Title	多目的線形生産計画ゲームの解に対する計算方法 (決定理論とその関連分野)
Author(s)	西崎, 一郎; 坂和, 正俊
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1043: 230-236
Issue Date	1998-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/62109
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1043 巻 1998 年 230-236

多目的線形生産計画ゲームの解に対する計算方法

西崎 一郎　　坂和 正敏
Ichiro Nishizaki　　Masatoshi Sakawa
広島大学工学部
Department of Industrial and Systems Engineering,
Faculty of Engineering, Hiroshima University

1 はじめに

企業内の複数事業部のによる共同プロジェクトや，複数の企業または資源の保有者が協力し，共同で事業を推進する問題において，得られた利益の分配や，製造の過程で起こる近隣住民への不利益に対する補償金の支払い分担などの合理的で公正な割当てが求められる．協力ゲームは共同の利益あるいはコストを公正に分配する問題を分析するためにしばしば利用されてきた．

n 人の意思決定者が資源をもち，彼らが協力していくつかの製品を生産する線形生産計画問題を Owen が協力ゲームを用いて考察した [12]．その研究では，目的関数が p 種類の製品を販売することによる収入で，その収入を資源制約のもとで最大化する問題が定式化され，得られた共同の収入を公正に分配する問題が考察された．その後 Owen の研究に関連して，線形生産計画問題の直接の拡張やその他の最適化問題と協力ゲームの関係が考察されてきた [3, 4, 5, 7]．

協力ゲームを用いた利益の分配や費用の分担問題では，各プレイヤー（意思決定者）の利益や費用は各意思決定者に対してスカラーの実数値として割当てられていた．西﨑・坂和は，共同事業に対する結果は得られた利益のみならず近隣住民への不利益に対する補償金の支払いなどの多目的環境で評価すべきであるとの考えから，多目的線形生産計画問題から多目的線形生産ゲームを定式化した [11]．Owen による線形生産計画ゲームは通常の協力ゲームによって表現されるが，多目的線形生産ゲームは複数財ゲーム [1, 2, 14, 13, 10] によって定式化される．西﨑・坂和は各意思決定者への利得の配分計画として，支配関係から定義されるゲームの解コアを取り上げ，多目的生産計画問題を主問題としたときの双対問題の最適解からコアに属する利得が計算できることを示し，コアに基づく配分計画を示した [11]．しかし，多目的線形生産計画ゲームのコアは，多目的計画問題のパレート最適解がそうであるように，比較的大きな解集合を形成する場合が多い．すなわち，各意思決定者に対する多次元利得の分配の候補が多い場合，より限定された解集合をもつ解概念が必要となる．

本論文では，多目的線形生産計画ゲームの解として比較的解集合が小さくなる最小コアや仁を取り上げ，その計算方法を提案する．

2 問題の定式化と解の定義

多目的線形生産計画問題は次のように記述される．意思決定者の集合を $N = \{1,\ldots,n\}$ とし，各意思決定者が所有する資源を共同で使用することにより，意思決定者全員が協力して p 種類の製品を生産するとする．意思決定者 i の初期所有資源を $b^i = (b^i_1,\ldots,b^i_m)$ とする．任意の提携 $S \subset N$ の所有する資源 r の総量は

$$b_r(S) = \sum_{i\in S} b^i_r \tag{1}$$

である．製品 j を製造するには資源 $r = 1,\ldots,m$ をそれぞれ a_{rj} 単位必要とする．p 種類の製品を生産する場合，ℓ 種類の目的を考慮した多目的最適化問題として定式化する．この生産計画モデルが線形であるとすると，一般に目的の添字集合を $K = \{1,\ldots,\ell\}$ として，提携 S の下での ℓ 目的

線形生産計画問題は次のように表現される.

$$\begin{array}{lll} \max & z_1(x) = c_{11}x_1 + \cdots + c_{1p}x_p & \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ \max & z_\ell(x) = c_{\ell 1}x_1 + \cdots + c_{\ell p}x_p & \\ s.\,t. & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p \leq b_1(S) & (2) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & a_{m1}x_1 \cdots + a_{mp}x_p \leq b_m(S) & \\ & x_1, \ldots, x_p \geq 0 & \end{array}$$

等価的に

$$\begin{array}{ll} max & z(x) = Cx \\ s.\,t. & \qquad (3) \\ \multicolumn{2}{l}{x \in T_S \triangleq \{x \mid Ax \leq b(S),\ x \in \mathbb{R}^p_+\}} \end{array}$$

である. ここで, $\mathbb{R}^p_+ = \{x \in \mathbb{R}^p \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, p\}$ であり, C は rj 要素を c_{rj} とする $\ell \times p$ 行列, A は rj 要素を a_{rj} とする $m \times p$ 行列, $b(S)$ は r 要素を $b_r(S)$ とする m 次元列ベクトルである. 目的空間における実行可能集合を

$$\hat{T}_S = \{z \in \mathbb{R}^\ell \mid z = Cx,\ x \in T_S\} \qquad (4)$$

とすると, 問題 (2) のパレート最適値の集合は $\hat{T}_S$ のパレート最大 $\mathrm{Max}\,\hat{T}_S$ で表現され, このとき

$$V(S) = (\mathrm{Max}\,\hat{T}_S - \mathbb{R}^\ell_+) \cap \mathbb{R}^\ell_+ \qquad (5)$$

とおくと, 多目的線形生産計画問題 (2) から複数財ゲーム (N, V) が生成される. ここで, $\mathrm{Max}\,A = \{a \in A \mid (A-a) \cap (\mathbb{R}^p_+) = \{0\}\}$ である. この複数財ゲームを多目的線形生産計画ゲームとよぶ. 集合の族 $V = \{V(S) \mid S \subset N\}$ に対して, 利得 $v = (v^1, \ldots, v^\ell) \in V(S)$ は提携 S のメンバーに対して財毎に分配可能で利得ベクトル $x = (x^1, \ldots, x^\ell) \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$, $x^k = (x^k_1, \ldots, x^k_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して, $v^k \geq \sum_{i \in S} x^k_i$, $k = 1, \ldots, \ell$ である. 多目的線形生産計画問題 (2) の実行可能領域が非空の有界集合であるならば, それは有界な凸多面体となり, $V(S)$ は $\mathbb{R}^\ell$ の包括的かつコンパクトな部分集合となる. ここで, 集合 A が包括的であるとは $b \in A$ かつ $0 \leq a \leq b$ ならば, $a \in A$ となることである.

企業における生産計画問題では, しばしば各意思決定者に具体的な利得の分配計画を示す必要がある. すなわち, 各意思決定者は生産によって生じた利益やコストの分担案を明らかにさせたいという場合がある. 西﨑・坂和 [11] は多目的線形生産計画ゲームに対してコアの存在とその計算方法を示したが, 彼らが示した数値例のようにコアが比較的大きな利得ベクトルの集合で表される場合には, 最小コアや仁によって示される利得ベクトルが, 分配計画の良い候補となる. 複数財ゲームの最小コアや仁は必ずしも唯一の利得ベクトルとはならないが, コアに比べて比較的小さい解集合となる.

通常の協力ゲーム (N, v) において, 余剰は $e(S, x) \triangleq v(S) - \sum_{i \in S} x_i$ で定義され, $e(S, x)$ が正のとき S は x に対して不満をもち, 負であるときには剰余もつと解釈される. 多目的線形生産計画ゲーム (N, V) における x に対する S の余剰を $E(S, x)$ とする. $E(S, x)$ の具体的な定義は次節で与える.

この余剰を用いてコア $C(N, V)$, ε-コア $C_\varepsilon(N, V)$, 最小コア $LC(N, V)$ を次のように定義する.

$$C(N, V) = \{x \in GR(N, V) \mid E(S, x) \leq 0\} \qquad (6)$$

$$C_\varepsilon(N, V) = \{x \in GR(N, V) \mid E(S, x) \leq \varepsilon\} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} LC(N, V) = \{x \in GR(N, V) \mid \\ \max_{S \subset N} E(S, x) \leq \max_{S \subset N} E(S, y), \\ \forall y \in GR(N, V)\} \end{aligned} \qquad (8)$$

ここで, $GR(N, V)$ は全体合理性で $GR(N, V) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^{\ell \times n} \mid x_N \in \mathrm{Max}\,V(N)\}$ である.

多目的線形生産計画ゲームの仁も通常の協力ゲームの仁と同様に余剰関数を辞書式順序で最小化した利得ベクトルとして定義される [10]. $H_{2^n-2} : R^{2^n-2} \to R^{2^n-2}$ を $2^n - 2$ 次元ベクトルを非増加順に並べ替える写

像とする．このとき，多目的線形生産計画ゲームの仁は次のように定義される．

$$
\begin{aligned}
N(N,V) = \{x \in X \mid\ & H_{2^n-2}(E(S_1,x),\ldots, \\
& E(S_{2^n-2},x)) \leq_L H_{2^n-2}(E(S_1,y),\ldots, \\
& E(S_{2^n-2},y)),\ \forall y \in X\} \quad (9)
\end{aligned}
$$

ここで，X はゲーム (N,V) のすべての配分の集合である．$X = IR(N,V) \cap GR(N,V)$，$IR(N,V) = \{x \in R^{n\times\ell} \mid x_i \notin V_{\{i\}} \setminus \mathrm{Max}\, V_{\{i\}},\ \forall i \in N\}$ であり，$IR(N,V)$ は個人合理性を示している．また，プレ仁の場合は $X = GR(N,V)$ である．$\leq_L$ 辞書式順序での大小関係である．余剰関数 $E(S,x)$ が x と V に関して連続で，X がコンパクトであれば $N(N,V)$ は非空であることは手付けのない協力ゲームでの Kalai [6] の結果を用いれば同様に示すことができる．

3 余剰関数と解の計算

一般の複数財ゲームにおける最小コアや仁の計算方法が西﨑・坂和 [10] によって示されているので，本節では彼らの計算方法を多目的線形生産計画ゲームの特徴を利用しながら適用する．

余剰関数を定義する場合，二つの考え方がある [10]．一つは提携集合 $V(S)$ の形状からある種の規範に基づいて余剰関数を決定する方法である．もう一つの方法は参考となる利得空間の点（参考点 [?]）をもとに余剰関数を構成する方法である．前者の余剰関数として 2 例与え，後者として 2 例与え，それぞれについて最小コアや仁の計算方法を与える．

(余剰関数 1) 利得ベクトル $x \in \mathbb{R}_+^{n\times\ell}$ に対する提携 S の余剰を $x_S = \sum_{i\in S} x_i$ から $V(S)$ のパレート最大 $\mathrm{Max}\, V(S)$ への距離と考えると，$V(S)$ が凸多面体となるので余剰関数は次のように表現できる．

$$E(S,x) = \min_{r\in L}\left(c_{Sr} - \sum_{k\in K} a_{Sr}^k x_S^k\right) \quad (10)$$

ここで，$\mathrm{Max}\, V(S)$ を構成する超平面を $\sum_{k\in K} a_{Sr}^k u^k = c_{Sr}$，$\sum_{k\in K} a_{Sr}^k = 1$，$r \in L$ とする．(10) の等余剰曲線を図 1 に示す．

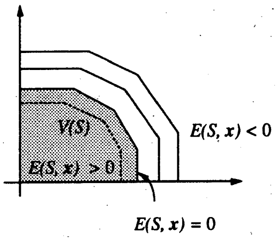

図 1: 余剰関数 1 の等余剰曲線

(余剰関数 2) 余剰関数の定義に特性集合 $V(S)$ の理想点 $v_S^* = (v_S^{*1},\cdots,v_S^{*\ell})$，$v_S^{*k} = \max_{v_S\in V(S)} v_S^k$，$k \in K$ を用いる．すなわち，理想点から利得ベクトルの距離を余剰関数

$$E(S,x) = \min_{k\in K}(v_S^{*k} - x_S^k) \quad (11)$$

として定義する．(11) 式の等余剰曲線は図 2 に示されるようにチェビシェフ距離の外形に等しいが，拡張チェビシェフ距離に対応する余剰関数は

$$E(S,x) = \min_{k\in K}(v^{*k}_S - x_S^k) + \alpha\sum_{k\in K}(v^{*k}_S - x_S^k) \quad (12)$$

であり，(11) 式は (12) 式の特別な場合である．

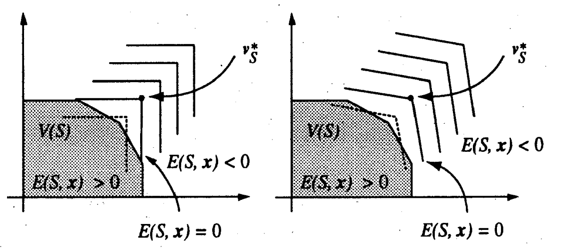

図 2: 余剰関数 2 の等余剰曲線

(余剰関数 3) 特性集合 $V(S)$ 上のあるパレート最大点 $\hat{v}_S \in \mathrm{Max}\, V(S)$ を参考点として与え，提携 S の利得ベクトル x に対する余剰を参考点から生成される超平面 $h_S(u;\hat{v}_S) = 0$ と利得ベクトル $x_S \in \mathbb{R}^\ell$ との距離 $d(h_S(u;\hat{v}_S), x_S)$ として定義する．ただし，x_S が $h_S(u;\hat{v}_S) = 0$ より原点側にあれば，$d(h_S(u;\hat{v}_S), x_S) \geq 0$ とし，逆の場合 $d(h_S(u;\hat{v}_S), x_S) \leq 0$ とする．このとき，余剰関数

$$E(S,x) = d(h_S(u;\hat{v}_S), x_S) \quad (13)$$

が与えられる（図 3 参照）．$\hat{v}_S$ の選び方としては単に Max $V(S)$ 上に取ってもよいし，各目的に関する重み $w_S \in \mathbb{R}^\ell$ を用いて

$$\{\hat{v}_S\} = \arg \max_{v \in V(S)} \min_{k \in K} \frac{v^k}{w_S^k} \tag{14}$$

とおいてもよい．一般に，参考点 $\hat{v}_S$ を通る超平面は $h_S(u, \hat{v}_S) = c_S - \sum_{k \in K} a_S^k u^k = 0$ で表現される．ここで，$c_S - \sum_{k \in K} a_S^k \hat{v}_S^k = 0, \sum_{k \in K} a_S^k = 1$ とする．このとき，余剰関数は

$$E(S, x) = c_S - \sum_{k \in K} a_S^k x_S^k \tag{15}$$

となる．とくに，$\hat{v}_S$ が法線ベクトルであるような超平面は $\sum_{k \in K} \hat{v}_S^k u^k = \sum_{k \in K} (\hat{v}_S^k)^2$ であり，この場合余剰関数は次のように表現される．

$$E(S, x) = \frac{\displaystyle\sum_{k \in K} (\hat{v}_S^k)^2 - \sum_{k \in K} x_S^k \hat{v}_S^k}{\displaystyle\sum_{k \in K} \hat{v}_S^k} \tag{16}$$

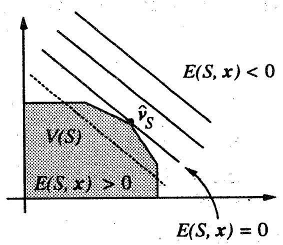

図 3: 余剰関数 3 の等余剰曲線

(余剰関数 4) 利得ベクトル x に対する提携 S の余剰を x_S と参考点 $\hat{v}_S$ との距離として定義する．すなわち

$$E(S, x) = \min_{k \in K} (\hat{v}_S^k - x_S^k) + \alpha \sum_{k \in K} (\hat{v}_S^k - x_S^k) \tag{17}$$

である（図 4 参照）．$\alpha = 0$ のとき，等余剰曲線はチェビシェフ距離の外形に等しく，$\alpha \neq 0$ のとき，拡張チェビシェフ距離に対応する．

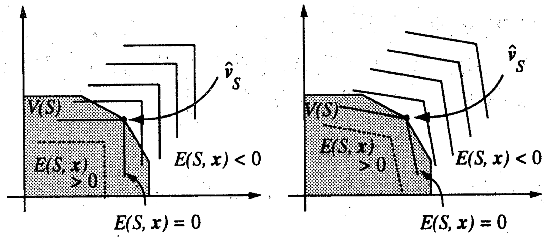

図 4: 余剰関数 4 の等余剰曲線

次に 4 種類の余剰関数に基づく最小コアの計算方法について考察する．

(余剰関数 1 で定義された最小コアの計算方法) 最小コアは余剰関数が (10) 式であることから，コアが存在する場合

$$LC(N, V) = \arg \min_{x_N \in \mathrm{Max}\, V(N)} \max_{S \subset N} \min_{r \in L} \left(c_{Sr} - \sum_{k \in K} a_{Sr}^k x_S^k \right) \tag{18}$$

となる．したがって，次の数理計画問題の最適解が最小コアの集合に属することがわかる．

$$\begin{aligned} &\min_{x, \varepsilon} \quad \varepsilon \\ &\text{s. t.} \quad \min_{r \in L} \left(c_{Sr} - \sum_{k \in K} a_{Sr}^k x_S^k \right) \leq \varepsilon, \ S \subset N \\ &\qquad\quad x_N \in \mathrm{Max}\, V(N) \end{aligned} \tag{19}$$

この問題の解き方については余剰関数 2 を用いた場合と同様であるので省略する．

(余剰関数 2 で定義された最小コアの計算方法) 最小コアは余剰関数が (11) 式であることから

$$LC(N, V) = \arg \min_{x_N \in \mathrm{Max}\, V(N)} \max_{S \subset N} \min_{k \in K} (v_S^{*k} - x_S^k) \tag{20}$$

である．したがって，次の数理計画問題の最適解が最小コアの点となる．

$$\begin{aligned} &\min_{x,\ \varepsilon} \quad \varepsilon \\ &\text{s. t.} \quad \min_{k \in K} (v_S^{*k} - x_S^k) \leq \varepsilon, \ S \subset N \\ &\qquad\quad x_N \in \mathrm{Max}\, V(N) \end{aligned} \tag{21}$$

多目的線形生産計画ゲーム (N,V) では $V(N)$ は凸多面体であるので，$\mathrm{Max}\,V(N)$ はその凸多面体の面になる．よって

$$\begin{aligned}\mathrm{Max}\,V(N) = \bigcup_{\hat{r}=1}^{m_N}\{x \in \mathbb{R}^{n\times\ell} \mid x_N \in \mathbb{R}^{\ell}_{+},\\ a^N_{r1}x^1_N + \cdots + a^N_{r\ell}x^\ell_N - c^N_r \le 0,\\ r=1,\ldots,m_N,\ r\ne\hat{r},\\ a^N_{\hat{r}1}x^1_N + \cdots + a^N_{\hat{r}\ell}x^\ell_N - c^N_{\hat{r}} = 0,\\ x^k_N \le v^{*k}_N,\ k=1,\ldots,\ell\}\end{aligned} \quad (22)$$

と表現できるので $z_r \in \{0,1\}$, $r = 1,\ldots,m_N$ を導入し，問題 (21) の min オペレータをもつ制約式も 0-1 変数 $y^k_S \in \{0,1\}$, $S \subset N$, $k=1,\ldots,\ell$ を導入すれば，問題 (21) は次の混合 0-1 線形計画問題に変換できる．

$$\begin{aligned}\min_{x,\,\varepsilon,\,y,\,z}\quad & \varepsilon\\ \text{s. t.}\quad & v^{*k}_S - x^k_S \le \varepsilon + M(1-y^k_S),\\ & \qquad S\subset N,\ k=1,\ldots,\ell\\ & y^1_S+\cdots+y^\ell_S = 1,\ y^k_S\in\{0,1\}\\ & \qquad S\subset N,\ k=1,\ldots,\ell\\ & a^N_{r1}x^1_N+\cdots+a^N_{r\ell}x^\ell_N \le c^N_r,\\ & \qquad r=1,\ldots,m_N\\ & x^k_N \le v^{*k}_N,\ k=1,\ldots,\ell\\ & a^N_{r1}x^1_N+\cdots+a^N_{r\ell}x^\ell_N \ge c^N_r\\ & \quad -M(1-z_r),\ r=1,\ldots,m_N\\ & z_1+\cdots+z_{m_N}=1,\\ & \quad z_r\in\{0,1\},\ r=1,\ldots,m_N\end{aligned} \quad (23)$$

ここで，M は十分大きな正の定数である．したがって，0-1 変数を分枝変数とした分枝限定法によるアルゴリズムによって解を得ることができる．

余剰関数が (12) 式で表現され，$\alpha \ne 0$ となる場合，最小コアは

$$LC(N,V) = \arg\min_{x_N\in\mathrm{Max}\,V(N)}\max_{S\subset N}\left\{\min_{k\in K}(v^{*k}_S - x^k_S) + \alpha\sum_{k\in K}(v^{*k}_S - x^k_S)\right\} \quad (24)$$

となり，対応する数理計画問題は

$$\begin{aligned}\min_{x,\,\varepsilon}\quad & \varepsilon\\ \text{s. t.}\quad & \min_{k\in K}(v^{*k}_S - x^k_S) + \alpha\sum_{k\in K}(v^{*k}_S - x^k_S) \le \varepsilon,\\ & \qquad S\subset N\\ & x_N \in \mathrm{Max}\,V(N)\end{aligned} \quad (25)$$

となるので，同様に混合 0-1 線形計画問題に変換でき，最適解を得ることができる．

(余剰関数 3 で定義された最小コアの計算方法) 余剰関数が (15) 式で表されるとき，最小コアは

$$LC(N,V) = \arg\min_{x_N\in\mathrm{Max}\,V(N)}\max_{S\subset N}\left(c_S - \sum_{k\in K}a^k_S x^k_S\right) \quad (26)$$

となる．したがって，次の数理計画問題の最適解は最小コア (26) に属する．

$$\begin{aligned}\min_{x,\,\sigma}\quad & \sigma\\ \text{s. t.}\quad & c_S - \sum_{k\in K}a^k_S x^k_S \le \sigma,\ S\subset N\\ & x_N\in\mathrm{Max}\,V(N)\end{aligned} \quad (27)$$

とくに，その法線ベクトルが $\hat{v}_S$ であるような超平面 $\sum_{k\in K}\hat{v}^k_S u_k = \sum_{k\in K}(\hat{v}^k_S)^2$ を考えると，余剰関数は (16) 式となるので最小コアは次のように表現される．

$$LC(N,V) = \arg\min_{x_N\in\mathrm{Max}\,V(N)}\max_{S\subset N}\frac{\sum_{k\in K}(\hat{v}^k_S)^2 - \sum_{k\in K}x^k_S\hat{v}^k_S}{\sum_{k\in K}\hat{v}^k_S} \quad (28)$$

対応する数理計画問題は

$$\begin{aligned}
&\min_{x,\ \sigma} \quad \sigma \\
&\text{s. t.} \quad \frac{\displaystyle\sum_{k\in K}(\hat{v}_S^k)^2 - \sum_{k\in K} x_S^k \hat{v}_S^k}{\displaystyle\sum_{k\in K}\hat{v}_S^k} \leq \sigma,\ S \subset N \\
&\qquad\quad x_N \in \operatorname{Max} V(N)
\end{aligned} \tag{29}$$

となり，$\hat{v}_S \geq 0$ なので，

$$\begin{aligned}
&\min_{x,\ \sigma} \quad \sigma \\
&\text{s. t.} \quad \sum_{k\in K}\{(x_S^k + \sigma - \hat{v}_S^k)\hat{v}_S^k\} \geq 0,\ S \subset N \\
&\qquad\quad x_N \in \operatorname{Max} V(N)
\end{aligned} \tag{30}$$

と変形できる．特性集合 $V(N)$ が (22) 式で表現されるので，0-1 変数 $z_r, r = 1, \ldots, m_N$ を導入して問題 (27)，(30) は混合 0-1 線形計画問題として変形でき，同様の方法で最適解が得られる．

(余剰関数 4 で定義された最小コアの計算方法)　最小コアは余剰関数が (17) 式であることから

$$LC(N, V) = \arg \min_{x_N \in \operatorname{Max} V(N)} \max_{S\subset N}\left\{\min_{k\in K}(\hat{v}_S^k - x_S^k) + \alpha \sum_{k\in K}(\hat{v}_S^k - x_S^k)\right\} \tag{31}$$

となる．したがって，次の数理計画問題の最適解が最小コア (31) 式に属する．

$$\begin{aligned}
&\min_{x,\ \sigma} \quad \sigma \\
&\text{s. t.} \quad \min_{k\in K}(\hat{v}_S^k - x_S^k) + \alpha \sum_{k\in K}(\hat{v}_S^k - x_S^k) \leq \sigma, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad S \subset N \\
&\qquad\quad x_N \in \operatorname{Max} V(N)
\end{aligned} \tag{32}$$

この問題も問題 (25) と同様にして解を得ることができる．

これまで四つの余剰関数に対してそれぞれ最小コアの計算方法 (最適解が最小コアに属する数理計画問題) を示してきたが，つぎに最小コアの部分集合でもある仁の計算方法について考察する．ここでは，任意の最小コアの点が配分であると仮定する．通常の n 人協力ゲームの仁の計算方法は Kopelowitz [8] によって与えられているが，複数財ゲームの仁については，Maschler, Potters and Tijs [9] の考えに従えば計算できる．

最小コアが唯一の利得ベクトルから構成されるとき，その利得ベクトルは仁でもあるが，複数の利得ベクトルから構成されるときは，辞書式順序の最小化を考慮する必要がある．すなわち

$$LC(N, V) = \arg \min_{x_N \in \operatorname{Max} V(N)} \max_{S\subset N} E(S, x) \tag{33}$$

が唯一であれば，$N(N, V) = LC(N, V)$ である．そうでなければ，

$$\varepsilon_1 = \min_{x_N \in \operatorname{Max} V(N)} \max_{S\subset N} E(S, x) \tag{34}$$

とおき，すべての $x \in LC(N, v)$ に対して $E(S, x) = \varepsilon_1$ となるすべての S の集合を $\mathcal{T}_1$ とする．辞書式順序で 2 段階に余剰を最小にした利得ベクトルの集合は次のように示される．

$$N_1(N, V) = \arg \min_{\substack{x_N \in \operatorname{Max} V(N) \\ E(S,x)=\varepsilon_1,\ S\in\mathcal{T}_1}} \max_{\substack{S\subset N \\ S\notin\mathcal{T}_1}} E(S, x) \tag{35}$$

この過程を続けて k 番目の反復で $N_k(N, V)$ が唯一の利得ベクトルとなれば，$N(N, V) = N_k(N, V)$ である．あるいは，k' 番目の反復ですべての $S \subset N$ が $\cup_{m=1}^{k'}\mathcal{T}_m$ に属するとき，$N(N, V) = N_{k'}(N, V)$ となる．上記のように，特性集合や余剰関数の取り方によって必ずしも仁は唯一には定まらないが，辞書式順序の最小化の手順で解の集合が減少していくことがわかる．

4 おわりに

本論文では，多目的線形計画ゲームの解として比較的解集合の小さい最小コアや仁を取り上げた．多目的線形計画ゲームの特殊性を考慮して，4 種類の余剰関数を定義し，最適解が最小コアの点となる数理計画問題を示した．さらに，その問題の解法を与え，仁についてもその計算の手続きを示した．

参考文献

[1] J.J.M. Derks and S.H. Tijs, "Stable outcome for multi-commodity flow games," Methods of Operations Research, vol. 55, pp. 493–504, 1986.

[2] J.J.M. Derks and S.H. Tijs, "Totally balanced multi-commodity games and flow games," *Methods of Operations Research*, vol. 54, pp. 335–347, 1986.

[3] P. Dubey and L.S. Shapley, "Totally balanced games arising from controlled programming problems," *Mathematical Programming*, vol. 29, pp. 245–267, 1984.

[4] R. Engelbrecht-Wiggans and D. Granot, "On market prices in linear production games," *Mathematical Programming*, vol. 32, pp. 366–370, 1985.

[5] D. Granot, "A generalized linear production model: A unifying model," *Mathematical Programming*, vol. 34, pp. 212–222, 1986.

[6] E. Kalai, "Excess functions for cooperative games without sidepayments," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 29, pp. 60–71, 1975.

[7] E. Kalai and E. Zemel, "Generalized network problems yielding totally balanced games," *Operations Research*, vol. 30, pp. 998–1008, 1982.

[8] A. Kopelowitz, Computation of the kernels of simple games and the nucleolus of cooperative games as locuses in the strong ε-core, *Research Memo. 31, Dept. of Math.*, Hebrew University, 1967.

[9] M. Maschler, J.A.M. Potters and S.H. Tijs, The general nucleolus and the reduced game property, *International Journal of Game Theory*, vol. 21, pp. 85–106, 1992.

[10] 西崎一郎, 坂和正敏, "複数財ゲームにおける最小コアおよび仁," システム制御情報学会誌, vol. 41, pp. 369–379, 1997.

[11] 西崎一郎, 坂和正敏, "多目的線形生産計画ゲームのコア," 信学論 A, Vol. J80-A, pp. 1932–1939 (1997).

[12] G. Owen, "On the core of linear production games," *Mathematical Programming*, vol. 9, pp. 358–370, 1975.

[13] T. Tanino, Y. Muranaka and M. Tanaka, On multiple criteria characteristic mapping games, *Proceedings of MCDM '92*, Taipei, pp. 63–72, 1992.

[14] A. van den Nouweland, H. Aarts, and P. Borm, "Multi-commodity games," *Methods of Operations Research*, vol. 63, pp. 329–338, 1990.