Title	Tunneling Estimates for Magnetic Schrodinger Operators (Spectral-scattering theory and related topics)
Author(s)	中村, 周
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1047: 113-120
Issue Date	1998-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/62171
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1047 巻 1998 年 113-120

Tunneling Estimates for Magnetic Schrödinger Operators

東大数理　中村　周　(Shu Nakamura)

前置き　磁場がない場合のシュレディンガー作用素にたいするトンネル効果については、深い研究がなされており、多くの場合について既に最善の評価が得られている。一方、磁場がある場合について知られている結果はかなり限定されている。つまり、磁場がない場合の評価と同じ評価を示すのは（多くの場合）難しくないが、それは最善の評価とは限らない。実は、磁場が存在することによって、固有関数の局在性 (localization) はかなり良くなる。言い換えると、トンネル効果はずっと小さくなるのである。ここでは、特別な場合についてそれを証明できることを紹介する。この結果の詳細については、論文 [11] に書かれている。

1　モデルと結果

ここでは、次のような平面 $\mathbb{R}^2$ 上のシュレディンガー作用素を考える。

$$H = (p - A(x))^2 + V(x) \quad \text{on} \quad L^2(\mathbb{R}^2)$$

ここで、$p = -i\hbar\partial_x$ が運動量作用素、$\hbar > 0$ はプランク定数、$V(x)$ はスカラー・ポテンシャル、$A(x)$ はベクトル・ポテンシャルで、磁場は

$$B(x) = \partial_1 A_2(x) - \partial_2 A_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

で与えられる。以下では、簡単のため $B(x) = B > 0$ を定数であると仮定する。つまり、定磁場中の粒子のみ考察しよう。（一般化については、後でコメントする。）我々の目標は、半古典極限 $\hbar \to 0$ における、この作用素の固有関数の大きさを評価することである。

以下、極座標を用いる：

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta, \quad r \geq 0, \theta \in \mathbf{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

仮定 A. (i) $V(x)$ は C^∞-級の simple-well であるとする。つまり、

$$V(0) = 0; \quad V(x) > 0 \quad \text{for } x \neq 0$$
$$\liminf_{|x|\to\infty} V(x) > 0.$$

(ii) $V(x)$ は回転について解析的である。正確には、ある $\tau > 0$ が存在して、$V(x)$ は $S_\tau = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| < \tau\}$ で正則な関数に拡張される。さらに、

$$\mathrm{Re}\, V(r,\theta) \geq f(r) > 0, \quad r > 0, \theta \in S_\tau.$$

を満たすと仮定する。

このとき次の定理が証明できる。

定理 1. V は仮定 A を満たすとする。ψ を固有値 E の固有関数であり、E は $\hbar \to 0$ のとき $E = o(1)$ を満たすと仮定する。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ と コンパクトな K に対して、定数 C が存在して

$$|\psi(x)| \leq C \exp[-(g(r) - \varepsilon)/\hbar], \quad x \in K, \hbar \in (0, 1]. \tag{1.1}$$

ただし、$g(r)$ は次で与えられる。

$$g(r) = \int_0^r \sqrt{f(s) + \frac{\delta^2 B^2 s^2}{4}} ds, \quad r > 0,$$
$$\delta = \frac{2\tau}{1 + 2\tau} \in (0, 1).$$

注意． (1) 次の結果は、よく知られている：Agmon distance を

$$h(x) = \inf \left\{ \int_0^1 \sqrt{V(\gamma(t))} \dot{\gamma}(t) dt \,\middle|\, \gamma(0) = 0, \gamma(1) = x \right\}.$$

とすると、

$$|\psi(x)| \leq C \exp[-(h(r) - \varepsilon)/\hbar], \quad x \in K, \hbar \in (0, 1],$$

が成立する。ここで、ε, K は定理と同様である。(cf. Helffer-Sjöstrand [3], Brummelhuis [1]). この評価は、磁場が無い場合と同じ評価であり、磁場の強さに依存しない評価である事に注意してほしい。

(2) 一方、磁場の強さ B が非常に強い場合は、

$$g(r) \geq \int_0^r \sqrt{\frac{\delta^2 B^2 s^2}{4}} ds = \frac{\delta B}{2} r^2$$

であるから、$g(r)$ は $h(r)$ より真に大きくなる。(一般には、どちらが大きいかは分からない。) つまり、より良い評価がこのような場合には得られる事になる。

(3) 上の定理は、x に関して局所的な評価だが、形を見ると、$|x| \to \infty$ で

$$|\psi(x)| \leq C \exp[-(\delta B/4 - \varepsilon) r^2/\hbar]$$

が成立すると予想できる。実際、これは（もう少しだけ強い条件の下で）成立する。(cf. [9])

(4) ポテンシャル V が回転対称な場合は、$\tau = \infty$, したがって $\delta = 1$ とする事ができる。いっぽう、$f(r) = V(r)$ だから、

$$g(r) = \int_0^r \sqrt{V(s) + \frac{B^2 s^2}{4}} ds > \int_0^r \sqrt{V(s)} ds = h(r).$$

が得られる。したがって、この場合は常により良い評価になる。実はこの場合は、変数分離により 1 次元の場合に帰着できるので、これが optimal な評価であることも分かる。

固有関数の評価が得られれば、ただちに double-well の固有値の評価に応用できる (cf. [2], [4])。ここでは、評価をぎりぎりまで良くすることは意図していない。磁場に依存する評価が得られることにだけ注目している。optimal な評価は、まだ将来の問題である。

仮定 B. (i) $V(x)$ は C^∞-級の symmetric double well であるとする。つまり、

$$V(x_1,x_2)=V(-x_1,x_2),\quad x\in\mathbb{R}^2$$

であり、$x^{(1)}$ と $x^{(2)}$ が存在して

$$x_1^{(1)}=-x_1^{(2)}\neq 0,\quad x_2^{(1)}=x_2^{(2)},\quad V(x^{(1)})=V(x^{(2)})=0,$$

そして、$x\neq x^{(1)},x^{(2)}$ に対して $V(x)>0$ が成立する。さらに、

$$\liminf_{|x|\to\infty} V(x)>0.$$

(ii) $V(x)$ は $x^{(j)}$, $(j=1,2)$ の近傍で解析的。

定理 2. V は仮定 B を満たすとする。E_0 と E_1 を H の（多重度もこめて）最も小さいふたつの固有値とする。すると $a,b>0$ と $C>0$ が存在して次を満たす。

$$|E_1-E_0|\leq C\exp[-(a+bB)/\hbar],\quad \hbar\in(0,1]. \tag{1.2}$$

定理 1 の証明のアイデア　定理 1 の証明の基本的なアイデアは、座標 x に依存する 重み関数を使って Agmon 評価を得る代わりに、r と角運動量 p_θ に依存する重み関数 $\rho(r,\theta)$ を用いて固有関数の評価を得ることにある。これは、いわゆる「相空間でのトンネル効果」の評価である。そのような理論としては、Agmon の方法の擬微分作用素への拡張 (cf. [10], [8]) と、Martinez らによる FBI 変換を用いた方法 (cf. [5], [6], [7]) があるが、ここでは前者の方法を採用している。具体的には、極座標系で θ 変数について Fourier 展開を行い、$L^2(\mathbb{R}_+)\otimes\ell^2(\mathbb{Z})$-空間上での擬微分作用素の計算を用いる。そして、

$$\mathrm{Re}\,[H_\rho]\equiv\mathrm{Re}\,\left[e^{\rho(r,p_\theta)/\hbar}He^{-\rho(r,p_\theta)/\hbar}\right]$$

が、0 から離れた領域で正値性を失わないように、($p(0,0)=0$ をみたし）なるべく大きな $\rho(r,p_\theta)$ を構成する。すると、

$$\rho(r,\eta)\geq g(r)-\varepsilon,\quad x\in K$$

とできることが分かる。あとは、Agmon の方法をなぞって固有関数の評価を行えば定理 1 は証明できる。

2 定理 1 の証明のスケッチ

2.1 Hamiltonian

磁場の強さ $B > 0$ に対して、ベクトルポテンシャル A を

$$A(x) = \left(-\frac{B}{2}x_2, \frac{B}{2}x_1\right).$$

と決めよう。すると、Hamiltonian は極座標系では、

$$H = p_r^2 + \left(\frac{p_\theta}{r} - \frac{Br}{2}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + V(r,\theta) \quad \text{on } L^2(drd\theta)$$

と書ける。ここで、 $p_r = -i\hbar\partial_r, p_\theta = -i\hbar\partial_\theta$ とした。これをさらに、Fourier 変換：

$$\mathfrak{F}u(\eta) = (2\pi\hbar)^{-1/2}\int_0^{2\pi} e^{-i\eta\theta/\hbar}u(\theta)d\theta, \quad u \in L^2(\mathbf{T}), \eta \in \hbar\mathbb{Z},$$

を用いて変換する。すると、Hamiltonian は次のようになる。

$$\begin{aligned} K &= \mathfrak{F}H\mathfrak{F}^{-1} \\ &= p_r^2 + \left(\frac{\eta}{r} - \frac{Br}{2}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + V(r, -p_\eta) \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2(\hbar\mathbb{Z}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

ただし、$\mathfrak{F}V\mathfrak{F}^{-1} = V(r, -p_\eta)$ は

$$V(r, -p_\eta)u(r,\eta) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}} e^{-i(\eta-\xi)\theta/\hbar}V(r,\theta)u(r,\xi)d\theta$$

で与えられ、η-変数に関する擬微分作用素とみなすことができる。もっと一般に、$a(\hbar;\cdot,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbf{T})$, $u \in C_0(\hbar\mathbb{Z})$ に対して、

$$a(\hbar;\eta,-p_\eta)u(\eta) = (2\pi\hbar)^{-1}\int_0^{2\pi}\sum_{\xi\in\hbar\mathbb{Z}} e^{-i(\eta-\xi)\theta/\hbar}a(\hbar;\eta,\theta)u(\xi)d\theta$$

と書く事にしよう。

さて、 $\rho(r,\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ が

$$|\partial_\eta\rho(r,\eta)| \le \tau, \quad r > 0, \eta \in \mathbb{R}$$

を満たすとき、$e^{\rho(r,\eta)}$ を weight として Hamiltonian を変換してみると、

$$\begin{aligned} K_\rho &\equiv e^{\rho(r,\eta)/\hbar}Ke^{-\rho(r,\eta)/\hbar} \\ &= (p_r + i\partial_r\rho(r,\eta))^2 + \left(\frac{\eta}{r} - \frac{Br}{2}\right)^2 + e^{\rho(r,\eta)/\hbar}V(r,-p_\eta)e^{-\rho(r,\eta)/\hbar} - \frac{\hbar^2}{4r^2} \end{aligned}$$

となる。ポテンシャルの項だけが分かりづらいが、実は

$$V_\rho \equiv e^{\rho(r,\eta)/\hbar} V(r,-p_\eta) e^{-\rho(r,\eta)/\hbar} = V(r,-p_\eta - i\partial_\eta \rho(r,\eta)) + O(\hbar)$$

であることが証明できる。これは、

$$e^{\rho(r,\eta)/\hbar} p_\eta e^{-\rho(r,\eta)/\hbar} = p_\eta + i\partial_\eta \rho(r,\eta)$$

である事から予想できるであろう。証明は、標準的な擬微分作用素の計算になる。したがって、

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,[K_\rho] &= p_r^2 + W_\rho + O(\hbar) \\ W_\rho &= \frac{1}{r^2}\left(\eta - \frac{Br^2}{2}\right)^2 - |\partial_r \rho|^2 + \mathrm{Re}\,[V(r,-p_r - i\partial_\eta \rho)] \end{aligned}$$

が分かる。以下では、$\rho(r,\eta)$ を、$(0,0)$ を除いて $W_\rho > 0$ であるように構成していく。

2.2 Weight function の構成

定理中にあるように、$\delta = 2\tau/(1+2\tau)$ とする。これは、$\tau = \delta/(2-2\delta)$ と同等であることに注意しよう。そして

$$\Omega_\delta = \left\{ (r,\eta) \,\middle|\, \frac{B}{2}r^2 - \eta \geq \delta\frac{B}{2}r^2 \right\} = \left\{ (r,\eta) \,\middle|\, \eta \leq (1-\delta)\frac{B}{2}r^2 \right\}.$$

という領域を考える。この領域は、Hamiltonian の中の $(\eta - Br^2/2)^2$ の項が十分大きいところである。ここでは、W_ρ の下からの評価を r 方向に積分してやる。それ以外の領域では、θ に関する解析性を利用して、η に関して線形な項を付け加える。つまり、次のようにおく。

$$\rho_0(r,\eta) = \begin{cases} g(r) = \displaystyle\int_0^r \sqrt{\delta^2 \frac{B^2 s^2}{4} + f(s)}\,ds & \text{if} \quad (r,\eta) \in \Omega_\delta \\ \tau\eta + g(r) - \dfrac{\delta B r^2}{4} & \text{if} \quad (r,\eta) \in \Omega_\delta^c. \end{cases}$$

ここで、

$$\tau\eta - \frac{\delta B r^2}{4} = \frac{\delta}{2(1-\delta)}\left(\eta - (1-\delta)\frac{Br^2}{2}\right)$$

なので、$\partial\Omega$ で ρ_0 は連続につながることに注意しよう。さらに、この式から

$$\rho_0(r,\eta) \geq g(r), \quad r > 0, \eta \in \mathbf{T}$$

も分かる。

さて、このとき $0 < \alpha < 1$ とおいて、$W_{\alpha\rho_0}$ がどうなるかを計算してみよう。まず $(r,\eta) \in \Omega_\delta$ の場合は、

$$\begin{aligned} W_{\alpha\rho_0} &= \frac{1}{r^2}\left(\eta - \frac{Br^2}{2}\right)^2 - |\partial_r(\alpha\rho_0(r,\eta))|^2 + \operatorname{Re} V(r,-p_r) \\ &\geq \frac{1}{r^2}\left(\delta\frac{Br^2}{2}\right)^2 - \alpha^2\left(\delta^2\frac{Br^2}{4} + f(r)\right) + f(r) \\ &\geq (1-\alpha^2)\left[\delta^2\frac{B^2r^2}{4} + f(r)\right] \geq (1-\alpha^2)f(r). \end{aligned}$$

一方、$(r,\eta) \in \Omega_\delta^c$ の場合は、

$$\begin{aligned} W_{\alpha\rho_0} &= \frac{1}{r^2}\left(\eta - \frac{Br^2}{2}\right)^2 - |\partial_r(\alpha\rho_0(r,\eta))|^2 + \operatorname{Re}\left[V(r,-p_r - i\partial_\eta\rho)\right] \\ &\geq -\alpha^2\left(\sqrt{\delta^2\frac{B^2r^2}{4} + f(r)} - \sqrt{\delta^2\frac{B^2r^2}{4}}\right)^2 + f(r) - O(\hbar) \\ &\geq (1-\alpha^2)f(r) - O(\hbar) \end{aligned}$$

このように、(少なくともシンボルのレベルでは)

$$K_{(\alpha\rho_0)} \geq W_{\alpha\rho_0} - O(\hbar^2) \geq (1-\alpha^2)f(r) - O(\hbar)$$

であることが分かる。

次には、(詳細は省略するが) α を 1 に十分近く取り、C^∞-級の関数 $\rho(r,\eta)$ で $\alpha\rho_0$ に十分近いものを構成して、

$$\begin{cases} \operatorname{Re} K_\rho & \geq \delta_1 f(r) \\ \rho(r,\eta) & \geq g(r) - \varepsilon \quad \text{for } x \in K \end{cases}$$

を満たすようにできる。すると後は、Agmon の方法をなぞることにより、

$$\left\|e^{\rho(r,\eta)}\mathcal{F}\psi\right\| \leq C$$

が分かる (cf. [10])。ここで、g は固有関数である。したがって、

$$\left\|e^{g(r)-\varepsilon}\psi\right\| \leq C.$$

これから、Sobolev の埋め込み定理により定理の主張がしたがう。

3 拡張、これからの問題、等

次元に関する拡張 上の結果は空間が 2 次元の場合だけだったが、もっと一般の次元に拡張するのは難しくない。例えば、偶数次元で磁場が (二次形式として) 退化していない

場合は、ほぼ同様の結果が得られる。奇数次元の場合や、偶数次元でも退化している場合は、退化していない方向にのみ磁場に依存した減衰評価が証明できる。例えば、3次元の場合は、磁場が z-方向の定磁場ならば、(x, y)-方向について定理1の形の評価ができる。この場合、ポテンシャルは z-軸に関する回転について解析的であることが要求される。

磁場についての拡張 磁場が定数(定ベクトル)でない場合は、議論は難しくなってくる。2次元で、$B = B(r)$ (r にのみ依存する磁場) の場合は、(評価の形は変わってくるが) この論文とほぼ同様の議論ができる。一方、もっと一般の磁場については、回転に関する解析性が必要なのは明らかだが、それを仮定しても(現在のところ)きれいな形の結果は得られていない。

多体の場合 N-体のシュレディンガー作用素について同様な評価ができるかは、興味深い問題だが、まだ手を着けられていない。

評価の改良 最初の方で述べたように、ポテンシャルが回転対称の場合は定理1はほぼ最善の結果を与えている。しかし、回転対称でない場合は評価はいささか十分でない。それは、次の例でも分かる。

例．(定磁場中の非等方的な調和振動子) $a, b > 0$ そして $B > 0$ として Hamiltonian を

$$H = (p_1 + \frac{B}{2}x_2)^2 + (p_2 - \frac{B}{2}x_1)^2 + a^2x_1^2 + b^2x_2^2.$$

とする。するとこれは厳密に解けて、最低固有値に対応する固有関数(基底状態)は、

$$\psi(x) = c_0 \exp[-\varphi(x)/\hbar],$$
$$\varphi(x) = \frac{1}{2}cx_1^2 + \frac{1}{2}dx_2^2 + iex_1x_2,$$

で与えられる。ただし、

$$c = \frac{a}{a+b}\sqrt{(a+b)^2 + B^2},$$
$$d = \frac{b}{a+b}\sqrt{(a+b)^2 + B^2},$$
$$e = \frac{1}{2} \cdot \frac{a-b}{a+b}B.$$

である。もし、$a >> b > 0$ ならば、

$$c \sim \sqrt{a^2 + B^2}, \quad d \sim \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + B^2}.$$

であり、減衰の強さは方向に強く依存する。さらに、定理1の評価は、

$$g(r) \sim \frac{b}{a}|B|r^2 < \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + B^2}\, r^2.$$

を与えるだけで、一番減衰の弱い方向についても最善の評価にはなっていない。

このように、回転対称でない場合の評価には改善すべき余地がある。これは、一般の磁場に対する評価の問題とも密接に関係があると考えられ、さらに研究をしたいと思っている。

参考文献

[1] Brummelhuis, R.: Exponential decay in the semiclassical limit for eigenfunctions of Schrödinger operators with magnetic fields and potentials which degenerate at infinity. Comm. P. D. E. **16**, 1489–1502 (1991)

[2] Helffer, B.: Semi-Classical Analysis for the Schrödinger Operator and Applications. Springer Lecture Notes in Math. **1336** (1988)

[3] Helffer, B., Sjöstrand, J.: Effet tunnel pour l'équation de Schrödinger avec champ magnétique. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **14** 625–657 (1987)

[4] Hislop, P. D., Sigal, I. M.: Introduction to Spectral Theory, With Applications to Schrödinger Operators. Springer Verlag 1996.

[5] Martinez, A.: Estimates on complex interactions in phase space. Math. Nachr. **167**, 203–254 (1994)

[6] Martinez, A.: Microlocal exponential estimates and applications totunneling. in *Microlocal Analysis and Spectral Theoru, Ser. C*, **490**, (L. Rondino ed., 1997)

[7] Nakamura, S.: On Martinez' method of phase space tunnenling. Rev. Math. Phys. **7**, 431–441 (1995)

[8] Nakamura, S.: On an example of phase-space tunneling. Ann. Inst. H. Poincaré (phys. théo.) **63**, 211-229 (1995)

[9] Nakamura, S.: Gaussian decay estimates for the eigenfunctions of magnetic Schrödinger operators. Comm. P. D. E. **21**, 993–1006 (1996)

[10] Nakamura, S.: Agmon-type exponential decay estimates for pseudodifferential operators. Preprint 1998 (Univerisity of Tokyo)

[11] Nakamura, S.: Tunneling estimates for magnetic Schrödinger operators. Preprint 1998 (Univerisity of Tokyo), To appear in Commun. Math. Phys.