Title	Some properties of Bernstein operators
Author(s)	高橋, 眞映
Citation	数理解析研究所講究録 (1999), 1100: 182-186
Issue Date	1999-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/63150
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1100巻 1999年 182-186

Some properties of Bernstein operators

山形大学工学部
高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)

線形位相空間 X のコンパクト凸部分集合 K 上の連続関数全体を $C(K)$ とし、次で定義される $C(K)$ 上の補間作用素列 $\{T_n : n=1,2,\cdots\}$ を考える：

$$(T_nf)(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_{n,k})h_{n,k}(x) \ \ (x\in K,\ f\in C(K)),$$

where $h_{n,k}$ $(0\le k\le n,\ n=1,2,\cdots)$ are functions in $C(K)$ which satisfy the following three conditions :

(i) $h_{n,k}(x)\ge 0$ $(x\in K, 0\le k\le n, n=1,2,\cdots)$,

(ii) $\sum_{k=0}^{n} h_{n,k}(x)=1$ $(x\in K,\ n=1,2,\cdots)$,

(iii) $\sum_{k=0}^{n} h_{n,k}(x)x_{n,k}=x$ $(x\in K,\ n=1,2,\cdots)$.

このとき Jensen の不等式から次の事が容易に分かる。

Lemma 1. If $T_1(f), T_2(f), \ldots$ and f are concave (resp. convex), then

$$T_n(f)\le f \ \ (\text{resp. } T_n(f)\ge f)$$

for all integer n.

我々は $\{T_nf : n=1,2,\cdots\}$ の振る舞いについてもう少し知りたいと言う願望がある。それには上の設定はあまりにも抽象的過ぎるので、具体的なものにつて考察する。その最適なものの一つに Bernstein 作用素がある。これについて考察してみる。先ず $\boldsymbol{R}^r$ を r 次元ユークリッド空間とし、その中の単位立方体

$$[0,1]^r=\{(x_1,x_2,\ldots,x_r)\in \boldsymbol{R}^r : 0\le x_k\le 1, k=1,2,\ldots,r\}$$

を考える。このとき $C([0,1]^r)$ 上の Bernstein 作用素とは次で定義される補間作用素のことである：

$$(B_{n,r}f)(x)=\sum_{k_1=0}^{n}\cdots\sum_{k_r=0}^{n} f\left(\frac{k_1}{n},\ldots,\frac{k_r}{n}\right)\prod_{j=1}^{r}\binom{n}{k_j}x_j^{k_j}(1-x_j)^{n-k_j}$$

$$(f\in C([0,1]^r)),\ (x=(x_1,x_2,\ldots,x_r)\in[0,1]^r).$$

また $\boldsymbol{R}^r$ の中の標準的単体

$$\Delta^r=\{(x_1,x_2,\ldots,x_r)\in \boldsymbol{R}^r : \sum_{k=1}^{r} x_k\le 1, x_k\ge 0,\ k=1,2,\ldots,r\}$$

を考える。このとき $C(\Delta^r)$ 上の Bernstein 作用素とは次で定義される補間作用素の

ことである：

$$(B_{n,r}f)(x) = \sum_{\substack{k_j \geq 0 \\ k_1+\dots+k_r \leq n}}^{n} f\left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_r}{n}\right)\binom{n}{<k_1, \dots, k_r>} x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r}(1-x_1-\cdots-x_r)^{n-k_1-\cdots-k_r}$$

$$(f \in C(\Delta^r),\ (x=(x_1, x_2, \dots, x_r) \in \Delta^r)$$

where $\binom{n}{<k_1, \dots, k_r>} = \dfrac{n!}{k_1! \cdots k_r!(n-k_1-\cdots-k_r)!}$ (cf. 竹之内 - 西白保 [2, p. 98-99]).

勿論これらの作用素は3条件 (i), (ii) and (iii) を満たすことは良く知られている。また凹凸の保存性や単調性との関連性も知られているが、ここでは分離的凹凸性と単調性について考察する。関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ を x_i $(i=1, 2, \cdots, r)$ だけの関数と見たときそれが凹 (凸) であれば、$f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ は分離的凹 (凸) であると言うことにする。このとき次の定理が成り立つ。

Theorem 2. Let K be $[0, 1]^r$ or Δ^r and $\{B_{n,r} : n = 1, 2, \dots\}$ the Bernstein operators on K. If f is a separetly concave (resp. separately convex) function on K, then each $B_{n,r}(f)$ is also separately concave (resp. separately convex) on K.

概証。$r=1$ の場合は分離的凹 (凸) 性と凹 (凸) 性 とは実際は同じ概念であるから、結果は良く知られている。それで $r=2$ の場合を示す（$r \geq 3$ については、$r=2$ の場合から推察されよう。）先ず $K=[0, 1]^2$ の場合は $r=1$ の場合の繰り返しであるから結果は容易に導かれる。次に $K=\Delta^2$ の場合について結果を示す。そこで今 $f \in C(\Delta^2)$ を任意に考え、

$$f_n = B_{n,2}(f) \ \ (n = 1.2, \cdots)$$

と置く。更に (x, y) を Δ^2 の任意の内点とする。このとき次式が成り立つ：

$$\frac{\partial f_n(x, y)}{\partial x} = \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j \leq n}} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{ij}\left(ix^{i-1}y^j(1-x-y)^{n-i-j} - (n-i-j)x^iy^j(1-x-y)^{n-i-j-1}\right)$$

$$= \sum_{\substack{i \geq 1, j \geq 0 \\ i+j \leq n}} if\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{ij}x^{i-1}y^j(1-x-y)^{n-i-j} - \sum_{\substack{i \geq 0, j \geq 0 \\ i+j \leq n-1}} (n-i-j)f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{ij}x^iy^j(1-x-y)^{n-i-j-1}$$

$$= \sum_{\substack{i \geq 0, j \geq 0 \\ i+j \leq n-1}}^{n} (i+1)f\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{(i+1)j}x^iy^j(1-x-y)^{n-1-i-j}$$

$$- \sum_{\substack{i \geq 0, j \geq 0 \\ i+j \leq n-1}} (n-i-j)f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{ij}x^iy^j(1-x-y)^{n-i-j-1}$$

$$= \sum_{\substack{i \geq 0, j \geq 0 \\ i+j \leq n-1}} \left((i+1)f\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{(i+1)j} - (n-i-j)f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{ij}\right)x^iy^j(1-x-y)^{n-1-i-j}$$

$$= \sum_{\substack{i \geq 0,\, j \geq 0 \\ i+j \leq n-1}} A(i, j) x^i y^j (1-x-y)^{n-1-i-j},$$

where $A(i, j) = (i+1) f\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{(i+1)\,j} - (n-i-j) f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{ij}$.

従って次式を得る：

$$\frac{\partial^2 f_n(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{\substack{i \geq 0,\, j \geq 0 \\ i+j \leq n-1}} A(i, j)\left(i x^{i-1} y^j (1-x-y)^{n-1-i-j} - (n-1-i-j)\, x^i y^j (1-x-y)^{n-2-i-j}\right)$$

$$= \sum_{\substack{i \geq 1,\, j \geq 0 \\ i+j \leq n-1}} A(i, j) i x^{i-1} y^j (1-x-y)^{n-1-i-j} - \sum_{\substack{i \geq 0,\, j \geq 0 \\ i+j \leq n-2}} A(i, j)(n-1-i-j) x^i y^j (1-x-y)^{n-2-i-j}$$

$$= \sum_{\substack{i \geq 0,\, j \geq 0 \\ i+j \leq n-2}} A(i+1, j)(i+1) x^i y^j (1-x-y)^{n-2-i-j}$$

$$- \sum_{\substack{i \geq 0,\, j \geq 0 \\ i+j \leq n-2}} A(i, j)(n-1-i-j) x^i y^j (1-x-y)^{n-2-i-j}$$

$$= \sum_{\substack{i \geq 0,\, j \geq 0 \\ i+j \leq n-2}} \left(A(i+1, j)(i+1) - A(i, j)(n-1-i-j)\right) x^i y^j (1-x-y)^{n-2-i-j}.$$

一方 $A(i, j) = (i+1) f\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{(i+1)\,j} - (n-i-j) f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{ij}$ に注意すれば次式を得る：

$$A(i+1, j)(i+1) - A(i, j)(n-1-i-j)$$

$$= (i+1)\left\{(i+2) f\left(\frac{i+2}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{(i+2)\,j} - (n-1-i-j) f\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{(i+1)\,j}\right\}$$

$$- (n-1-i-j)\left\{(i+1) f\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{(i+1)\,j} - (n-i-j) f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{ij}\right\}$$

$$= C f\left(\frac{i+2}{n}, \frac{j}{n}\right) + D f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - 2E f\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}\right),$$

where $C = (i+1)(i+2)\binom{n}{(i+2)\,j}$, $D = (n-1-i-j)(n-i-j)\binom{n}{ij}$ and

$E = (i+1)(n-1-i-j)\binom{n}{(i+1)\,j}$. このとき容易な観察で $C = D = E = \dfrac{n!}{i!\,j!\,(n-2-i-j)!}$ であるから、結局次式を得る：

$$\frac{\partial^2 f_n(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{\substack{i \geq 0,\, j \geq 0 \\ i+j \leq n-2}} \frac{n!}{i!\,j!\,(n-2-i-j)!}\left(f\left(\frac{i+2}{n}, \frac{j}{n}\right) + f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - 2 f\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}\right)\right) x^i y^j (1-x-y)^{n-2-i-j}.$$

それ故もし f が K 上で分離的凹 (resp. 分離的凸) ならば $\dfrac{\partial^2 f_n(x, y)}{\partial x^2} \leq 0$ (resp. ≥ 0) である。同様に $\dfrac{\partial^2 f_n(x, y)}{\partial y^2} \leq 0$ (resp. ≥ 0) である。従って f_n もまたK 上で分離的凹 (resp. 分離的凸) となる。 Q. E. D.

次の結果は関数の分離的凹凸性と対応する Bernstein 多項式列の単調性に関する結果である。

Theorem 3. Let $\{B_{n,r} : n = 1, 2, \ldots\}$ the Bernstein operators on $[0, 1]^r$. If f is a separately concave (resp. separately convex) function on $[0, 1]^r$, then

$$B_{1,r}(f) \leq B_{2,r}(f) \leq \ldots \leq B_{n,r}(f) \leq \ldots \leq f \ \ (\text{resp. } B_{1,r}(f) \geq B_{2,r}(f) \geq \ldots \geq B_{n,r}(f) \geq \ldots \geq f).$$

概証。 $r = 1$ の場合は分離的凹 (凸) 性と凹 (凸) 性とは実際は同じ概念であるから、結果は良く知られている。それで $r = 2$ の場合を示す ($r \geq 3$ については、$r = 2$ の場合から推察されよう。) 今 f を $[0, 1]^2$ 上の分離的凹関数とし、$(x, y) \in [0, 1]^2$ と自然数 n を固定し、次のような $[0, 1]$ 上の関数を考えよう：

$$g(t; i) = f\left(\frac{i}{n}, t\right) \ (0 \leq t \leq 1) \ \text{ and } \ h(s; y) = \sum_{j=0}^{n+1} f\left(s, \frac{j}{n+1}\right)\binom{n+1}{j} y^j (1-y)^{n+1-j} \ (0 \leq s \leq 1).$$

但し i は固定された添え字数である。これらの関数は勿論凹である。更に $[0, 1]$ 上の連続関数 φ に対して

$$(B_n \varphi)(t) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \ (0 \leq t \leq 1)$$

と置く。このとき、$r = 1$ の場合の結果を利用して次式を得る：

$$\begin{aligned}
(B_{n,2} f)(x, y) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \binom{n}{j} y^j (1-y)^{n-j} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \left(B_n g(t; i)\right)(y) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \left(B_{n+1} g(t; i)\right)(y) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} h\left(\frac{i}{n}; y\right) \\
&= \left(B_n h(s; y)\right)(x) \\
&\leq \left(B_{n+1} h(s; y)\right)(x)
\end{aligned}$$

$$=\sum_{i=0}^{n+1} h\left(\frac{i}{n+1};y\right)\binom{n+1}{i}x^i(1-x)^{n+1-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n+1} f\left(\frac{i}{n+1},\frac{j}{n+1}\right)\binom{n+1}{i}\binom{n+1}{j}x^i(1-x)^{n+1-i}y^j(1-y)^{n+1-j}$$

$$=(B_{n+1,2}f)(x,y)\,.$$

従って $B_{1,r}(f)\le B_{2,r}(f)\le\ldots\le B_{n,r}(f)\le\ldots$ である。この事実と Bernstein の多項式近似定理は $B_{1,r}(f)\le B_{2,r}(f)\le\ldots\le B_{n,r}(f)\le\ldots\le f$ を導く。分離的凸の場合も同様である。

Q. E. D.

注意。上の証明で f が分離的凹のとき、Bernstein の多項式近似定理を持ち出さなくても、直接計算して $B_{n,r}(f)\le f$ $(n=1,2,\ldots)$ を導くことが出来る。

次の結果は良く知られた結果であり、しかももっと一般的に成立する（cf. Altomare-Campiti [1, Corollary 6.1.15]）。

Theorem 4. Let $\{B_{n,r}: n=1,2,\ldots\}$ the Bernstein operators on Δ^r. If f is a concave (resp. convex) function on Δ^r, then

$$B_{1,r}(f)\le B_{2,r}(f)\le\ldots\le B_{n,r}(f)\le\ldots\le f\ \ (\text{resp. } B_{1,r}(f)\ge B_{2,r}(f)\ge\ldots\ge B_{n,r}(f)\ge\ldots\ge f).$$

上の結果については、多分 f が分離的凹 (resp. 凸) であれば成立しないと思われる。然しながらある種の凹 (resp. 凸) を満たせば成り立つことを証明することができる。詳しいことは割愛したい。

謝辞。本原稿を作成するに当たって貴重なご意見を賜わった琉球大学教授の西白保敏彦先生に感謝の意を表したい。

参考文献

1. F. Altomare and M. Campiti, Korovkin-type approximation theory and its applications, W. de Gruyter & Co., Berlin-New York, 1994.
2. 竹之内 - 西白保, 近似論　関数の近似, 培風館, 1986 年.