View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Kyoto University Research Information Repository

KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

KYOTO UNIVERSITY

Title	Pfaff系に対するモノドロミー保存変形(Painleve系, 超幾何系, 漸近解析)
Author(s)	Haraoka, Yoshishige
Citation	数理解析研究所講究録 (2000), 1133: 124-134
Issue Date	2000-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/63731
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録
1133 巻 2000 年 124-134

Pfaff 系に対するモノドロミー保存変形

熊本大学理学部　原岡喜重（Yoshishige Haraoka）

R. Fuchs によるモノドロミー保存変形の計算で Painlevé 方程式 P_{VI} が得られたことから、変形理論の重要性が明らかになった。R. Fuchs が変形したのは $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ 上の 2 階 Fuchs 型方程式で、Riemann scheme で表すと

$$(0.1) \qquad \left\{\begin{matrix} x=0 & x=1 & x=t & x=\lambda & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 \\ a & b & c & 2 & \rho_2 \end{matrix}\right\}$$

に対応するものである。($x=\lambda$ は見掛けの特異点。) 変形理論はその重要性ゆえに、今日まで様々な拡張がなされてきている。拡張の方向を思いつくままに挙げてみると、

(1) 特異点の不確定度を上げるもの。(0.1) に対し特異点を合流していって不確定度を上げると、Painlevé 方程式 $P_V \sim P_I$ が得られる。
(2) (0.1) の縦の長さを伸ばす拡張。即ち、方程式の階数を上げる。
(3) (0.1) の横の長さを伸ばす拡張。即ち、特異点の個数を増やす。この拡張により、Painlevé 方程式の多変数版である Garnier 系が得られる。
(4) 単独高階方程式の代わりに、system に対する変形を行う。(Schlesinger 系など。)
(5) $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ を楕円曲線や一般の Riemann 面におきかえる。

このように様々な拡張が行われ、認識が深まってきているのだが、誰でも思い付きそうな素朴な拡張、つまり偏微分方程式（系）の変形（変形される方程式の独立変数の数を増やす方向の拡張）は実質的に未だなされていないように見受けられる。多変数化の中でも最も自然に思われるのは Pfaff 系に対する変形理論である。それが未だ計算されていないのは、誰も思い付かなかったからではなく、問題自身が困難を蔵しているからである。

本稿では、まず Pfaff 系の変形を行う際に出会う困難を説明し、常微分方程式に対する大久保理論の有用性を指摘したあと、具体的に与えた Pfaff 系に対してモノドロミー保存変形を計算する。得られた変形方程式は一体何者なのか、そもそも Pfaff 系の変形により何がつかまえられるのか、などについての考察を最後に行う。

§1. モノドロミー保存変形とは何だったか.

モノドロミー保存変形とは何だったかということを想い出しておこう。線形常微分方程式 E に、そのモノドロミー表現の共役類を対応させる写像 m を考える。E がパラメター $a,b,c,\ldots$ を含むとする: $E=E(a,b,c,\ldots)$。あるパラメター値 $(a_0,b_0,c_0,\ldots)$ におけるモノドロミー表現の共役類 $m(E(a_0,b_0,c_0,\ldots))=m_0$ を一つ固定する。

$$(1.1) \qquad m(E(a,b,c,\ldots))=m_0$$

であり続けるようにパラメター $a,b,c,\ldots$ を動かすとき、$a,b,c,\ldots$ 間に生じる関係を記述せよというのがモノドロミー保存変形である。方程式が含むパラメターとしては、各特異点における特性指数を決めるパラメター、特異点の位置、特性指数の決定に与らないパラメター（アクセサリー・パラメター）などが想定されている。モノドロミーが保存されているときは、当然各特性指数も保存されるので、特性指数の決定に与るパラメターは動くことはでき

ない。従ってとくに、方程式が rigid、即ち対応するモノドロミー表現が rigid local system になる、(別な言い方では方程式がアクセサリー・パラメターを持たない)、という場合には、モノドロミー保存変形は自明なものに限られる。例えば $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ 上 3 点に確定特異点を持つ 2 階方程式、いわゆる Riemann 方程式を考えると、そのモノドロミー表現の共役類は特性指数により完全に決まってしまうので、残っている動かせるパラメターは特異点の位置であるが、それらは自由に動いていただいて構わない、というのが(自明な)変形になる。だから自明でない意味のある変形をするには、まず変形される方程式がアクセサリー・パラメターを含んでいる必要がある。

ところが E がアクセサリー・パラメターを含むとしても、自明でない変形が可能とは限らない。今例えば a を特性指数の決定に与らないパラメターとしよう。a を a_0 から動かしたとき、一般にモノドロミー表現の共役類は変化する。そのとき残りのパラメター $b, c, \ldots$ たちがうまく連動することでモノドロミーが保たれるようにしたいわけだが、$b, c, \ldots$ たちがどんなにがんばっても m_0 が実現されるとは限らない。m_0 の実現が保証されるには、$a, b, c, \ldots$ が動くことであらゆる表現の共役類が実現できるようになっていればよい。そのためには、表現の共役類の moduli 空間の次元を、方程式の moduli 空間(パラメターの空間)の次元が下回らなければよい。例として、先の Riemann 方程式は rigid で自明な変形しか許さないから、$\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ 上 4 点に確定特異点を持つ 2 階方程式を考えよう。特性指数も込めて方程式のパラメターは 8 次元分あることが分かる。表現の共役類の moduli 空間の次元を計算しよう。$\pi_1(\mathbf{P}^1\mathbf{C} \setminus \{4 \text{ points}\})$ は 3 個の生成元を持つ自由群であるので、2 次元表現は $2^2 \times 3$ 次元空間をなし、共役類の空間に移ると $2^2 \times 3 - 3 = 9$ 次元となる。この場合は $9 > 8$ により、このままでは変形が保証されない。(0.1) ではこの差を補うべく、見かけの特異点 $x = \lambda$ が付け加えられている。

このように自明でない変形を考える際には、方程式の定義空間のトポロジー(基本群)が関わってくるのである。

さて以上の認識のもとに、線形 Pfaff 系の変形の可能性を考えよう。するとすぐに第一の障害に気づく。自明でない変形を行うには、アクセサリー・パラメターを含む Pfaff 系を持ってこないといけないのである。Pfaff 系は 2 変数以上の場合には、完全積分可能条件という厳しい条件を満たさないと意味がない。でたらめに書いた Pfaff 系は、殆どすべての場合この意味で意味がない。しかし完全積分可能な Pfaff 系を手に入れる方法はいくつかある。主なものは解から作る方法である。例えば積分表示や級数の形であらかじめ多変数関数を与えておき、それを解に持つ holonomic 系を構成することで Pfaff 系が得られる。しかしこの方法で得られる Pfaff 系は、解がもともと良い表示を持つことから分かるように、アクセサリー・パラメターを持たないものになってしまう。つまりこの方法では我々の望んでいる Pfaff 系は手に入らないのである。アクセサリー・パラメターを持つ Pfaff 系は、超越数に似ている。世の中の殆どすべての数が超越数であるにも拘わらず、誰かに数を言わせると、殆どすべての場合その数は代数的数であろう。しかし超越数の場合には、系統的に超越数を与える方法がある。例えば e^x という関数は、$x \in \bar{\mathbf{Q}} \setminus \{0\}$ のとき $e^x \notin \bar{\mathbf{Q}}$ となる、超越数を産み出す関数である。アクセサリー・パラメターを持つ Pfaff 系を系統的に産み出す "関数" はないだろうか。

第二の障害は、Pfaff 系の定義空間のトポロジーに起因する。例えば 2 変数であれば、定義空間としては $\mathbf{P}^2\mathbf{C} \setminus \{\text{divisors}\}$ の様なものが現れるであろうが、$\pi_1(\mathbf{P}^2\mathbf{C} \setminus \{\text{divisors}\})$ は最早自由群ではない。divisor が複雑であれば基本群をつかまえること自体難しくなろうし、divisors が lines の場合でも、生成元たちの間に関係式が生じる。そのような群の表現の共役類の moduli 空間の次元をどうやって計算するのであろうか。それが分からないと一体何個

のアクセサリー・パラメターを取り揃えておかないといけないかも分からない。

ここで大久保理論を想起するのは自然である。大久保理論とは、$\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ 上の Fuchs 型微分方程式を標準形（Okubo normal form）にもっていくことで、そのモノドロミー表現がきまる様子をつまびらかにする、というものであるが、その本質的な部分は、方程式の係数とモノドロミー表現とが、同じからくりできまるという指摘にある。従ってモノドロミー表現の共役類の空間の次元とパラメターの個数とが一致することが分かる。パラメターの個数を調整したりする必要は無いのである。この観点からすると、Okubo normal form とはモノドロミー保存変形をするためにあるような標準形なのである。

なおここで Klarès の仕事 [Kl] に言及するべきであろう。[Kl] では $\mathbf{P}^m\mathbf{C}$ 上の Pfaff 系のモノドロミー保存変形が考察されている。しかし例として挙げられているのは Appell の F_1 の方程式であり、これはアクセサリー・パラメターを含んでいない、つまり自明な変形しか許さないものである。上で述べた第一の障害をクリアしていないように見受けられる。

§2. 横山の Pfaff 系.

横山 [Y1] は、大久保理論及び Barnes 積分の接続問題の解析を通して新しい Pfaff 系を発見した。A, T を $n\times n$ 定数行列で、

$$(A-\rho_1 I_n)(A-\rho_2 I_n)=O, \tag{2.1}$$

$$T \text{ は対角行列} \tag{2.2}$$

を満たすものとする。ここに$\rho_1, \rho_2 \in \mathbf{C}$, $\rho_1 \neq \rho_2$。このとき横山の Pfaff 系は次で与えられる。

$$\begin{gathered} dZ=\Omega Z, \\ \Omega=(xI_n-T)^{-1}Adx+(A-(\rho_1+\rho_2)I_n)(yI_n-T)^{-1}dy-A\frac{d(x-y)}{x-y}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

この Pfaff 系は、Euler-Darboux 方程式の特異境界値問題とも関係しており、超幾何関数の理論で重要な役割を果たすことが最近分かってきたのであるが ([Y3], [H])、本稿の興味からすると、特筆すべきは、条件 (2.1) のおかげで (2.3) が完全積分可能になることである。(2.3) は Okubo normal form の常微分方程式系

$$(xI_n-T)\frac{dX}{dx}=AX \tag{2.4}$$

に由来しており、ということは、(2.3) は解から構成したのではなく、はじめから方程式として構成された完全積分可能系なのである。この点に注目したい。つまり、(2.3) は完全積分可能であり、かつアクセサリー・パラメターを持つ可能性があるのである。その可能性を考察する。

常微分方程式系 (2.4) の rigidity は、A, T の Jordan 標準形に対応する n の分割により記述できる。(2.1)、(2.2) により、A, T は

$$A\sim\begin{pmatrix}\rho_1 I_{m_1} & \\ & \rho_2 I_{m_2}\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}t_1 I_{n_1} & & & \\ & t_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_p I_{n_p}\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

となっているとしてよい。ここで $(m_1, m_2) =: \bar{m}$、$(n_1, n_2, \ldots, n_p) =: \bar{n}$はともに n の分割。

$$a(n;\bar{n},\bar{m}) = n^2 - n + 2 - \sum_{k=1}^{p} {n_k}^2 - \sum_{i=1}^{2} {m_i}^2 \tag{2.6}$$

とおく。(2.4) が既約であれば $a(n;\bar{n},\bar{m}) \geq 0$ となるが、このとき

$$(2.4) \text{ が rigid } \iff a(n;\bar{n},\bar{m}) = 0$$

が成り立つ ([Oku], [Ka])。[Y1] において横山は、$a(n;\bar{n},\bar{m}) = 0$ であれば Pfaff 系 (2.3) も rigid であることを示しており、[Y1], [Y2] ではその場合のモノドロミー表現を具体的に求めている。一方我々の興味からすると、$a(n;\bar{n},\bar{m}) > 0$ のとき、Pfaff 系 (2.3) もアクセサリー・パラメターを持ってくれるだろうか、という点が知りたい。この点について [Y1] では即答が避けられ、その事情がコメントされている。そのコメントを勘案して計算してみたところ、肯定的な解答に到達した。即ち、

定理 2.1. ([HY]) $n = 2$ のときのある特別な場合を除くと、

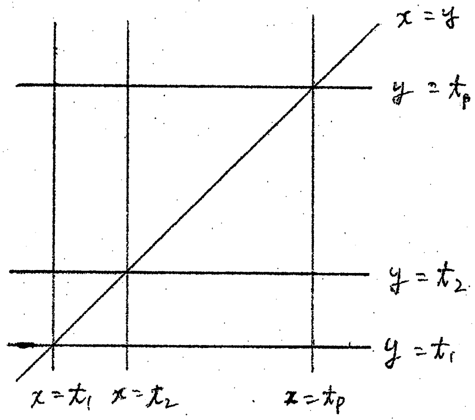
$$(2.3) \text{ が rigid } \iff a(n;\bar{n},\bar{m}) = 0.$$

以下この定理について大まかに説明しよう。

(2.3) の特異点集合は、$\mathbf{C}^2$上で考えると

$$S = \bigcup_{k=1}^{p} (\{(x,y); x = t_k\} \cup \{(x,y); y = t_k\}) \cup \{(x,y); x = y\}.$$

となる。



(2.3) のモノドロミー表現の rigidity を測るため、まず基本群$\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus S)$ を計算する。基点 (x_0, y_0) をとり、$\{x = t_k\}$ を回る loop μ_k $(1 \leq k \leq p)$、$\{y = t_k\}$ を回る loop ν_k $(1 \leq k \leq p)$、$\{x = y\}$ を回る loop μ_0をうまく定める。詳しい定義は [Y1, §3.] 参照のこと。すると Arvola の方法 ([OT, §5.3.]) により、$\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus S)$ の表示が得られる。自由群の元 u, v, w に対して、

$$[u,v] = \{uv = vu\}, \quad [u,v,w] = \{uvw = vwu = wuv\}, \quad u^v = v^{-1}uv$$

と定めよう。

命題 2.2.

$$
\begin{aligned}
\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus S, (x_0, y_0)) = \langle \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p \,\big| \\
\bigcup_{\substack{1\le i,j\le p\\ i\ne j}} [\nu_j, \mu_i] \cup \bigcup_{k=1}^{p} [\nu_k, {\mu_0}^{\mu_p\mu_{p-1}\cdots\mu_{k+1}}, \mu_k] \rangle .
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

[Y1] では (2.3) の巧妙な基本解行列が構成されていて、それに関する回路行列を、μ_kに対応するものを M_k $(0 \le k \le p)$、ν_kに対応するものを N_k $(1 \le k \le p)$ とするとき

$$
\begin{aligned}
M_k &= \begin{pmatrix}
I_{n_1} & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & I_{n_{k-1}} & & & & \\
M_{k1} & \cdots & M_{k,k-1} & M_{kk} & M_{k,k+1} & \cdots & M_{kp} \\
& & & & I_{n_{k+1}} & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & I_{n_p}
\end{pmatrix}, \\
N_k &= \begin{pmatrix}
I_{n_1} & & & N_{1k} & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & \\
& & I_{n_{k-1}} & N_{k-1,k} & & & \\
& & & N_{kk} & & & \\
& & & N_{k+1,k} & I_{n_{k+1}} & & \\
& & & \vdots & & \ddots & \\
& & & N_{pk} & & & I_{n_p}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

という形に$\bar{n} \times \bar{n}$-block 分割される。$x = \infty$、$y = \infty$、$x = y$ における局所解析の結果、

$$
\begin{aligned}
& M_1 M_2 \cdots M_p M_0 = I_n, \\
& N_p N_{p-1} \cdots N_1 M_0 = e^{-2\pi\sqrt{-1}(\rho_1+\rho_2)} I_n, \\
& M_0 \sim \begin{pmatrix} e^{-2\pi\sqrt{-1}\rho_1} I_{m_1} & \\ & e^{-2\pi\sqrt{-1}\rho_2} I_{m_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

が成り立つことが分かる。(2.8)、(2.9) を用いると、$N_1, N_2, \ldots, N_p$は $M_1, M_2, \ldots, M_p$から多項式的に決まることが示される。

ところで、常微分方程式系 (2.4) の方の基本解行列で、上と同じ $M_0, M_1, \ldots, M_p$を回路行列とするものが存在することが分かる。従って $a(n; \bar{n}, \bar{m}) = 0$ ならば (2.4) は rigid で、$M_0, M_1, \ldots, M_p$は一斉に共役をとる不定性を除いて決まり、すると上で注意したことから $N_1, N_2, \ldots, N_p$も共役を除いて決まってしまう。即ち Pfaff 系 (2.3) も rigid になる。この部分は既に [Y1] で示されている通りである。

一方 $a(n;\bar{n},\bar{m})>0$ とすると、(2.4) は rigid でなく、$M_0,M_1,\dots,M_p$ は共役を除いても決まらない。よって Pfaff 系 (2.3) も rigid でないと考えられるが、[Y1, Remark 3.1.] に指摘してあるのは、この場合、命題 2.2 にある生成元の関係式に由来する M_i,N_j 間の関係式（例えば $M_iN_j=N_jM_i$ $(1\le i,j\le p,\ i\ne j)$）が新しい条件を $M_0,M_1,\dots,M_p$ に課すことになると、M_i たちが決まってしまう可能性も出てくるのではないかという点である。[HY] では、命題 2.2 に由来する関係式はすべて (2.8)、(2.9) に従属であることを示してあり、その懸念が起きないことを確かめたのである。

こうして、$n,\bar{n},\bar{m}$ の選び方により、我々はアクセサリー・パラメターを持つ完全積分可能系の無限系列を手に入れることができたのである。また上で述べたように、回路行列の決定には基本群の生成元の関係式が与らないのであるから、Pfaff 系の変形を行う際の第二の障害もクリアされるのである。

§3. 横山 Pfaff 系のモノドロミー保存変形.

p が小さくて $a(n;\bar{n},\bar{m})>0$ となる簡単な場合として、

$$n=6,\ p=3,\ \bar{n}=(n_1,n_2,n_3)=(2,2,2),\ \bar{m}=(m_1,m_2)=(3,3)$$

の場合を考えよう。このとき $a(n;\bar{n},\bar{m})=2$ となり、(2.3) はアクセサリー・パラメターを 2 個含んでいることになる。変数変換や gauge 変換を適当に行うことで、A,T は次のようにとることができる。

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc|cc} \alpha_1 & & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A_{12}}} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_{13}}} \\ & \alpha_2 & & & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A_{21}}} & \beta_1 & & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_{23}}} \\ & & & \beta_2 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A_{31}}} & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A_{32}}} & \gamma_1 & \\ & & & & & \gamma_2 \end{array}\right), \tag{3.1}$$

$$T=\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & t & \\ & & & & & t \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

後の都合上、

$$A_{11}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \\ & \alpha_2\end{pmatrix},\quad A_{22}=\begin{pmatrix}\beta_1 & \\ & \beta_2\end{pmatrix},\quad A_{33}=\begin{pmatrix}\gamma_1 & \\ & \gamma_2\end{pmatrix}$$

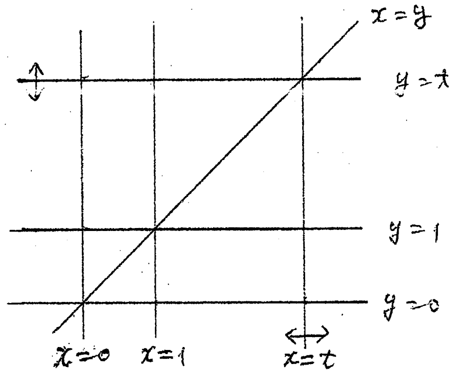
とおいておく。いま

$$\begin{aligned}\Omega &= (xI_6-T)^{-1}Adx+(A-(\rho_1+\rho_2)I_6)(yI_6-T)^{-1}dy-A\frac{d(x-y)}{x-y} \\ &= Pdx+Qdy\end{aligned} \tag{3.3}$$

とおく。Pfaff 系

$$dZ = \Omega Z \tag{3.4}$$

のモノドロミー保存変形を行いたいのだが、変形パラメターの取り方には標準的なものはない。ここでは常微分方程式の場合を模して、特異点集合を記述する量 t を変形パラメターに採用してみる。



$Z(x,y,t)$ をモノドロミー保存解とする。即ち、$Z(x,y,t)$ は (3.4) の基本解行列であり、$Z(x,y,t)$ に関する (3.4) の回路行列が t に依存しないとする。

$$B = \frac{\partial Z}{\partial t} Z^{-1} \tag{3.5}$$

とおくと、Z に関する回路行列が t に依存しないことから、B は $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ 上一価となり、(x,y) に関する有理関数になることが分かる。(3.4)、(3.5) により、$Z(x,y,t)$ は次を満たすことになる。

$$\begin{cases} dZ = \Omega Z, \\ \dfrac{\partial Z}{\partial t} = BZ. \end{cases} \tag{3.6}$$

これの積分可能条件より、

$$\begin{cases} P_t - B_x + [P,B] = 0, \\ Q_t - B_y + [Q,B] = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

が得られる。(3.5)、(3.7) を用いると、(x,y) に関する有理関数 B の形がかなり決まってくる。((3.5) の具体的な使い方については、[IKSY, Chapter 3, §4.4] 参照。) 結果を書くと、

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & O & \frac{y}{t(t-y)} A_{13} \\ O & B_{22} & \frac{y-1}{(t-1)(t-y)} A_{23} \\ \frac{x}{t(t-x)} A_{31} & \frac{x-1}{(t-1)(t-x)} A_{32} & \frac{1}{t-x} A_{33} + \frac{1}{t-y}(A_{33} - (\rho_1 + \rho_2) I_2) + B_{33} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

となる。ここで B_{ii} たちは、

$$B_{11} = \begin{pmatrix} b_{11} & \\ & b_{22} \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} b_{33} & \\ & b_{44} \end{pmatrix}, \quad B_{33} = \begin{pmatrix} b_{55} & \\ & b_{66} \end{pmatrix}$$

という対角行列であるが、その要素 $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{66}$ は (x,y) に関しては定数であるが、t の関数としては未定である。つまり B は、対角成分に不定性を残して決まる。とりあえずこれをそのまま (3.7) へ代入することにより、次の変形方程式が得られる。

$$
(3.9)\qquad
\begin{aligned}
&(A_{12})_t - B_{11}A_{12} + A_{12}B_{22} - \frac{1}{t(t-1)}A_{13}A_{32} = O,\\
&(A_{13})_t - B_{11}A_{13} + A_{13}B_{33} - \frac{1}{t}A_{11}A_{13} - \frac{1}{t-1}A_{12}A_{23} + \frac{1}{t}A_{13}A_{33} = O,\\
&(A_{21})_t - B_{22}A_{21} + A_{21}B_{11} + \frac{1}{t(t-1)}A_{23}A_{31} = O,\\
&(A_{23})_t - B_{22}A_{23} + A_{23}B_{33} - \frac{1}{t}A_{21}A_{13} - \frac{1}{t-1}A_{22}A_{23} + \frac{1}{t-1}A_{23}A_{33} = O,\\
&(A_{31})_t - B_{33}A_{31} + A_{31}B_{11} + \frac{1}{t}A_{31}A_{11} + \frac{1}{t-1}A_{32}A_{21} - \frac{1}{t}A_{33}A_{31} = O,\\
&(A_{32})_t - B_{33}A_{32} + A_{32}B_{22} + \frac{1}{t}A_{31}A_{12} + \frac{1}{t-1}A_{32}A_{22} - \frac{1}{t-1}A_{33}A_{32} = O.
\end{aligned}
$$

(3.9) は B_{11}, B_{22}, B_{33} という未定の要素を含んでいるので、方程式としては確定していない。この不定性は、次の様にして消すことができる。

$$
(3.10)\qquad c_i = e^{-\int^t b_{ii}(\tau)d\tau} \quad (1 \le i \le 6)
$$

により $c_1, c_2, \ldots, c_6$ を定め、

$$
C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_6)
$$

とおく。更に

$$
C_1 = \begin{pmatrix} c_1 & \\ & c_2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} c_3 & \\ & c_4 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} c_5 & \\ & c_6 \end{pmatrix}
$$

とおいておこう。Z の代わりに $\bar{Z} = CZ$ を考える。$\bar{Z}$ は (3.3) において A を $\bar{A} = CAC^{-1}$ でおきかえた 1-form $\bar{\Omega}$ を用いた Pfaff 系

$$
(3.11)\qquad d\bar{Z} = \bar{\Omega}\bar{Z}
$$

を満たす。Z が (3.4) のモノドロミー保存解であるとき、明らかに $\bar{Z}$ は (3.11) のモノドロミー保存解である。さて、定義により

$$
\bar{A} = \begin{pmatrix}
\alpha_1 & & \bar{A}_{12} & & \bar{A}_{13} & \\
& \alpha_2 & & & & \\
\bar{A}_{21} & & \beta_1 & & \bar{A}_{23} & \\
& & & \beta_2 & & \\
\bar{A}_{31} & & \bar{A}_{32} & & \gamma_1 & \\
& & & & & \gamma_2
\end{pmatrix},
$$

$$
(3.12)\qquad \bar{A}_{ij} = C_i A_{ij} C_j^{-1} \quad (1 \le i, j \le 3,\ i \ne j)
$$

となる。(3.10)、(3.12) より、

$$(\bar{A}_{ij})_t = -C_iB_{ii}A_{ij}C_j{}^{-1} + C_i(A_{ij})_tC_j{}^{-1} + C_iA_{ij}B_{jj}C_j{}^{-1} \tag{3.13}$$

が従う。新しい Pfaff 系 (3.11) に対して変形方程式を導こう。それには、(3.9) を$\bar{A}_{ij}$たちについて書き下せばよい。(3.12)、(3.13) を用いることで、次の変形方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
&(\bar{A}_{12})_t - \frac{1}{t(t-1)}\bar{A}_{13}\bar{A}_{32} = O,\\
&(\bar{A}_{13})_t - \frac{1}{t}\bar{A}_{11}\bar{A}_{13} - \frac{1}{t-1}\bar{A}_{12}\bar{A}_{23} + \frac{1}{t}\bar{A}_{13}A_{33} = O,\\
&(\bar{A}_{21})_t + \frac{1}{t(t-1)}\bar{A}_{23}\bar{A}_{31} = O,\\
&(\bar{A}_{23})_t - \frac{1}{t}\bar{A}_{21}\bar{A}_{13} - \frac{1}{t-1}A_{22}\bar{A}_{23} + \frac{1}{t-1}\bar{A}_{23}A_{33} = O,\\
&(\bar{A}_{31})_t + \frac{1}{t}\bar{A}_{31}A_{11} + \frac{1}{t-1}\bar{A}_{32}\bar{A}_{21} - \frac{1}{t}A_{33}\bar{A}_{31} = O,\\
&(\bar{A}_{32})_t + \frac{1}{t}\bar{A}_{31}\bar{A}_{12} + \frac{1}{t-1}\bar{A}_{32}A_{22} - \frac{1}{t-1}A_{33}\bar{A}_{32} = O.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

(3.14) は未定の要素を含まず、確定した方程式となる。即ち、(3.3) の持つ対角変換に関する共変性を利用することで、元々あった不定性を殺すことができたのである。

§4. 大久保標準形の常微分方程式のモノドロミー保存変形.

モノドロミー保存変形の新局面を Pfaff 系の変形により切り拓こうという問題意識からすると、とりあえず得られた変形方程式 (3.14) が常微分方程式の変形とどう関係するのかを調べる必要がある。結論から言うと、それは対応する大久保標準形の常微分方程式（大久保 system と呼ぼう）の変形方程式に一致する。そのことをまず確かめてみよう。

Pfaff 系 (2.3) と大久保 system (2.4) は形式的には（見掛け上は）対応しているが、解析的にも、(2.3) を $y=\infty$ に制限すると (2.4) が得られるということで対応している。そこで (3.1)、(3.2) の A,T による大久保 system

$$(xI_6 - T)\frac{dX}{dx} = AX \tag{4.1}$$

の変形を計算してみる。変形パラメターには t を採用する。モノドロミー保存解を X とし、

$$B = \frac{\partial X}{\partial t}X^{-1}$$

とおいて、

$$\begin{cases}\dfrac{\partial X}{\partial x} = (xI_6 - T)^{-1}AX,\\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial t} = BX\end{cases}$$

の両立条件を調べていくと、

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & O & \frac{-1}{t}A_{13} \\ O & B_{22} & \frac{-1}{t-1}A_{23} \\ \frac{x}{t(t-x)}A_{31} & \frac{x-1}{(t-1)(t-x)}A_{32} & \frac{1}{t-x}A_{33}+B_{33} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

を得る。ここで B_{11}, B_{22}, B_{33} は定数対角行列。これは Pfaff 系の変形の時の B ((3.8) 式) で $y=\infty$ としたものと一致する。この B により変形方程式を導出し、対角変換による不定性の抹殺を行うと、A に対する方程式として (3.14) が得られる。

Pfaff 系 (3.4) は、別のルートでも常微分方程式に対応する。例えば (3.4) の $y=y_0$ $(y_0 \neq 0,1,t,x,\infty)$ における切り口を考えると、

$$\frac{dZ}{dx} = \left[(xI_6 - T)^{-1}A - \frac{A}{x-y_0}\right]Z \tag{4.3}$$

となるが、この方程式の特異点は $x=0,1,t,y$ であり、$x=\infty$ は正則点になっている。y を ∞ へ移してやれば、(4.3) は (4.1) と同じになる。つまり (4.3) は見掛け上 2 個の変形パラメター t,y を含んでいるが、$\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ の自己同型による normalization で実質的には 1 パラメター t しか含まない。

$x=x_0$ $(x \neq 0,1,t,y,\infty)$ への制限は、少し違った様子を見せる。方程式は

$$\frac{dZ}{dy} = \left[(A-(\rho_1+\rho_2)I_6)(y-T)^{-1} + \frac{A}{x-y}\right]Z \tag{4.4}$$

となるが、これは特異点が $y=0,1,t,x,\infty$ と 5 個あるので、変形パラメターが 2 個残る。t と y を変形パラメターとし、変形方程式を導こう。即ち $Z(y)$ をモノドロミー保存解として、

$$B = \frac{\partial Z}{\partial t}Z^{-1}, \quad C = \frac{\partial Z}{\partial x}Z^{-1}$$

とおき、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial y} = \left[(A-(\rho_1+\rho_2)I_6)(y-T)^{-1} + \dfrac{A}{x-y}\right]Z, \\ \dfrac{\partial Z}{\partial t} = BZ, \\ \dfrac{\partial Z}{\partial x} = CZ \end{cases}$$

の両立条件を調べていく。このときは、B として (3.8) と同一のものが得られることから、やはり (3.14) へ至る。

こうして Pfaff 系 (3.4) の変形は、常微分方程式 (4.1) の変形で記述されてしまうことが分かった。完全積分可能性や基本群の生成元の関係式に対する都合の良い振る舞いは、Pfaff 系 (3.4) の常微分方程式とのつながりの深さを表していると思うと、これは予想されたことでもあろう。しかし今回の計算では変形パラメターの採り方までも常微分方程式に合わせていることを考えると、常微分方程式ではない (真に 2 変数的な) 変形パラメターを構成できれば、新しい変形方程式が得られる可能性も残されているかもしれない。

また翻って変形方程式 (3.14) を眺めると、これは常微分方程式の変形方程式でもあるが、だからといって正体が分かったわけではない。(3.1) で与えられる A には

$$A \sim \begin{pmatrix} \rho_1 I_3 & \\ & \rho_2 I_3 \end{pmatrix}$$

という制限条件が課されており、また t に関しても定数であるような対角変換による不定性を持つ。それらを勘案すると、アクセサリー・パラメターの個数が 2 個ということになり、従って (3.14) は実質的に 2 階常微分方程式となる筈である。2 階常微分方程式で $t = 0, 1, \infty$ に動かない特異点を持つ変形方程式となるから、Painlevé 方程式 P_{VI} と関係しているように思われる。しかし P_{VI} がパラメターを 4 個しか含まないのに対し、(3.14) はパラメターを実質 7 個含む ($\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \rho_1, \rho_2$、これらの間に

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 3\rho_1 + 3\rho_2$$

という関係式がある)。この点での違いは確かにありそうだ。

(3.14) の正体をより直接的に調べる方法として、特殊解を探すという手もある。パラメター $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \ldots, \rho_2$ には、変形方程式の導出のときには然るべき非整数条件が課されていたが、方程式が得られた後では、それをゆるめることにより簡単な特殊解が見つかることが期待される。一方 (3.14) に対する Schlesinger 変換を構成し、パラメターを整数分ずらすときの解の対応を調べれば、一つ見つけた特殊解より、特殊解の系列が得られる。この系列を眺めることで、既知の変形方程式と比較することができるであろう。

References.

[H] Y. Haraoka: Integral representations of solutions of differential equations free from accessory parameters, in preparation.

[HY] Y. Haraoka and T. Yokoyama: On rigidity of Pfaffian systems coming from Okubo systems, preprint.

[IKSY] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida: *From Gauss to Painlevé*, Vieweg, 1991.

[Ka] N. M. Katz: *Rigid Local Systems*, Princeton Univ. Press, 1996.

[Kl] B. Klarès: Sur la monodromie des systèmes de Pfaff du type de Fuchs sur $\mathbf{P}_m(\mathbf{C})$, Lecture Notes in Math., **712**, 293-324, Springer-Verlag, 1979.

[Oka] K. Okamoto: パンルヴェ方程式序説, 上智大学数学講究録, no. 19, 1985.

[Oku] K. Okubo: On the group of Fuchsian equations, Seminar Reports of Tokyo Metropolitan Univ., 1987.

[OT] P. Orlik and H. Terao: *Arrangements of Hyperplanes*, Springer-Verlag, 1992.

[Yok1] T. Yokoyama: A system of total differential equations of two variables and its monodromy group, Funkcial. Ekvac., **35** (1992), 65-93.

[Yok2] T. Yokoyama: Monodromy groups of systems of total differential equations of two variables, SIAM J. Math. Anal., **28** (1997), 1227-1247.

[Yok3] T. Yokoyama: On extension and restriction of Okubo systems, preprint.