Title	Ratio of ergodic sums for one-dimensional maps with indifferent fixed points (Singular phenomena of dynamical systems)
Author(s)	井上, 友喜
Citation	数理解析研究所講究録 (1999), 1118: 31-36
Issue Date	1999-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/63458
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1118巻 1999年 31-36

Ratio of ergodic sums for one-dimensional maps with indifferent fixed points

愛媛大学工学部　井上 友喜 (Tomoki Inoue)

1. 状況の設定と以前の結果の説明

まず，例として次のような写像を考えよう．

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{for } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \dfrac{2x-1}{x} & \text{for } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

この写像は 0と1が indifferent fixed points (微分係数が1の不動点)で，$\mu(D) = \int_D \frac{1}{x(1-x)} \mathrm{Leb}(dx)$ とおくと，μ がエルゴード的不変測度となることが知られている．したがって，小さな $\epsilon>0$ に対して $\mu([0,\epsilon]) = \infty$, $\mu([1-\epsilon, 1]) = \infty$ である．

この写像を少し一般化して，次のような写像を考える．(本当はもっと一般化して議論することができる．) $0 < c < 1$とし，$T : [0,1] \to [0,1]$ は次の条件を満たすとする：

(i) Tを区間 $(0,c)$ と $(c,1)$ に制限したものは C^2classで，それぞれ$(0,c]$ と $[c,1)$ へ C^2関数として拡張できる;

(ii) $T(0) = 0$, $T(1) = 1$;

(iii) $T(0,c)=(0,1)$, $T(c,1)=(0,1)$;

(iv) $T'(x)>1$ for $x\neq 0,c,1$.

注意 1. 写像 T は, ルベーグ測度と絶対連続な σ-有限エルゴード的不変測度 μ をもち, $\mu([0,1]\setminus(A\cup B))<\infty$ である. (cf. [I3], [T])

さらに, A, B をそれぞれ 0 の小さな近傍, 1 の小さな近傍とし,

$$T(x)-x=\theta_0x^{d_0}+o(x^{d_0})\quad \text{in } A,$$

$$x-T(x)=\theta_1(1-x)^{d_1}+o((1-x)^{d_1})\quad \text{in } B$$

を満たすとする. ただし, $\theta_0>0$, $\theta_1>0$, $d_0\geq 1$, $d_1\geq 1$ は定数である.

条件(i)-(iv)を満たす写像 T において 0 または 1 が indifferent 不動点のとき, 軌道 $\{T^k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ には間欠カオスが見られる.

次のことに注意しておこう.

注意 2. $d_0\geq 2$ と $\mu(A)=\infty$ は同値, また, $d_1\geq 2$ と $\mu(B)=\infty$ は同値である. (cf.[I1], [I2], [I3], [T])

この写像 T に対して, 以前次の極限を考えた.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}1_A(T^k(x))}{\sum_{k=0}^{n}1_B(T^k(x))} \tag{1}$$

ここで, 1_A は A の定義関数である.

注意 2 により, d_0 と d_1 が共に 2 以上の場合は, 既存のエルゴード定理から極限(1)を得ることはできない. このような場合に, 極限(1)が存在するか, 存在する場合には極限値がどのようになるかを以前研究し, 次の定理 1~3 がわかっている.

定理 1 ([I4]). $2 \leq d_0 < d_1$ (or $2 \leq d_1 < d_0$) の場合．Leb-a.e.x に対して極限(1)は 0 (or ∞)となる．

定理 2 ([I4]). $d_0 = d_1 = 2$ の場合．Leb-a.e.x に対して，極限(1)は正の定数 ρ で

$$\rho = \frac{\theta_1 M_1}{\theta_0 M_2}$$

となる．ただし，$M_1 = \lim_{x \uparrow c} T'(x)$,　$M_2 = \lim_{x \downarrow c} T'(x)$ である．

定理 3 ([I5]). $d_0 = d_1 > 2$ の場合．Leb-a.e.x に対して，極限(1)は存在せず，

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} 1_A(T^k(x))}{\sum_{k=0}^{n} 1_B(T^k(x))} = \infty,$$
$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} 1_A(T^k(x))}{\sum_{k=0}^{n} 1_B(T^k(x))} = 0$$

となる．

2. 今回の問題と結果

前節の条件(i)-(iv)を満たし，0 の小さな近傍と 1 の小さな近傍において前節のように仮定した写像 T に対して，今回は次のような問題を考えよう．

問題. m_0, m_1 を非負の定数として，$1_A, 1_B$ に次のように重みをつける:

$$f_A(x) = x^{m_0} \cdot 1_A(x)$$

$$f_B(x) = (1 - x)^{m_1} \cdot 1_B(x).$$

このとき，m_0, m_1 の値によっては, 極限(1)が存在しない場合でも極限

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} f_A(T^k(x))}{\sum_{k=0}^{n} f_B(T^k(x))} \tag{2}$$

が Leb-a.e.x に対して存在することがあるだろうか.

もし, $f_A, f_B \in L^1(\mu)$ であれば, Hopfのエルゴード定理([A], [H])により, 極限(2)は a.e.x に対して $\int f_A d\mu / \int f_B d\mu$ であることがわかり, 何ら問題を生じない. そこで, まず, $f_A \in L^1(\mu)$ かどうかを判定する定理を述べておこう.

定理 4 ([I6]). $d_0 - m_0 < 2$ と $f_A \in L^1(\mu)$ は同値である.

当然, 同様のことは f_B についても成り立つ. $d_0 - m_0 \geq 2$ かつ $d_1 - m_1 \geq 2$ のときには, $\int f_A d\mu = \infty$, $\int f_B d\mu = \infty$ であるので, 既存のエルゴード定理から, 極限(2)を得ることができない. このような場合に下記の定理を得た.

定理 5 ([I6]). $2 \leq d_0 - m_0 < d_1 - m_1$ (or $2 \leq d_1 - m_1 < d_0 - m_0$)の場合. Leb-a.e.$x$ に対して極限(2)は 0 (or ∞) となる.

定理 6 ([I6]). $d_0 - m_0 = d_1 - m_1 = 2$の場合. Leb-a.e.$x$ に対して, 極限(2)は正の定数 ρ で

$$\rho = \frac{(d_1 - 1)^2 \theta_1 M_1}{(d_0 - 1)^2 \theta_0 M_2}$$

となる. ただし, $M_1 = \lim_{x \uparrow c} T'(x)$, $\quad M_2 = \lim_{x \downarrow c} T'(x)$ である.

$d_0 = d_1 > 2$ の場合, 極限(1)は存在しないが, 定理6により, $m_0 = m_1 = d_0 - 2$ であれば, 極限(2)が存在することがわかる.

3. 考えてきた写像の一般化

ここまで考えてきた写像 T を一般化することを考えよう.

写像 $T : [0,1] \to [0,1]$ は複数の不動点を含み, 次の条件を満たすとする:

(a) $0 = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_r = 1$ (不動点は $\cup_{i=0}^{r}\{c_i\}$ に属するようにしておく) に対して T を区間 (c_i, c_{i+1}) に制限したものは C^2 関数で，$[c_i, c_{i+1}]$ へ C^2 関数として拡張できる．この拡張したものを T_i とする;

(b) $T_i'(x) > 1$，x は T_i の不動点以外;

(c) $T([0,1]) = [0,1]$ Leb-a.e.で, T はルベーグ測度と同値なエルゴード的不変測度 μ をもつ．

((a), (b) をみたす T はルベーグ測度について絶対連続な不変測度 μ をもち，μ はエルゴード分解が可能で，各エルゴード成分が有限個の区間の和であるあることが最近の研究でわかっている([Z])．したがって，T がエルゴード的でないときは，エルゴード成分をとり，それを $[0,1]$ と思えばよい．)

このときにも，二つの不動点 p, q の十分小さな右近傍（または左近傍）をそれぞれ A，B とし，1節で述べたのと同様のことを仮定すると，上記の定理 2 および定理 6 の ρ の値を除き，定理 1～6 と同様の結果が成り立つ．なお，この場合の ρ の値は，一般には μ にも依存するが, 正定数であることに変りはない．

REFERENCES

[A] J.Aaronson. *An introduction to infinite ergodic theory.* Mathematical surveys and monographs **50**, AMS, 1997.

[H] E.Hopf. *Ergodentheorie.* Chelsea, New York, 1948.

[I1] T.Inoue. Asymptotic stability of densities for piecewise convex maps. *Ann. Polon. Math.* **LVII.1** (1992), 83-90.

[I2] T.Inoue. Weakly attracting repellors for piecewise convex maps. *Japan J. Indust. Appl. Math.* **9** (1992), 413-430.

[I3] T.Inoue. Ergodic theorems for piecewise affine Markov maps with indifferent fixed points. *Hiroshima Math. J.* **24** (1994), 447-471.

[I4] T.Inoue. Ratio ergodic theorems for maps with indifferent fixed points. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **17** (1997), 625-642.

[I5] T.Inoue. Sojourn times in small neighborhoods of indifferent fixed points of one-dimensional dynamical systems, to appear in *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*

[I6] T.Inoue. Ergodic sums of non-integrable functions under one dimensional dynamical systems with infinite invariant measures. In preparation.

[T] M.Thaler. Estimates of the invariant densities of endomorphisms with indifferent fixed points. *Israel J. Math.* **37** (1980), 304-314.

[Z] R.Zweimüller. Ergodic structure and invariant densities of non-Markovian interval maps with indifferent fixed points. *Nonlinearity* **11** (1998), 1263-1276.