、この 2 つの torsion は適当な条件の下で、等しい事が証明されました。

その後、モースの不等式の一般化に関する研究 [16, 17]、そして、リーマン多様体上の等長的な有限群の作用に関する torsion の研究を経て、 $L^2$ -analytic torsion が Lott [8]、Mathai [14] らによって定義されました。これは有限次元平坦ベクトル束に対する Ray-Singer の analytic torsion の無限次元平坦ヒルベルト加群束への拡張と言う事ができます。特に [8] では、定義と同時に 3 次元閉双曲的多様体に対しては、 $L^2$ -analytic torsion が双曲的体積の  $-\frac{1}{3\pi}$  倍と一致する事が示されています。その後、一般の奇数次元の双曲的多様体に対しても、同様の結果が成り立つ事が示されています。これらについては [7, 12] を参照して下さい。

一方で、元々の組み合わせ的な Reidemeister torsion に対応する組み合わせ的な  $L^2$ -combinatorial torsion も Carey-Mathai, Lück らによって、[2, 10] において、 $L^2$ -analytic torsion とほぼ同時期に定義されました。

当然、両者が定義された時から、Cheeger-Müller の結果の  $L^2$ -torsion 版が成り立つかという事は問題とされました。まず、Burghela-Friedlander-Kappeler-McDonald [1] により、閉リーマン多様体に対して正しい事が証明されました。後に、Hess-Schick [7] によってカスプを持つ体積有限な双曲多様体に対しても  $L^2$ -analytic torsion が拡張され、2 つの torsion が一致する事が証明されています。

この論説の中では、これらの事実を踏まえて 2 つの torsion を区別せずに、単に  $L^2$ -torsion と呼ぶ事にします。但し、定義としては組み合わせ的な方を採用します。そして興味の対象は 3 次元多様体です。この場合  $L^2$ -torsion は後で述べる Lück の仕事によって、理論的には基本群の表示から求まる量で

す。古典的な Mostow の剛性定理より、基本群はその多様体の体積を知っています。それを具体的に取り出す一つの方法を  $L^2$ -torsion は与えているという事ができます。もちろん実際に計算を実行するという意味では、これは決して容易ではありません。

以下では、 $L^2$ -torsion の組み合わせ的定義、基本的な性質に関して述べた後、組み合わせ的な  $L^2$ -torsion を使った双曲的多様体の体積のより計算可能な近似列を構成する一つの試みとその数値実験の結果を紹介します。

この論説は、2000年3月14日～17日に国際高等研究所で行われた数理解析研究所短期共同研究「Volume Conjecture の現状」での北野-森藤の講演内容を整理し、高沢による計算機を使った数値実験の結果を付け加えたものです。

## 1.2 お礼の言葉

$L^2$ -torsion の事を私達に引き合わせ、3月の高等研での研究集会で  $L^2$ -torsion のサーベイをする機会を与えて下さった村上斉氏、結び目群の剰余冪零性についていろいろと教えて下さった小島定吉氏、著者の一人(北野)が4月に Toulouse に滞在した際に、色々有意義な議論をしてくれた M. Boileau 氏、M. Kapovich 氏に感謝いたします。また、本稿執筆の仕上げの段階で有益な助言をして下さった古田幹雄氏にお礼申しあげます。

## 2 $L^2$ -torsion

この章では、組み合わせ的な  $L^2$ -torsion の定義及びその基本的性質について必要な範囲で復習します。詳しくは、論文 [10] をご覧ください。

### 2.1 諸定義

$\pi$  を群とし、 $\pi$  の  $\mathbb{C}$  上の群環を  $\mathbb{C}\pi$  で表します。 $\mathbb{C}\pi$  の元  $\sum_{g \in \pi} \lambda_g \cdot g$  に対して、その  $\mathbb{C}\pi$ -跡を単位元  $e \in \pi$  の係数

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{C}\pi} \left( \sum_{g \in \pi} \lambda_g \cdot g \right) = \lambda_e \in \mathbb{C}$$

で定めます。次に、行列  $B = (b_{ij}) \in M(n, \mathbb{C}\pi)$  に対して、その  $\mathbb{C}\pi$ -跡を対角成分毎の  $\mathbb{C}\pi$ -跡の和

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{C}\pi}(B) = \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}_{\mathbb{C}\pi}(b_{ii})$$

で定めます。このとき、行列  $B \in M(n, \mathbb{C}\pi)$  の  $L^2$ -ベッチ数を次式で定義します:

$$b(B) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathrm{tr}_{\mathbb{C}\pi} \left( (1 - K^{-2} \cdot BB^*)^p \right) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

ここで、 $K$  は  $B$  の右作用から決まる有界  $\pi$ -同変作用素

$$R_B : \oplus_{i=1}^n l^2(\pi) \rightarrow \oplus_{i=1}^n l^2(\pi)$$

の作用素ノルム  $\|R_B\|_\infty$  に対して、 $K \geq \|R_B\|_\infty$  を満たす任意の実数であり、 $B^*$  は行列  $B$  の随伴行列を表します。ただし、随伴は

$$B^* = (\overline{b_{ji}}), \quad \overline{\sum \lambda_g \cdot g} = \sum \overline{\lambda_g} \cdot g^{-1}$$

を意味するものとします。

次に、行列  $B$  の Fuglede-Kadison 行列式を

$$\det(B) = K^{(n-b(B))} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left( \mathrm{tr}_{\mathbb{C}\pi} \left( (1 - K^{-2} \cdot BB^*)^p \right) - b(B) \right) \right)$$

で定めます。

**注意 2.1**  $L^2$ -ベッチ数  $b(B)$  及び Fuglede-Kadison 行列式  $\det(B)$  は、定数  $K \geq \|R_B\|_\infty$  の選び方によらないことがわかります。 $K$  の一つの選び方として、

$$K = \sqrt{n} \cdot \max\{\|b_{ij}\|_1 \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

が取れます。ただし、 $\|u\|_1 = \sum_{g \in \pi} |\lambda_g|$  ( $u = \sum_{g \in \pi} \lambda_g \cdot g \in \mathbb{C}\pi$ ) と定めます。

さて、(組み合わせ)  $L^2$ -torsion は以下の 2 条件を満たす有限 CW-複体  $X$  に対して定義されます:

- (i) 全ての  $L^2$ -ベッチ数  $b_p(X)$  が自明。
- (ii) 全ての Novikov-Shubin 不変量  $\alpha_p(X)$  が正の実数。

このような  $X$  を admissible であるといいます。Novikov-Shubin 不変量  $\alpha_p(X)$  の定義については、文献 [9, 10, 16] を参照して下さい。

例えば、向きのついたコンパクト連結多様体  $M$  が以下の (1) ~ (3) のいずれかの条件を満たせば、admissible となることが知られています [4, 9, 10]。

(1)  $M$  が 3 次元多様体であって、かつ次の (i) ~ (iv) を満たす:

- (i)  $\pi_1 M$  が無限群。
- (ii)  $M$  は既約な 3 次元多様体または  $S^1 \times S^2$  または  $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$  にホモトピー同値。
- (iii)  $\partial M \neq \emptyset$  ならば、 $\partial M$  はトーラスからなる。
- (iv)  $\partial M = \emptyset$  ならば、 $M$  は双曲的またはザイフェルトまたはハーケン多様体にホモトピー同値な 3 次元多様体で finitely cover される。

(2) 軌道から  $M$  への inclusion が基本群の単射を誘導する自由な  $S^1$  作用をもつ。

(3)  $M$  は奇数次元の閉双曲多様体。

以下、 $M$  はコンパクトで向きのついた既約 3 次元多様体で  $\partial M$  が非圧縮トーラスから成るものとします。

$M$  の普遍被覆  $\widetilde{M}$  の  $\mathbb{C}\pi_1 M$ -鎖複体  $C_*(\widetilde{M}; \mathbb{C}\pi_1 M)$  を考えます:

$$0 \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0.$$

このとき、境界作用素  $\partial_i$  は  $\mathbb{C}\pi_1 M$  係数の行列として表示されることとなります。そこで、 $i$  番目の (組み合わせ) ラプラス作用素  $\Delta_i : C_i \rightarrow C_i$  を

$$\Delta_i = \partial_{i+1} \circ \partial_{i+1}^* + \partial_i^* \circ \partial_i$$

で定義します。このとき、 $M$  の (組み合わせ)  $L^2$ -torsion  $\rho(M)$  は古典的な Reidemeister torsion の一般化として次のように定義されます。ただし、古典的な場合には有限次元ユニタリ表現を考えましたが、ここでは正則表現  $l^2(\pi)$  を用いることとなります。

### 定義 2.1

$$\rho(M) = \prod_{i=0}^3 \det(\Delta_i)^{(-1)^{i+1}i}.$$

注意 2.2 非連結のときは、連結成分ごとの  $\rho$  たちの積で定義します。

## 2.2 基本的性質

この節では、 $L^2$ -torsion の基本的かつ重要な性質を列挙します（他にも興味深い性質がいくつか成り立ちますが、それらについては [10] を参照して下さい）：

- admissible な有限 CW-複体の inclusion についての可換図式

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \rightarrow & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_2 & \rightarrow & X \end{array}$$

から誘導される基本群の間の各写像が単射ならば、

$$\rho(X) = \rho(X_1)\rho(X_2)\rho(X_0)^{-1}$$

が成り立つ。

- admissible な有限 CW-複体の  $d$  重有限被覆  $X \rightarrow Y$  に対して、 $\rho(X) = \rho(Y)^d$  が成り立つ。
- 向きのついたコンパクト連結多様体  $M$  が上記 (2) の  $S^1$  作用を持つならば、 $\rho(M) = 1$  が成り立つ。

これらの性質を用いると次がわかります。ここで、3次元多様体をトーラス分解 (Jaco-Shalen-Johanson) したときに、ザイフェルトでない部分に断面曲率  $-1$  の双曲構造が入るとき、そのような分解を *JSJT*-分解と呼ぶことにします。

**定理 2.1**  $M$  を境界が空または非圧縮トーラスの非交和である、コンパクト既約な有向 3次元多様体で基本群が無限であるとし、さらに、 $M$  は *JSJT*-分解をもつと仮定します。このとき、 $M$  は admissible であり

$$\rho(M) = \prod_{i=1}^r \rho(M_i)$$

成り立ちます。ただし、 $M_i$  は  $M$  の *JSJT*-分解における有限体積の双曲構造をもつ部分である。

一方、3次元多様体  $M$  の組み合わせ  $L^2$ -torsion は、本質的に  $M$  の位相的な体積といえる Gromov の simplicial volume [6] として解釈できます。

**定理 2.2** 上の定理と同じ仮定のもと、

$$\log \rho(M) = C_3 \cdot \|M\|$$

が成り立つ。ここで、 $C_3$  は次元のみによる定数であり、 $\|M\|$  は  $M$  の simplicial volume を表す。特に、 $M$  が 3次元双曲的多様体ならば、

$$\log \rho(M) = -\frac{1}{3\pi} \text{Vol}(M)$$

が成り立つ。

この定理は、解析的  $L^2$ -torsion と組み合わせ  $L^2$ -torsion の logarithm が一致するという結果 [1, 7, 12] と、解析的  $L^2$ -torsion が体積として解釈できること [8] から従います。

一般に、解析的  $L^2$ -torsion 及び simplicial volume はその計算が非常に困難となりますが、組み合わせ  $L^2$ -torsion は 3次元多様体  $M$  の基本群の表示から読み取ることができます。

**定理 2.3 (Lück)**  $M$  をコンパクト既約な有向 3次元多様体で、 $M$  の基本群の表示

$$\pi_1 M = \langle s_1, \dots, s_g \mid r_1, \dots, r_{g-1} \rangle$$

が与えられているとする。Fox 行列  $(\frac{\partial r_i}{\partial s_j})$  から 1列のぞいた  $g-1$  次正方行列を  $A$  とします。このとき、 $M$  の組み合わせ  $L^2$ -torsion の logarithm は次式で与えられる：

$$\log \rho(M) = -2(g-1) \log K + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \text{tr}_{\mathbb{C}} \pi((I - K^{-2}AA^*)^p).$$

ただし、定数  $K$  は  $K \geq \|R_A\|_{\infty}$  を満たす任意の正の実数である。

さて、 $M(K) \subset S^3$  を結び目  $K$  の補空間とします。このとき、 $M(K)$  は admissible となり、組み合わせ  $L^2$ -torsion

$$\rho(K) = \rho(M(K))$$

を定義できることとなります。 $L^2$ -torsion の性質から、自明結び目あるいはトールラス結び目に対しては、 $\rho(K) = 1$  となることがわかります。この不変量



は  $S^3$  内の結び目の連結和について乗法的であり、また鏡映で不変であることもわかります。よって、ある意味でアレキサンダー多項式のように振る舞いますが、無限巡回被覆に対するものではなく、結び目補空間の普遍被覆に対応するものになっています ([11] 参照のこと)。

### 2.3 $L^2$ -torsion の計算例

前節での Lück の定理を用いて、基本群の表示から  $L^2$ -torsion の logarithm、したがって本質的にその simplicial volume を求めてみます。

**例 2.1** まず、8 の字結び目  $4_1$  を考えることにします。よく知られているように、 $S^3$  におけるその補空間には双曲的 3 次元多様体の構造が入ります。したがって、この場合の  $L^2$ -torsion の計算は、双曲的体積を与えることになり

ます。  
さて、 $\pi = \pi_1(4_1)$  の表示として、 $S^1$  上の 1 点穴あきトーラス束として得られるものを採用します：

$$\pi = \langle x, y, t \mid txt^{-1}y^{-1} = tyt^{-1}xy^{-3} = 1 \rangle.$$

このとき、Fox 行列は

$$\begin{pmatrix} t & -1 & 1-y \\ y^3x^{-1} & t-1-y-y^2 & 1-y^3x^{-1} \end{pmatrix}$$

で与えられます。ここで、 $S^1$  方向の生成元  $t$  に関する列を除いて得られる正方行列を Lück の定理における行列  $A$  とします (原論文とは、抜いている列が異なることに注意)：

$$A = \begin{pmatrix} t & -1 \\ y^3x^{-1} & t-1-y-y^2 \end{pmatrix}.$$

このとき、 $K \geq \|R_A\|_\infty$  として  $K = 4$  がとれるので、 $B = 16 - AA^*$  とおけば、

$$B = \begin{pmatrix} 14 & -txy^{-3} + t^{-1} - 1 - y^{-1} - y^{-2} \\ -y^3x^{-1}t^{-1} + t - 1 - y - y^2 & \lambda(y, t) \end{pmatrix},$$

$$\lambda(y, t) = 11 + t + t^{-1} - 2y - 2y^{-1} - y^2 - y^{-2} + ty^{-1} + ty^{-2} + yt^{-1} + y^2t^{-1}$$

となり、 $L^2$ -torsion は次で与えられます：

$$\begin{aligned}\log \rho(4_1) &= -2 \cdot 2 \log K + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \operatorname{tr}_{\mathbb{C}\pi}((1 - K^{-2} AA^*)) \\ &= -8 \log 2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p \cdot 16^p} \operatorname{tr}_{\mathbb{C}\pi}(B^p).\end{aligned}$$

この公式を用いた計算機による数値実験の結果は以下の表 1 のとおりです。  
ここで、表中の  $\log \rho(4_1)_p$  は部分和

$$\log \rho(4_1)_p = -8 \log 2 + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k \cdot 16^k} \operatorname{tr}_{\mathbb{C}\pi}(B^k).$$

を意味するものとします。

一方、8 の字結び目補空間の双曲的体積は、

$$\operatorname{Vol}(4_1) = 2.0298832128 \dots$$

となることが知られています。したがって、 $L^2$ -torsion の logarithm の実際の値は

$$\begin{aligned}\log \rho(4_1) &= -\frac{1}{3\pi} \operatorname{Vol}(4_1) \\ &= -0.215377298 \dots\end{aligned}$$

で与えられることとなります。

表 1: 8 の字結び目の  $L^2$ -torsion の近似計算

$p$	$\operatorname{tr}_{\mathbb{C}\pi}(B^p)$	$\frac{1}{p \cdot 16^p} \operatorname{tr}_{\mathbb{C}\pi}(B^p)$	$\log \rho(4_1)_p$
1	25	1.5625	-3.982677444
2	343	0.669921875	-3.312755569
3	4876	0.396809895	-2.915945674
4	70655	0.269527435	-2.646418239
5	1036925	0.197777748	-2.448640491

**例 2.2** 次に、三葉結び目  $3_1$  について考えます。これは  $(3, 2)$  型トーラス結び目なので、前節の最後で述べたことから、 $L^2$ -torsion は 1 になります。ここでは、Lück の公式を用いて数値的に近似計算を行ってみます。

表 2: 三葉結び目の  $L^2$ -torsion の近似計算

$p$	$\text{tr}_{\mathbb{C}\pi}(B^p)$	$\frac{1}{p \cdot 16^p} \text{tr}_{\mathbb{C}\pi}(B^p)$	$\log \rho(3_1)_p$
1	27	1.6875	-3.857677444
2	373	0.728515625	-3.129161819
3	5256	0.427734375	-2.701427444
4	75309	0.287281036	-2.414146408
5	1094117	0.208686256	-2.205460152
6	16079044	0.159730950	-2.045729202
7	238543885	0.126949317	-1.918779885
8	3566832445	0.103808486	-1.8149714
9	53683089966	0.086799086	-1.728172314
10	812420682143	0.073889230	-1.654283084
11	12352437787079	0.063832254	-1.59045083
12	188566236545412	0.055826820	-1.53462401

この場合も  $\pi_1(3_1)$  の表示として、 $S^1$  上の曲面束として得られるものを採用します：

$$\pi = \langle x, y, t \mid txt^{-1}y^{-1} = tyt^{-1}xy^{-1} = 1 \rangle.$$

このとき Fox 行列は、

$$\begin{pmatrix} t & -1 & 1-y \\ yx^{-1} & t-1 & 1-yx^{-1} \end{pmatrix}$$

で与えられます。先と同様に生成元  $t$  に関する列（第 3 列目）を除いたものを  $A$  とすれば、この場合も  $K = 4$  ととれて、

$$\begin{aligned} B &= 16 - AA^* \\ &= \begin{pmatrix} 14 & -txy^{-1} + t^{-1} - 1 \\ -yx^{-1}t^{-1} + t - 1 & 13 + t + t^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、 $L^2$ -torsion は次式で与えられることとなります：

$$\log \rho(3_1) = -8 \log 2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p \cdot 16^p} \text{tr}_{\mathbb{C}\pi}(B^p).$$

この公式を用いた数値実験の結果を表 2 にまとめておきます。

一方、三葉結び目  $3_1$  の  $S^3$  における補空間の体積は 0 になることが知られています。

### 3 $S^1$ 上の曲面束の $L^2$ -torsion

この章では、 $S^1$  上の 1 つ境界を持った曲面束を考えます。すなわち、 $\Sigma_{g,1}$  を種数  $g \geq 1$  の向き付けられたコンパクトな曲面 (実 2 次元多様体) で境界を一つ持つものとし、ここで、

$$\varphi : \Sigma_{g,1} \rightarrow \Sigma_{g,1}$$

を  $\Sigma_{g,1}$  上の向きを保つ微分同相写像とします。この写像  $\varphi$  の mapping torus を  $W_\varphi$  と書きます。このトーラスを境界を持つ 3 次元多様体  $W_\varphi$  には、自然な射影  $W_\varphi \rightarrow S^1$  が存在し、 $S^1$  上の  $\Sigma_{g,1}$  束の構造が入ります。以下簡単のため、

$$\pi := \pi_1(W_\varphi, *),$$

$$\Gamma := \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$$

とします。但し、 $\pi$  と  $\Gamma$  の基点  $*$  は  $\Sigma_{g,1} \times \{0\} \subset W_\varphi$  上の同一の点とします。この時、 $\pi$  は  $\Gamma$  と  $\mathbb{Z} \cong \langle t \rangle$  の半直積と同型になります。

**注意 3.1**  $\varphi$  が擬アノソフ微分同相写像であれば、 $W_\varphi$  の内部はトーラスカスプを持つ完備な双曲的多様体となることが知られています。

ここで、 $B(l^2(\pi), l^2(\pi))^\pi$  を  $\pi$ -同変な  $l^2(\pi)$  上の有界線形作用素の全体とします。前の章では基本群  $\pi$  の右正則表現

$$\pi \rightarrow B(l^2(\pi), l^2(\pi))^\pi$$

を考え、それを使ってヒルベルト加群係数のねじれホモロジーを考えて  $L^2$ -torsion  $\rho(W_\varphi)$  を定義しました。

以下では  $l^2(\pi)$  を  $\Gamma$  の降中心化列を使って近似することを考え、それによって、元々の  $L^2$ -torsion  $\rho(W_\varphi)$  を近似する  $L^2$ -torsion の列  $\rho_k(W_\varphi) (k = 1, 2, \dots)$  を構成する一つの試みに付いて述べます。

#### 3.1 降中心化列から定まる $L^2$ -torsion

基本群  $\pi_1(\Sigma_{g,1}) = \Gamma$  は、階数が  $2g$  の自由群です。そこで、自由群  $\Gamma$  の降中心化列

$$\Gamma_1 := \Gamma \supset \Gamma_2 \supset \cdots \supset \Gamma_k \supset \cdots$$

を考えます。但し、 $\Gamma_2 := [\Gamma_1, \Gamma_1]$ 、一般に  $k > 2$  に対して、 $\Gamma_k := [\Gamma_{k-1}, \Gamma_1]$  です。さらに  $\Gamma$  の冪零商  $N_k := \Gamma/\Gamma_k$ 、そして、そこへの自然な射影  $p_k : \Gamma \rightarrow N_k$  を考えます。

**注意 3.2** 古典的に  $\Gamma$  は、剰余冪零性を持つことは知られています。すなわち自明でない任意の元  $x \in \Gamma$  に対して、ある  $k$  が存在して  $p_k(x) \neq e$  となります。これらについては [5, 13] を参照して下さい。

前の章では  $\pi$  の  $l^2(\pi)$  の上への正則表現を考えました。 $\Gamma_k$  は  $\pi$  の正規部分群なので、その商群  $\pi(k) := \pi/\Gamma_k$  を考える事ができます。そこで、 $\pi$  の  $l^2(\pi(k))$  の上への表現、すなわち、

$$\pi \rightarrow B(l^2(\pi(k)), l^2(\pi(k)))^\pi$$

を考えましょう。この表現により、前の章と同様にして、3次元多様体  $W_\varphi$  の  $L^2$ -torsion  $\rho_k(W_\varphi)$  が幾つかの仮定、すなわち、 $L^2$ -ベッチ数の消滅と Novikov-Shubin 不変量の正值性の下で定義されます。

**補題 3.1** 上の表現  $\pi \rightarrow B(l^2(\pi(k)), l^2(\pi(k)))^\pi$  で捻った  $W_\varphi$  のホモロジーは全て消える。

証明の詳細は省略しますが、 $k = 1$  の時、 $l^2(\mathbb{Z})$ -係数ホモロジーが消えることが証明でき ([11] 参照のこと)、 $k > 1$  の場合はそこに帰着させることができます。

Novikov-Shubin 不変量の正值性については以後仮定をして話を進めます。

**注意 3.3** 以下で述べることは全て、Novikov-Shubin 不変量の正值性が成り立つと仮定すれば、数学的に正しい事が証明されます。しかし、その正值性についてはある型のトーラス束の場合には証明されていますが、一般的には未だ未解決と思われれます。

**注意 3.4** 正則表現をその他の無限次元表現に取り替えて  $L^2$ -torsion を定義した仕事はもともと Carey-Mathai [2] にあります。この論文では  $L^2$ -ベッチ数が消滅し、Novikov-Shubin 不変量の正となる表現の事を admissible 表現と呼び、このような表現に対して  $L^2$ -torsion を定義しています。

もともと基本群  $\pi \cong \Gamma \times \mathbb{Z}$  でした。よって、明らかに今の場合  $\pi(k) \cong N_k \times \mathbb{Z}$  です。この事から、群の列  $\{\pi(k)\}$  は  $\Gamma$  の剰余冪零性から素朴な意味で  $\pi$  の近似列です。この近似列から定まる表現はもともとの正則表現  $\pi \rightarrow$

$B(l^2(\pi), l^2(\pi))^\pi$  の近似列と見なすことができます。よってこれから定まる  $L^2$ -torsion を考えれば、これは下の  $L^2$ -torsion を近似しているはずですが。具体的にどのように書き下すことができるかは Lück の公式を使って後で書きます。

### 3.2 動機

なぜこのような状況を考えるのかに付いて、その動機について少し書きます。Kashaev-村上順-村上斉による結び目の volume conjecture は、結び目の Jones 多項式のある極限が結び目の補空間の体積を与えるというものでした。一方で、結び目の  $L^2$ -torsion  $\rho(S^3 \setminus K)$  がその体積を与えることは証明されています。そこで、 $\rho(S^3 \setminus K)$  に収束して行くような torsion の近似列は作れないだろうかというのが、このようなことを考えはじめた動機です。最初は(3月の段階では)素朴に結び目の基本群自身の降中心化列を考え、単純にその冪零商を取ることを考えました。

しかし、こうして torsion を定義し、それらが良く振る舞ってくれるためには基本群の剰余冪零性が必要です。しかし、これが成り立つのは自明な結び目だけです。剰余冪零性が成り立つことが知られている群は、前にも述べましたが自由群です。そこで fibered 結び目を考えてみると、その基本群の交換子群は自由群でその降中心化列を考えることができます。考える対象は結び目に限る必要もないので、 $S^1$  上の曲面束に対してこのような設定を考えました。

### 3.3 Lück の公式

ここでは  $S^1$  上の境界付き曲面束に話を限った場合に  $\rho(W_\varphi)$  の Lück の与えた公式がモノドロミーの言葉でどう書けるかに付いて述べます。これは前の章で述べたことの書き換えです。そして、この表示を使って  $\rho_k$  の場合に、それがどう書けるかに付いて述べます。well-definedness は別に示す必要はありませんが、この公式を  $S^1$  上の  $\Sigma_{g,1}$  束の  $\rho_k$  の定義と見なすことができます。

$\Gamma$  の標準的な基底を  $x_1, x_2, \dots, x_{2g}$  とします。これを使って  $\pi$  の表示として

$$\langle x_1, \dots, x_{2g}, t \mid r_1 := tx_1t^{-1}(\varphi_*(x_1))^{-1}, \dots, r_{2g} := tx_{2g}t^{-1}(\varphi_*(x_{2g}))^{-1} \rangle$$

が得られます。ここで  $\varphi_* : \Gamma \rightarrow \Gamma$  は  $\varphi : \Sigma_{g,1} \rightarrow \Sigma_{g,1}$  から誘導される準同型写像です。前の章と同様に、関係子  $r_1, \dots, r_{2g}$  に Fox の自由微分を施すこと

により

$$A := \begin{pmatrix} \partial r_i \\ \partial x_j \end{pmatrix} \in M(2g; \mathbb{Z}\pi)$$

を得ます。前に述べた Lück の公式をこの  $S^1$  上の  $\Sigma_{g,1}$  束の場合に書き直すと、次のようになります。

Lück の公式 :

$$\begin{aligned} \log \rho(W_\varphi) &= -2 \log \det_{\mathbb{C}\pi}(A) \\ &= -4g \log K + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \operatorname{tr}_{\mathbb{C}\pi}((I - K^{-2}AA^*)^p). \end{aligned}$$

ただし、定数  $K$  は  $K \geq \|R_A\|_\infty$  を満たす任意の正の実数。ここで、 $\det$  は Fuglede-Kadison 行列式、 $\det : M(2g; \mathbb{C}\pi) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  です。

では、 $\rho_k(W_\varphi)$  はどのように書けるでしょうか？これは次のようになります。  $p_k : \Gamma \rightarrow N_k$  から誘導される自然な準同型写像

$$\pi \rightarrow \pi(k) = N_k \rtimes \mathbb{Z}$$

も同じ記号で表します。この写像から誘導される群環上の写像

$$p_{k*} : \mathbb{C}\pi \rightarrow \mathbb{C}\pi(k)$$

を考えます。この時、

$$A_k := \begin{pmatrix} p_{k*} \left( \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \end{pmatrix} \in M(2g; \mathbb{C}\pi(k))$$

とします。定数  $K_k$  を  $K_k \geq \|R_{A_k}\|_\infty$  を満たす任意の正の実数として取ります。Lück の公式の証明の議論はこの場合にも、そのまま成り立つので結局次を得ます。

Lück の公式の  $\rho_k$  版 :

$$\begin{aligned} \log \rho_k(W_\varphi) &= -2 \log \det_{\mathbb{C}\pi(k)}(A_k) \\ &= -4g \log K_k + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \operatorname{tr}_{\mathbb{C}\pi(k)}((I - K_k^{-2}AA^*)^p). \end{aligned}$$

次の事は容易に分かります。

**補題 3.2** 定数  $K, K_k$  はすべての  $A, A_k (k = 1, 2, \dots)$  に対して等しく取ることができる。すなわち、 $K_k = K$  と取ることができる。

証明は [3] の part 1, chapter 1 の proposition 8 を参照して下さい。

ここで、 $\rho_1$  を考えてみましょう。 $\pi(1) = \pi/\Gamma_1 \cong \mathbb{Z} = \langle t \rangle$  なので、 $A_1$  はいわゆる Alexander 行列と一致します。Alexander 行列の成分は  $t$  のローラン多項式なので、それらは互いに可換です。したがって、普通の意味での行列式が定義されます。それは古典的な Alexander 多項式となります。しかし、 $\rho_1$  の定義では非可換な行列式を用いて、数値的な不変量を定めます。これがどのような量かは (高次なものも含めて)、今後の課題です。

### 3.4 写像類群の Magnus 表現

ここまで述べてきたことを写像類群の Magnus 表現の観点から書き直してみます。 $\mathcal{M}_{g,1}$  を  $\Sigma_{g,1}$  の写像類群とします。 $\mathcal{M}_{g,1}$  の Magnus 表現とは、 $\mathcal{M}_{g,1}$  を  $\Gamma = \langle x_1, \dots, x_{2g} \rangle$  の自己同型の部分群と見なして、Fox の自由微分を用いて

$$r : \mathcal{M}_{g,1} \ni \varphi \mapsto \left( \frac{\partial \varphi_*(x_j)}{\partial x_i} \right)_{i,j} \in GL(2g; \mathbb{Z}\Gamma)$$

と定義します。ここで、

$$GL(2g; \mathbb{Z}\Gamma) \ni A \mapsto \bar{A} \in GL(2g; \mathbb{Z}\Gamma)$$

は各成分毎に

$$\mathbb{Z}\Gamma \ni \sum_g \lambda_g g \mapsto \sum_g \lambda_g g^{-1} \in \mathbb{Z}\pi$$

を考えることにより定まる写像です。

この Magnus 表現を使うと前の Lück の公式が言っていることは、 $\rho(W_\varphi)$  は  $r(\varphi)$  の非可換な Fuglede-Kadison 行列式を使った特性多項式ということです。ここで特性多項式と言っているのは、行列  $A \in GL(2g; \mathbb{Z}\Gamma)$  に対して、行列  $tI - A$  を  $M(2g; \mathbb{Z}\pi)$  の中の行列と考えてその行列式を取ると言う意味です。もう少し詳しく説明しましょう。群  $\pi$  の表示を固定し、関係子

$$r_i = tx_i t^{-1} (\varphi_*(x_i))^{-1}$$

に Fox の自由微分を作用させて、群環係数の行列  $A$  を定義しました。ここで、 $r_i = 1$  を変型して  $tx_i t^{-1} - \varphi_*(x_i) = 0$  とし、この左辺に自由微分を作用



させて、すべてをそれらで置き換えても  $\rho$  の値は変わらないことは容易に分かります。そこで  $\rho(W_\varphi)$  は、このようにして得られる行列  $tI - r(\varphi)$  の行列式とすることができます。また、

$$\det(tI - r(\varphi)) = \det(tI - {}^t r(\varphi))$$

も容易に分かります。

では、 $\rho_k$  の場合はどうかと考えると、これは射影

$$p_k : \Gamma \rightarrow N_k$$

から誘導される準同型を Magnus 表現と合成して得られる

$$r_k : \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow GL(2g; \mathbb{Z}N_k)$$

の Fuglede-Kadison 行列式による特性多項式と考えることができます。

## 4 具体例

この章では、具体例として  $S^1$  上のトーラス束を考えます。詳しい計算結果については [18] にまとめてあります。そちらも参照してください。なお、ここでの数値計算にはプログラム言語 perl を使っています。

### 4.1 $S^1$ 上のトーラス束

良く知られているように、整数値 2 行 2 列の行列で行列式の値が 1 である行列からなる群  $SL(2; \mathbb{Z})$  の自然な  $\mathbb{R}^2$  への線形な作用は、この群の 2 次元トーラス  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  への自然な作用を導きます。

そこで、モノドロミーが

$$\varphi_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \in SL(2; \mathbb{Z})$$

で与えられるトーラス束の族を考えてみましょう。但し、 $\mathbb{R}^2$  の原点に対応する  $T^2$  上の点はこの作用で不動点なので、その点に対応した  $S^1$  の管状近傍を抜いた 1 つ境界をもつ  $S^1$  上のトーラス束を考えます。これを単に  $W_a$  と書く事にします。  $W_a$  の基本群は次のような表示を持ちます：

$$\pi_1(W_a) = \langle x, y, t \mid txt^{-1} = y, tyt^{-1} = y^a x^{-1} \rangle.$$

以後、この群を単に  $\pi_a$  と書く事にします。

**注意 4.1**  $a = 1$  の時が三葉結び目の補空間、 $a = 3$  の時が 8 の字結び目の補空間に対応しています。さらに  $|a| \geq 3$  の時、これらの多様体の内部には完備な双曲構造が入ります。

これらの族に対して、前の章で考えたような  $L^2$ -torsion の近似列を考えてみます。もちろんここで、Novikov-Shubin 不変量が正となるかどうか確かめなくてはなりませんが、それを仮定して数値実験を試みました。

### 4.2 第一近似 $\rho_1$ について

まず、基本群から  $\mathbb{Z}$  への準同型  $\pi_a \rightarrow \mathbb{Z} = \langle t \rangle$  を使って得られる 1 番目の不変量  $\rho_1$  について調べてみました。

図1を見て下さい。最初に Novikov-Shubin 不変量が 1 でとれる事を実験的に示してみました。この図1は

$$n \cdot \text{tr}_{\mathbb{C}\pi} \left( (I - A_1 A_1^* / K^2)^n \right)$$

の振る舞いを調べたものです。横軸は  $n$ 、縦軸は  $n \cdot \text{tr}_{\mathbb{C}\pi} \left( (I - A_1 A_1^* / K^2)^n \right)$  の値です。ここで、 $K = \sqrt{2}(|a| + 1)$  として計算しています。 $a = 0, 1, 2$  とそれ以上の時で全く振る舞い方が違う事が特徴的です。これは双曲的多様体かどうかに対応しています。数値実験からは、 $a \geq 3$  ならば Novikov-Shubin 不変量は 1 以上であることが読み取れます。

数学的には次の事は証明できます。

**命題 4.1**  $|a| \geq 9$  ならば、 $A_1$  の Novikov-Shubin 不変量は 1 以上。

$a$  の値が小さい時の収束性も仮定して  $\rho_1$  の値を数値的に求めてみました。これは、同じく定数  $K = \sqrt{2}(|a| + 1)$  と取って、Lück の公式の第 4489 項までの和

$$-4g \log K + \sum_{p=1}^{4489} \frac{1}{p} \text{tr}_{\mathbb{C}\pi^{(k)}} \left( (I - K^{-2} A A^*)^p \right)$$

を考えています。

結果は次の表の様になります。ここで、体積との比較を念頭に入れて、値は  $-3\pi$  倍して考えています。双曲的体積は SnapPea で計算しています。

$a$	双曲的体積	$\rho_1$ の近似値	誤差の上限
0	0	0.31743379639025	0.3175
1	0	0.733310111001015	0.7325
2	0	4.64993022744146	4.4726
3	2.0298832128	18.1412584724627	$6.3330 \times 10^{-8}$
4	2.66674478345	24.8240715245874	$2.0047 \times 10^{-10}$
5	2.9891202829	29.5334698358513	$7.5311 \times 10^{-10}$
6	3.1772932786	33.2270014461213	$1.4341 \times 10^{-8}$
7	3.2969024143	36.28251688552708	$3.0778 \times 10^{-8}$
8	3.3775974082	38.8948730158471	$6.3772 \times 10^{-7}$
9	3.4345408859	41.1795720326583	$7.2689 \times 10^{-6}$
10	3.4761739892	43.2113662660811	$5.1776 \times 10^{-5}$

### 4.3 第二近似 $\rho_2$ について

次に  $\rho_2$  について調べてみました。これは群  $\pi_a$  に「生成元  $x$  と  $y$  は可換である」という関係子を入れた群上の  $\pi_a$  の表現を考える事になります。

図 2 は  $a = 1$  (三葉結び目) の場合、図 3 は  $a = 3$  (8 の字結び目) の場合の  $\rho_1, \rho_2, \rho$  の値の比較をしたグラフです。横軸は何項目まで足すかという数  $N$  を表しています。縦軸は  $\rho_1$  の時と同様に、Lück の公式の第  $N$  項までの和の  $-3\pi$  倍です。数値の上ではわずかな差がありますが、グラフ上で見ると  $\rho_2$  と  $\rho$  に差はありません。

## 5 今後の課題

本稿の内容に関連した今後の課題について述べます。

問題 1.  $\rho_k(W_\varphi)$  が一般に定義可能である事を証明せよ。すなわち、Novikov-Shubin 不変量の正値性を証明せよ。

これが証明された時に問題となるのは次の事です。

問題 2.  $k \rightarrow \infty$  の時、 $\rho_k(W_\varphi) \rightarrow \rho(W_\varphi) = -\frac{1}{3\pi} \text{Vol}(W_\varphi)$  か?

この問題は  $k \rightarrow \infty$  の時の Novikov-Shubin 不変量が一様に振る舞うかどうかに関係しています。すなわち、もし、次のような定数  $C > 0$ ,  $\alpha > 0$  が存在する事が示されれば問題 2 は証明されます。

問題 3. 全ての  $n, k$  に対して、

$$\text{tr}_{\mathbb{C}\pi(k)}(I - A_k A_k^*/K^2)^n \leq \frac{C}{n^\alpha}$$

かつ

$$\text{tr}_{\mathbb{C}\pi}(I - AA^*/K^2)^n \leq \frac{C}{n^\alpha}$$

が成立するような定数  $C > 0$ ,  $\alpha > 0$  が存在するか?

定義可能であることが確かめられている範囲における  $\rho_1$  について次のような問題が挙げられます。

問題 4.  $\rho_1(W_\varphi)$  は結び目の補空間でいう Alexander 行列で決まっている。この量はどのような量か?

Lück は論文の中で

$$\rho_1(W_\varphi) = \int_{S^1} \log(\Delta(z)\Delta(\bar{z})) d\text{vol}$$

と証明なしで主張しています。ここで、 $\Delta(z)$  は Alexander 多項式、すなわち、モノドロミーの曲面のホモロジーへの作用から決まる行列の特性多項式です。

問題 5. 種数  $g$  の閉曲面を fiber とする曲面束の場合に、モノドロミーから  $L^2$ -torsion を与える公式を作れ。

3次元の閉多様体の場合に Lück はヘーガード分解から決まる基本群の表示を使う公式を求めています。

より一般に、3次元双曲的多様体  $M$  に対して

問題 6.  $M$  に双曲的デーン手術を施して新たに得られる双曲的多様体の  $L^2$ -torsion を与える公式を求めよ。

また、曲面の写像類群の立場から、次の問いは興味深いと思われます。

問題 7. 写像類群の Magnus 表現の観点から、 $L^2$ -torsion  $\rho, \rho_k$  たちの性質を導け。例えば、 $\rho_k \rightarrow \rho$  を示せ。

最後に、次の問いを挙げておきます。

問題 8. 解析的  $L^2$ -torsion を経由せず、直接組み合わせ  $L^2$ -torsion が双曲的体積と一致することを示せ。

## 参考文献

- [1] D. Burghela, L. Friedlander, T. Kappeler and P. McDonald : *Analytic and Reidemeister torsion for representations in finite type Hilbert modules*, Geom. and Funct. Anal. **6** (1996).
- [2] A. Carey and V. Mathai :  *$L^2$ -torsion invariants*, J. Funct. Anal. **110** (1992).
- [3] J. Dixmier : *Von Neumann Algebras*, North-Holland.
- [4] J. Dodziuk :  *$L^2$ -harmonic forms on rotationally symmetric Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **77** (1979).
- [5] R. Fenn : *Techniques of Geometric Topology*, LMS Lect. Notes 57.
- [6] M. Gromov : *Volume and bounded cohomology*, Publ. Math. IHES **56** (1982).
- [7] E. Hess and T. Schick : *Nonvanishing of  $L^2$ -torsion of hyperbolic manifold*, Manuscripta Math. **97** (1998).
- [8] J. Lott : *Heat kernels on covering spaces and topological invariants*, J. Diff. Geom. **35** (1992).
- [9] J. Lott and W. Lück :  *$L^2$ -topological invariants of 3-manifolds*, Invent. Math. **120** (1995).
- [10] W. Lück :  *$L^2$ -torsion and 3-manifolds*,  
In the book, Low-dimensional topology, edited by Johanson, K.
- [11] W. Lück and M. Rosenberg : *Reidemeister torsion and the K-theory of von Neumann algebras*, K-theory **5** (1991).
- [12] W. Lück and T. Schick :  *$L^2$ -torsion of hyperbolic manifolds of finite volume*, preprint (1999).
- [13] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar : *Combinatorial Group Theory*, Dover.
- [14] V. Mathai :  *$L^2$ -analytic torsion*, J. Funct. Anal. **107** (1992).

- [15] S. Morita : *Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces*, Duke Math. J. **70** (1993).
- [16] S. Novikov and M. Shubin : *Morse inequalities and von Neumann invariants of non-simply connected manifolds*, Uspekhi. Matem. Nauk. **46** (1986).
- [17] S. Novikov and M. Shubin : *Morse inequalities and von Neumann  $II_1$ -factors*, Soviet Math. Dokl. **34** (1987).
- [18] M. Takasawa : <http://www.is.titech.ac.jp/~takasawa/Torsion/index.html>



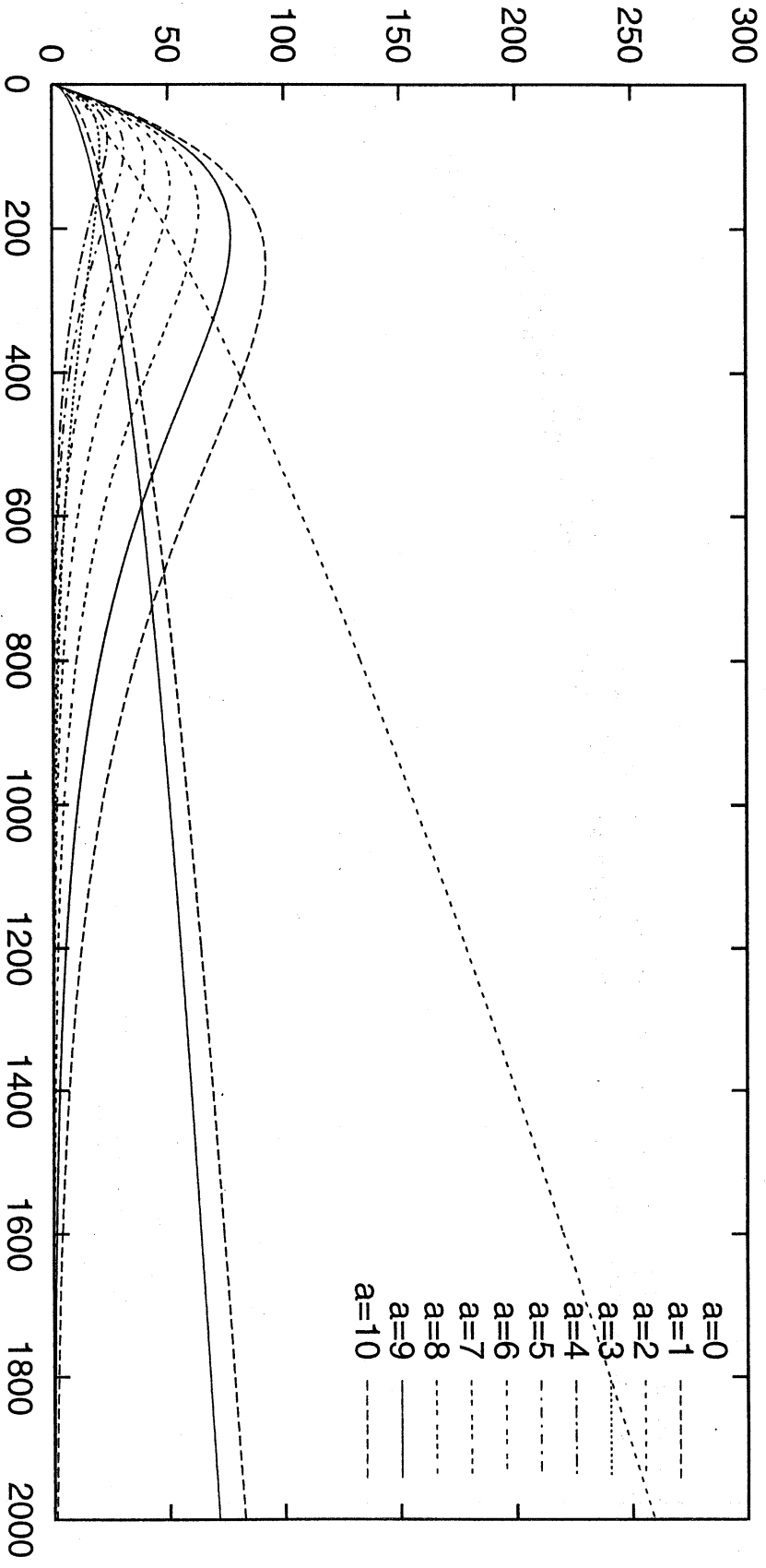


图 1:

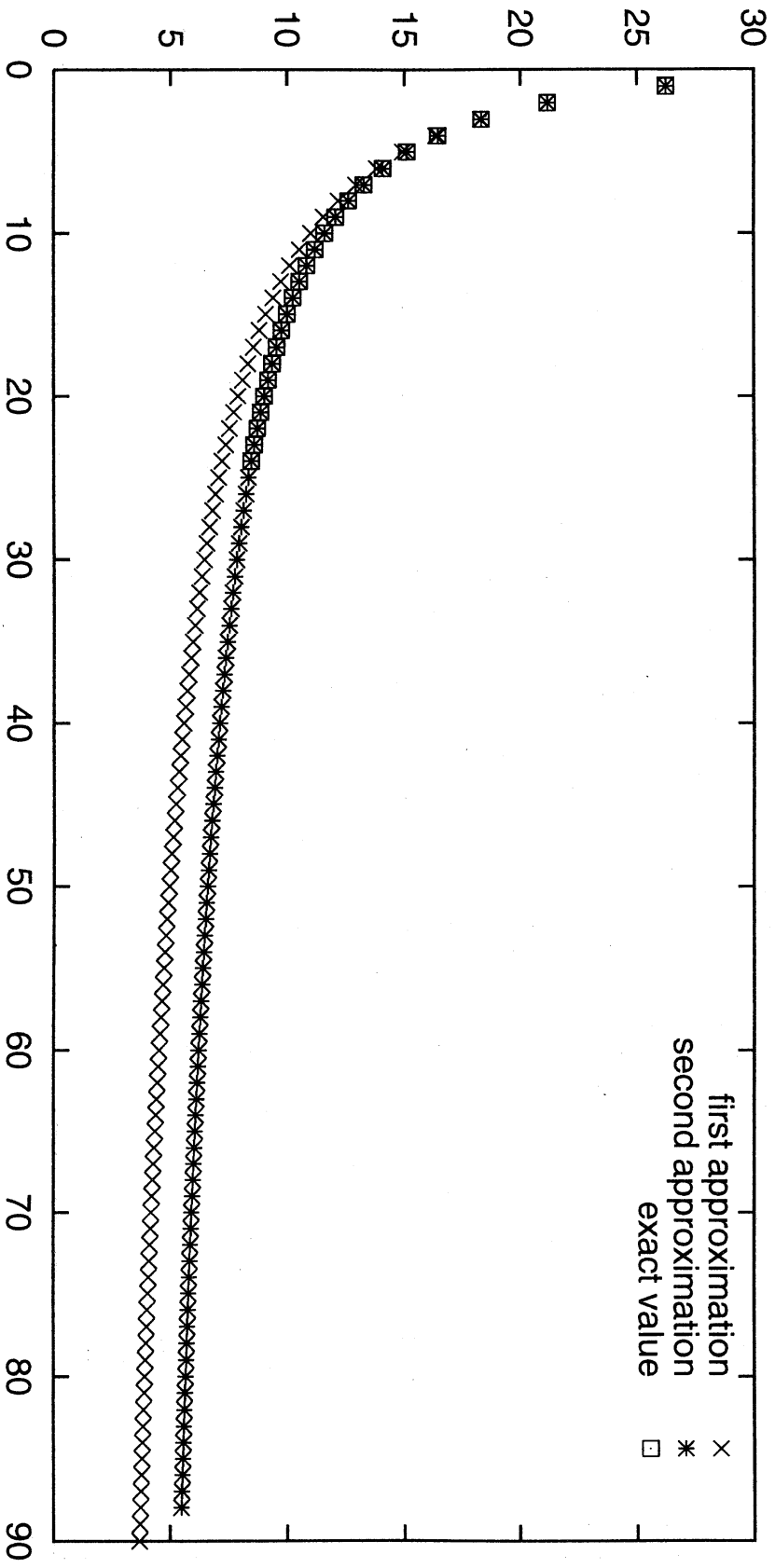
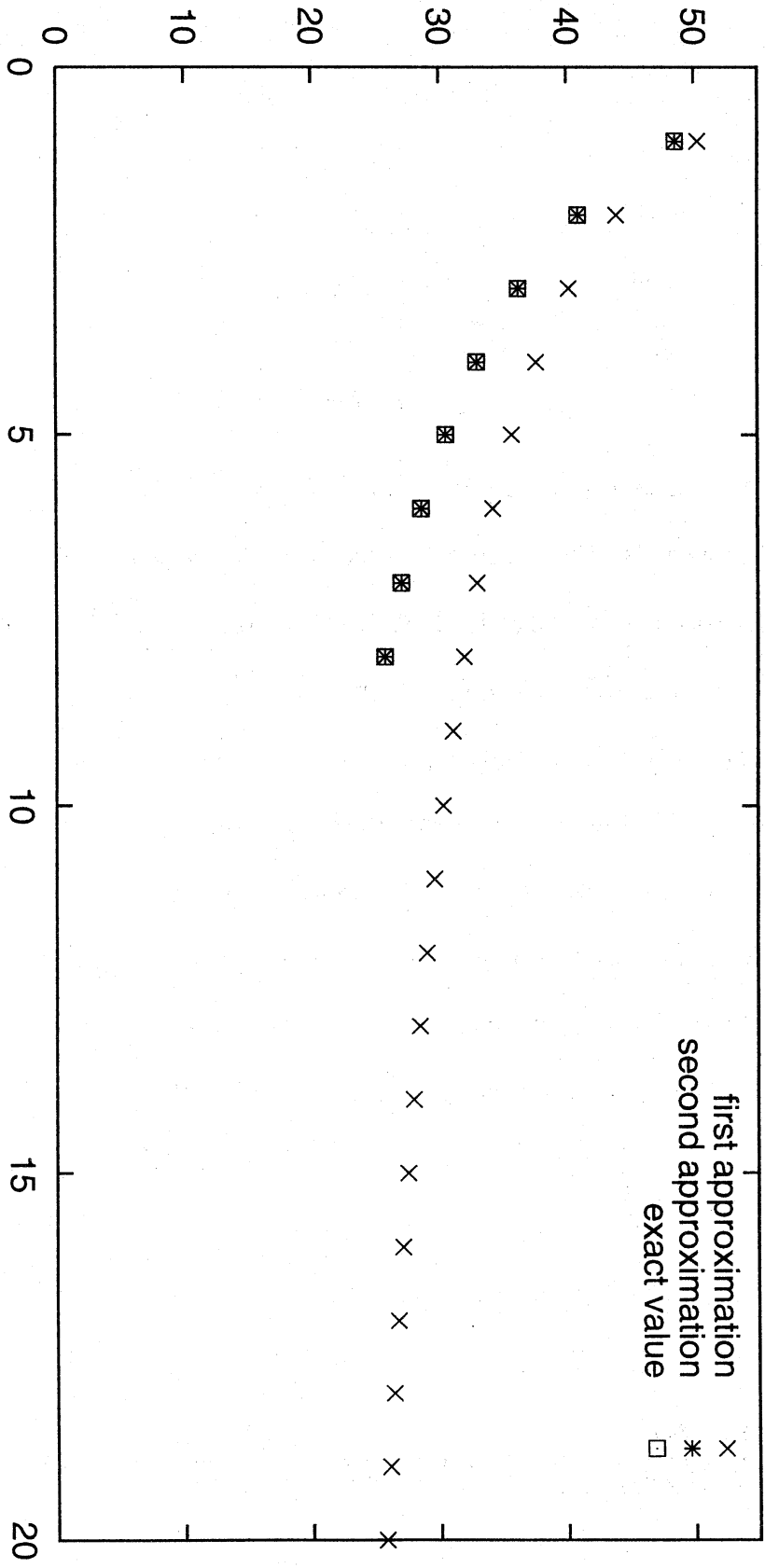


Figure 2:



3: