

Title	Prime ideal of $H^\infty$ (Analytic Function Spaces and Operators on these Spaces)
Author(s)	泉池, 敬司; 石井, 隆
Citation	数理解析研究所講究録 (2000), 1137: 45-50
Issue Date	2000-04
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/63800">http://hdl.handle.net/2433/63800</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## Prime ideal of $H^\infty$

新潟大学理学部 泉池 敬司 (KEIJI IZUCHI)

新潟大学大学院 自然科学研究科 石井 隆 (TAKASHI ISHII)

### 1 序論

Disk 環のイデアル論は A.Beurling, W.Rudin [1] などにより研究され、多くのことがわかっている。一方、 $H^\infty$  や Douglas algebra のそれは、最近になって、P.Gorkin, R.Mortini 等により、盛んに行われているが、未解決なものも多々ある。ここでは、 $H^\infty$  の prime ideal について、少し論じたい。

### 2 準備と背景

特に断りのない場合は closed prime ideal を  $P$  であらわす。また、イデアル  $I \subset H^\infty$  の hull を  $Z_{H^\infty}(I)$  で表わす。すなわち、 $Z_{H^\infty}(I) = \bigcap_{f \in I} \{x \in M(H^\infty); f(x) = 0\}$  である。

**定義 2.1**  $P \subset H^\infty$  が prime ideal であるとは

$$fg \in P \text{ ならば } f \in P \text{ or } g \in P$$

が成立するときをいう。

特に、maximal ideal は prime ideal である。

次は明らかである。

**命題 2.2**  $Z_{H^\infty}(P) \subset D$  ならば、 $P$  は maximal ideal である。

また、次が成り立つ。

**定理 2.3** ([2, R.Mortini],[3, P.Gorkin, R.Mortini])  $Z_{H^\infty}(P) \subset \Gamma$  または、 $Z_{H^\infty}(P) \subset G$  ならば、 $P$  は maximal ideal である。ここで、 $\Gamma = \{x \in M(H^\infty); P(x) = \{x\}\}$ ,  $G = \{x \in M(H^\infty); P(x) \neq \{x\}\}$ .

**定理 2.4** (R.Mortini [2])  $Z_{H^\infty}(P) \cap M(L^\infty) \neq \emptyset$  ならば、 $P$  は maximal ideal である。

non-maximal closed prime ideal の例として、次のものがある。

**命題 2.5**  $m \in M(H^\infty) \setminus D$  を non-trivial point.  $P(m)$  をその Gleason part とすると、

$$I = \{f \in H^\infty; f = 0 \text{ on } P(m)\}$$

は non-maximal closed prime ideal である。

**証明.**  $fg \in I$  とすると、 $fg = 0$  on  $P(m)$ . すなわち、 $L_m$  を Hoffman map とすると、

$$fg \circ L_m(z) = (f \circ L_m)(g \circ L_m)(z) = 0 \text{ on } D.$$

$f \circ L_m, g \circ L_m \in H^\infty$  であるから、 $f \circ L_m = 0$ , or  $g \circ L_m = 0$  すなわち、 $f = 0$  on  $P(m)$  or  $g = 0$  on  $P(m)$  よって、 $f \in I$  or  $g \in I$ .

命題 2.5. の ideal  $I$  の他に non-maximal closed prime ideal は存在しないというのが Alling's conjecture であり、これは未解決であるが、次が成立する。

**定理 2.6** (P.Gorkin. R.Mortini [3])  $P$  を closed prime ideal とすと、

$$P = I_{H^\infty}(Z_{H^\infty}(P))$$

さて、次に closed ではない prime ideal について考える。そのような代表例として、

$$P = (S, S^{\frac{1}{2}}, S^{\frac{1}{3}} \dots) \text{ ただし、 } S(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)$$

すなわち、 $S^{\frac{1}{n}}$  によって生成される ideal がある。この ideal について、

$$\bar{P} = I_{H^\infty}(Z_{H^\infty}(P))$$

が成立する。

### 3 主結果

より一般に我々は次の定理を得た。

**定理 3.1**  $I$  を Prime ideal とすると、 $\bar{I} = I_{H^\infty}(Z_{H^\infty}(I))$  である。

**証明.** Case.I.  $Z_\infty(I) \cap M(L^\infty) = \emptyset$ . 定理 2.5. の証明がそのまま適用できる。

Case.II.  $Z_\infty(I) \cap M(L^\infty) \neq \emptyset$ .

$f \in I_{H^\infty}(Z_{H^\infty}(I)), \|f\| = 1$  とする。 $f \in \bar{I}$  を示す。 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$  を任意にとる。 $[4, \text{prop.3}]$  より、open subset  $R \subset D$  で次を満たすものがとれる。

$$(3-1) \quad |f(z)| < \varepsilon \text{ if } z \in R,$$

$$(3-2) \quad |f(z)| > \delta(\varepsilon) \text{ if } z \in D \setminus R,$$

$$(3-3) \quad \int_{\Gamma} |F| |dz| \leq C \|F\|_1 \text{ for } F \in H^1.$$

ここで、 $\Gamma = \partial R \cap D$ ,  $0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ ,  $C$  は定数である。

$$Z_{H^\infty}(I) \subset Z_{H^\infty}(f) \subset \{x \in M(H^\infty); |f(z)| < \varepsilon\}$$

であるから、[5, lemma 2.5] より、 $h \in I, \|h\| = 1$  が存在して、

$$(3-4) \quad Z_{H^\infty}(h) \subset \{x \in M(H^\infty); |f(z)| < \delta(\varepsilon)\}.$$

とできる。ここで、 $I$  が prim ideal であることと、 $Z_{H^\infty}(I) \cap M(L^\infty) \neq \emptyset$  であることより、 $h$  は outer function としてもよい。さらに、十分大きな  $n$  について  $n$  乗根を考えれば、

$$(3-5) \quad |h| \geq 1 - \varepsilon \text{ on } \{x \in M(H^\infty); |f(x)| \geq \delta(\varepsilon)\}$$

といてよい。 $E \subset \partial D$  を

$$(3-6) \quad E = \{e^{i\theta} \in \partial D; |f(e^{i\theta})| \geq 2\varepsilon\}$$

と定めれば、 $\delta(\varepsilon) < \varepsilon < 2\varepsilon$  であるから、

$$(3-7) \quad |h| \geq 1 - \varepsilon > \frac{1}{2} \text{ on } E.a.e$$

となる。いま、 $D_r = \{z \in D; |z| < r\}$  ( $0 < r < 1$ ) とし、 $G_r = D_r \setminus \bar{R}$  と定義する。コーシーの積分公式と [6] と同様の議論により、

$$(3-8) \quad \int_{\partial G_r \cap \partial D_r} \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz \longrightarrow \int_{\Gamma} \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz \quad (\text{as } r \rightarrow 1)$$

である。さて、

$$\begin{aligned} \left| \int_E \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz - \int_E f(z)F(z)\overline{h(z)} dz \right| &\leq \int_E |f(z)F(z)| \left| \frac{1}{h} - \bar{h} \right| |dz| \\ &\leq \int_E |fF| \frac{(1 - |h|^2)}{|h|} |dz| \\ &\leq \int_E |fF| \frac{(1 - |h|)(1 + |h|)}{|h|} |dz| \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \int_E |fF| |dz| \\ &\leq 4\varepsilon \|F\|_1 \end{aligned}$$

従って、

$$(3-9) \quad \left| \int_E \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz - \int_E f(z)F(z)\bar{h} dz \right| \leq 4\varepsilon \|F\|_1.$$

また、(3-6) より、

$$(3-10) \quad \left| \int_E f(z)F(z)h(\bar{z}) dz - \int_{\partial D} f(z)F(z)h(\bar{z}) dz \right| \leq \int_{\partial D \setminus E} |f(z)F(z)h(\bar{z})| |dz| \leq 2\varepsilon \|F\|_1.$$

(3-9) と (3-10) により、

$$(3-11) \quad \left| \int_E \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz - \int_{\partial D} fFh(\bar{z}) dz \right| \leq 6\varepsilon \|F\|_1 \quad (F \in H^1).$$

さて、 $E_r \subset \partial D$  を次で定義する。

$$(3-12) \quad rE_r = \partial G_r \cap \partial D_r$$

このとき、

$$(3-13) \quad d\theta(E \cap E_r) \longrightarrow d\theta(E) \quad (\text{as } r \rightarrow 1)$$

となっている。

$G_r$  の定義と (3-2), (3-5) より、

$$(3-14) \quad |h| \geq 1 - \varepsilon \text{ on } G_r.$$

さらに、 $rE_r$  の定義より、

$$(3-15) \quad |h| \geq 1 - \varepsilon > \frac{1}{2} \text{ on } rE_r.$$

従って、(3-15) より、 $r \rightarrow 1$  のとき、

$$\begin{aligned} \left| \int_{E_r \setminus E} \left( \frac{fF}{h} \right) (rz) dz \right| &\leq 2 \int_{\partial D \setminus E} |(fF)(rz)| |dz| \\ &\rightarrow 2 \int_{\partial D \setminus E} |(fF)(z)| |dz| \end{aligned}$$

ゆえに、 $E$  の定義より、

$$\limsup_{r \rightarrow 1} \left| \int_{E_r \setminus E} \left( \frac{fF}{h} \right) (rz) dz \right| \leq 4\varepsilon \|F\|_1.$$

さらに、等式

$$\int_{\partial G_r \cap \partial D_r} \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz - r \int_{E_r \cap E} \left( \frac{fF}{h} \right) (rz) dz = r \int_{E_r \setminus E} \left( \frac{fF}{h} \right) (rz) dz$$

であるから、

$$(3-16) \quad \limsup_{r \rightarrow 1} \left| \int_{\partial G_r \cap \partial D_r} \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz - r \int_{E_r \cap E} \left( \frac{fF}{h} \right) (rz) dz \right| \leq 4\epsilon \|F\|_1$$

また、(3-13) と ルベーグの有界収束定理により、

$$(3-17) \quad r \int_{E_r \cap E} \left( \frac{fF}{h} \right) (rz) dz \longrightarrow \int_E \left( \frac{fF}{h} \right) (z) dz \quad (\text{as } r \rightarrow 1)$$

(3-8)(3-11)(3-16)(3-17) より、

$$(3-18) \quad \left| \int_{\Gamma} \frac{fF}{h} dz + \int_{\partial D} fF\bar{h} dz \right| \leq 10\epsilon \|F\|_1 \quad (F \in H_0^1)$$

(3-1),(3-2),(3-3),(3-4) より、

$$(3-19) \quad \left| \int_{\Gamma} \frac{fF}{h} dz \right| \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \int_{\Gamma} |F| |dz| \leq 2C\epsilon \|F\|_1 \quad (F \in H_0^1)$$

従って、(3-18),(3-19) より、

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial D} fF\bar{h} dz \right| &\leq \left| \int_{\Gamma} \frac{fF}{h} dz \right| + 10\epsilon \|F\|_1 \\ &\leq (10 + 2C)\epsilon \|F\|_1 \quad (F \in H_0^1) \end{aligned}$$

ここで、 $L^\infty/H^\infty \cong (H_0^1)^*$  であることから、上の評価を商ノルムでかくと、

$$\|f|h|^2 + hH^\infty\| = \|f\bar{h} + H^\infty\| \leq (10 + 2C)\epsilon$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned} \|f + hH^\infty\| &\leq \|f - f|h|^2\| + \|f|h|^2 + hH^\infty\| \\ &\leq \|f(1 - |h|^2)\| + (10 + 2C)\epsilon \\ &\leq \|2f(1 - |h|)\| + (10 + 2C)\epsilon \\ &\leq 2\epsilon + (10 + 2C)\epsilon \\ &\leq (12 + 2C)\epsilon \end{aligned}$$

$\epsilon$  は任意であるから、 $f \in \bar{P}$ .  $\square$

## References

- [1] W. Rudin, The closed ideals in an algebra of analytic functions, Canadian. J. Math. 9(1957),426-434.
- [2] R. Mortini, Closed and prime ideals in the algebras of bounded analytic functions, Bull. Austral. Math. Soc. 35(1987),213-229.
- [3] P. Gorkin and R. Mortini, Alling's conjecture on closed prime ideals. J. Funct. Anal. 148(1997),185-190.
- [4] J. Bourgain, On finitely generated closed ideals in  $H^\infty$ , Ann. Inst. Fourier. 35(1985),163-174.
- [5] D. Suárez, Čech cohomology and covering dimension for the  $H^\infty$  Maximal ideal space, J. Funct. Anal. 123(1994),233-263.
- [6] C. Guillory and D. Sarason, Division in  $H^\infty + C$ , Michigan Math. J. 28(1981),178-181.