

Title	ガウス測度の2値確率平行移動の絶対連続性(応用函数解析の研究)
Author(s)	水町, 仁; 佐藤, 坦
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1039: 95-110
Issue Date	1998-04
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/62002">http://hdl.handle.net/2433/62002</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## ガウス測度の 2 値確率平行移動の絶対連続性

熊本大学医療技術短期大学部 水町 仁 (Hitoshi Mizumachi)  
九州大学大学院数理学研究科 佐藤 坦 (Hiroshi Sato)

### § 1 序

$X = \{X_k\}_k$  を IID (独立かつ同分布な確率変数列),  $Y = \{Y_k\}_k$  を独立確率変数列とし,  $X$  と  $Y$  は互いに独立であるとする。また,  $X + Y = \{X_k + Y_k\}_k$  とする。このとき,  $X, Y, X + Y$  はそれぞれ, 数列空間  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  上に無限直積測度

$$\mu_X = \prod_k \mu_{X_k}, \quad \mu_Y = \prod_k \mu_{Y_k}, \quad \mu_{X+Y} = \prod_k \mu_{X_k+Y_k}$$

を導き,  $\mu_{X+Y} = \mu_X * \mu_Y$  (合成積) である。特に,  $X_1$  が標準正規分布に従うとき,  $X$  を標準ガウス列とよび,  $G = \{G_k\}_k$  と表す。

問題は,  $\mu_{X+Y} \sim \mu_X$  (互いに絶対連続) を  $Y$  だけに関する条件で特徴付けること, つまり, 与えられた  $\mu_X$  に対して,  $\mu_{X+Y} \sim \mu_X$  となる  $\mu_Y$  をすべて見つけることである。 $X = G$  の場合でも, そのような必要十分条件は知られていないが, Hino [1] から, 次が成り立つ。

命題 A (Hino)

$$\sum_k P(|Y_k| > \varepsilon) + \sum_k E[Y_k : |Y_k| \leq \varepsilon]^2 + \sum_k E[Y_k^2 : |Y_k| \leq \varepsilon]^2 < \infty$$

をみたす  $\varepsilon > 0$  が存在する

$$\Rightarrow \mu_{G+Y} \sim \mu_G$$

$$\Rightarrow \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して}$$

$$\sum_k P(|Y_k| > \varepsilon)^2 + \sum_k E[Y_k : |Y_k| \leq \varepsilon]^2 + \sum_k E[Y_k^2 : |Y_k| \leq \varepsilon]^2 < \infty$$

命題 A の十分条件では  $\sum_k P(|Y_k| > \varepsilon) < \infty$  をみたす  $\varepsilon > 0$  の存在を仮定している。これは,  $\sup_k |Y_k| < \infty$  a.s. と同等であり (Borel-Cantelli の補題), このとき

$$\mu_{G+Y} \sim \mu_G \iff \sum_k E[Y_k : |Y_k| \leq \varepsilon]^2 + \sum_k E[Y_k^2 : |Y_k| \leq \varepsilon]^2 < \infty$$

である。一方,  $\sup_k |Y_k| = \infty$  a.s. かつ  $\mu_{G+Y} \sim \mu_G$  となる  $Y$  が存在することは知られていて (Kitada and Sato [4], Sato and Tamashiro [6]), したがって,  $\sup_k |Y_k| = \infty$  a.s. の場合に  $\mu_{G+Y} \sim \mu_G$  を特徴付けることが問題になる。

本稿では,

$$P(Y_k = a_k) = p_k, \quad P(Y_k = 0) = 1 - p_k, \quad \text{ただし } a_k > 0, \quad 0 < p_k < 1$$

の場合に,  $\mu_{G+Y} \sim \mu_G$  を特徴付ける必要十分条件を与える。

$$\sum_{a_k > 2} p_k + \sum_{a_k \leq 2} p_k^2 a_k^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu_{G+Y} \sim \mu_G \quad \Rightarrow \quad \sum_{a_k > 2} p_k^2 + \sum_{a_k \leq 2} p_k^2 a_k^2 < \infty$$

が成り立つことは, Kitada and Sato [4], Sato and Tamashiro [6], あるいは, 命題 A から直ちに得られるが, 我々の結果は,  $\sum_{a_k > 2} p_k < \infty$  と  $\sum_{a_k > 2} p_k^2 < \infty$  の間を補間し, したがって,  $\sup_k |Y_k| = \infty$  a.s. の場合でも  $\mu_{G+Y} \sim \mu_G$  を  $Y$  だけに関する条件で特徴付けることができる。さらに, 様々な性質を持つ  $Y$  の具体例, 例えば,

$$\sum_k p_k^2 \left( e^{\frac{1}{2} a_k^2} - 1 \right) < \infty \quad \text{かつ} \quad \mu_{G+Y} \not\sim \mu_G$$

となる例を容易に構成することができる。Sato and Tamashiro [6] は, このような例を構成して, Kahane [2] の予想を否定的に解決した。

$$\sigma_k = \frac{a_k}{\sqrt{2 \log \frac{1+p_k}{p_k}}} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \varphi(\sigma) = \begin{cases} 2(1 - \sigma^2), & 0 < \sigma \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \frac{1}{4} \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right)^2, & \frac{1}{\sqrt{3}} < \sigma < 1, \\ 1, & \sigma \geq 1 \end{cases}$$

とする。  $\varphi$  は単調に減少する  $C^1$  級関数で,  $1 \leq \varphi(\sigma) \leq 2$  ( $\forall \sigma > 0$ ) である。

**定理 1** 
$$\mu_{G+Y} \sim \mu_G \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{a_k > 2} \alpha(\sigma_k, p_k) p_k^{\varphi(\sigma_k)} + \sum_{a_k \leq 2} a_k^2 p_k^2 < \infty$$

ただし,

$$\alpha(\sigma, p) = \begin{cases} \frac{1}{(1 - \sigma^2)(3\sigma^2 - 1)\sqrt{|\log p|}}, & \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{6 \log \frac{1+p}{p}}} + \frac{1}{3\sqrt{2 \log \frac{1+p}{p}}} \leq \sigma \leq \sqrt{1 + \frac{1}{2 \log \frac{1+p}{p}}} - \frac{1}{\sqrt{2 \log \frac{1+p}{p}}}, \\ 1, & \text{その他} \end{cases}$$

**命題 1**

$$\begin{aligned} \sum_{a_k > 2} p_k^{\varphi(\sigma_k)} + \sum_{a_k \leq 2} a_k^2 p_k^2 < \infty & \Rightarrow \mu_{G+Y} \sim \mu_G \\ & \Rightarrow \sum_{a_k > 2} \frac{p_k^{\varphi(\sigma_k)}}{\sqrt{|\log p_k|}} + \sum_{a_k \leq 2} a_k^2 p_k^2 < \infty \end{aligned}$$

系 1  $\sigma_k = \sigma$  ( $k$  に無関係),  $\lim_k p_k = 0$  とする。

$$(a) \quad 0 < \sigma \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき, } \quad \mu_{G+Y} \sim \mu_G \iff \sum_k p_k^{2(1-\sigma^2)} < \infty$$

$$(b) \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < \sigma < 1 \text{ のとき, } \quad \mu_{G+Y} \sim \mu_G \iff \sum_k \frac{p_k^{\frac{1}{2}(\sigma+\frac{1}{2})^2}}{\sqrt{|\log p_k|}} < \infty$$

$$(c) \quad \sigma \geq 1 \text{ のとき, } \quad \mu_{G+Y} \sim \mu_G \iff \sum_k p_k < \infty$$

## § 2 証明の方針

すべての  $k \in \mathbb{N}$  に対して  $\mu_{X_k+Y_k} \sim \mu_{X_k}$  (互いに絶対連続) ならば, Kakutani [3] より,  $\mu_{X+Y} \sim \mu_X$  か  $\mu_{X+Y} \perp \mu_X$  (特異) のいずれかが成り立つ。Kitada and Sato [4] は, 次の 2つの級数の収束が  $\mu_{X+Y} \sim \mu_X$  と同等であることを証明した。これは必要十分条件であるが, そこに現れる  $Z_k(x)$  は,  $X, Y$  の双方に関係する。

命題 B (Kitada and Sato)  $\mu_{X_k+Y_k} \sim \mu_{X_k}$  ( $\forall k \in \mathbb{N}$ ) であるとし,

$$Z_k(x) = \frac{d\mu_{X_k+Y_k}(x)}{d\mu_{X_k}} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

とおく。このとき,

$$\begin{aligned} & \mu_{X+Y} \sim \mu_X \\ \iff & \sum_k \mathbb{E}[Z_k(X_k) : Z_k(X_k) \geq 1] + \sum_k \mathbb{E}[Z_k(X_k)^2 : |Z_k(X_k)| < 1] < \infty \end{aligned}$$

が成り立つ。

いま,

$$Z_k(x) = \frac{d\mu_{G_k+Y_k}(x)}{d\mu_{G_k}} - 1 = p_k \left( e^{a_k x - \frac{1}{2}a_k^2} - 1 \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

であり,

$$\gamma_k = \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{a_k} \log \frac{1+p_k}{p_k}$$

は,  $Z_k(x) = 1$  の一意的な解である。よって,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1] = \mathbb{E}[Z_k(G_k) : G_k \geq \gamma_k] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_k}^{\infty} p_k \left( e^{a_k x - \frac{1}{2}a_k^2} - 1 \right) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{p_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_k}^{\infty} \left( e^{-\frac{1}{2}(x-a_k)^2} - e^{-\frac{1}{2}x^2} \right) dx \\ &= \frac{p_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_k - a_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \end{aligned} \quad (1)$$

であり,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[ Z_k(G_k)^2 : |Z_k(G_k)| < 1 \right] = \mathbb{E} \left[ Z_k(G_k)^2 : |G_k| < \gamma_k \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} p_k^2 \left( e^{a_k x - \frac{1}{2} a_k^2} - 1 \right)^2 e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \\
&= \frac{p_k^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} \left( e^{2a_k x - a_k^2} - 2e^{a_k x - \frac{1}{2} a_k^2} + 1 \right) e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \\
&= \frac{p_k^2}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} e^{a_k^2} e^{-\frac{1}{2} (x-2a_k)^2} dx - 2 \int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2} (x-a_k)^2} dx + \int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right) \\
&= \frac{p_k^2}{\sqrt{2\pi}} \left( e^{a_k^2} \int_{-\gamma_k-2a_k}^{\gamma_k-2a_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx - 2 \int_{-\gamma_k-a_k}^{\gamma_k-a_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx + \int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{p_k^2} \left\{ (e^{a_k^2} - 1) \int_{-\gamma_k-2a_k}^{\gamma_k-2a_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx + \int_{-\gamma_k-2a_k}^{\gamma_k-2a_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx - \int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right. \\
&\quad \left. + 2 \left( \int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx - \int_{-\gamma_k-a_k}^{\gamma_k-a_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right) \right\} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{p_k^2} \left\{ (e^{a_k^2} - 1) \int_{-\gamma_k-2a_k}^{\gamma_k-2a_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx - \int_{\gamma_k-2a_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx + \int_{\gamma_k}^{\gamma_k+2a_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right. \\
&\quad \left. + 2 \left( \int_{\gamma_k-a_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx - \int_{\gamma_k}^{\gamma_k+a_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right) \right\} \tag{2}
\end{aligned}$$

である。また,  $\mathcal{N}_0 = \{k \in \mathbb{N} : a_k > 2\}$  を

$$\mathcal{N}_1 = \{k \in \mathcal{N}_0 : \gamma_k - a_k \geq 1, \gamma_k - 2a_k > -1\} = \left\{ k \in \mathcal{N}_0 : 0 < \sigma_k < \sqrt{\frac{a_k}{3a_k - 2}} \right\}$$

$$\mathcal{N}_2 = \{k \in \mathcal{N}_0 : \gamma_k - a_k \geq 1, \gamma_k - 2a_k \leq -1\} = \left\{ k \in \mathcal{N}_0 : \sqrt{\frac{a_k}{3a_k - 2}} \leq \sigma_k \leq \sqrt{\frac{a_k}{2 + a_k}} \right\}$$

$$\mathcal{N}_3 = \{k \in \mathcal{N}_0 : \gamma_k - a_k < 1, \gamma_k - 2a_k \leq -1\} = \left\{ k \in \mathcal{N}_0 : \sigma_k > \sqrt{\frac{a_k}{2 + a_k}} \right\}$$

の3つの部分に分割する。 $a_k > 2$  のとき,  $\gamma_k - a_k < 1$  と  $\gamma_k - 2a_k > -1$  が同時に成り立つことはない。

本稿では, 定理 1, 命題 1 を次のようにして証明していく。

まず, 命題 B を用いて次の命題を証明する。

**命題 2**  $\mu_{G+Y} \sim \mu_G$

$$\iff \sum_{a_k \leq 2} p_k^2 a_k^2 + \sum_{a_k > 2} p_k^2 + \sum_{a_k > 2} p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx + \sum_{a_k > 2} p_k^2 e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx < \infty$$

次に, この第 3 項, 第 4 項の積分を, 不等式

$$\frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{1}{2} \alpha^2} \leq \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \leq \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{2} \alpha^2}, \quad \alpha \geq 1 \tag{3}$$

によって評価して, 次の命題を証明する。

命題 3  $\mu_{G+Y} \sim \mu_G$

$$\Leftrightarrow \sum_{a_k \leq 2} p_k^2 a_k^2 + \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} + \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{a_k}{(\gamma_k - a_k)(2a_k - \gamma_k)} e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} + \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k < \infty$$

この第 2 項の  $p_k^2 e^{a_k^2}$ , 第 3 項の  $e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2}$  を  $p_k$  のべきで評価して, 次の命題を得る。

命題 4  $\mu_{G+Y} \sim \mu_G$

$$\Leftrightarrow \sum_{a_k \leq 2} p_k^2 a_k^2 + \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^{2(1-\sigma_k)^2} + \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}(\sigma_k + \frac{1}{\sigma_k})^2}}{\sqrt{\log \frac{1+p_k}{p_k}}} + \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k < \infty$$

最後に,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \sigma_k < \sqrt{\frac{a_k}{3a_k-2}}, \quad \sqrt{\frac{a_k}{2+a_k}} < \sigma_k < 1$$

の場合を評価して, 定理の証明が完成する。

## § 3 証明

### § 3.1 命題 2 の証明

$$\text{補題 1 } \mu_{G+Y} \sim \mu_G \quad \Rightarrow \quad \sum_{a_k \leq 2} p_k^2 a_k^2 + \sum_{a_k > 2} p_k^2 < \infty$$

証明  $\mu_{G+Y} \sim \mu_G$  とすれば, 命題 A より,

$$\begin{aligned} \infty &> \sum_k \mathbf{E}[Y_k : |Y_k| \leq 2]^2 \geq \sum_{a_k \leq 2} \mathbf{E}[Y_k : |Y_k| \leq 2]^2 = \sum_{a_k \leq 2} p_k^2 a_k^2 \\ \infty &> \sum_k \mathbf{P}(|Y_k| > 2)^2 \geq \sum_{a_k > 2} \mathbf{P}(|Y_k| > 2)^2 = \sum_{a_k > 2} p_k^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。  $\square$

補題 2 任意の  $k \in \mathbb{N}$  に対して, 次の不等式が成り立つ。

$$(a) \quad \int_{\gamma_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \leq \sqrt{2\pi} \mathbf{E}[Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1]$$

$$(b) \quad p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \leq 2\sqrt{2\pi} \mathbf{E}[Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1]$$

$$(c) \quad p_k^2 \int_{\gamma_k - 2a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \leq 6\sqrt{2\pi} \mathbf{E}[Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1]$$

$$(d) \quad p_k^2 (e^{a_k^2} - 1) \int_{\gamma_k + 2a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \leq \sqrt{2\pi} \mathbf{E}[Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1]$$

証明  $E[Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1] \geq P(Z_k(G_k) \geq 1) = P(G_k \geq \gamma_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$   
 であり, したがって,

$$p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \leq p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + \int_{\gamma_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \leq 2\sqrt{2\pi} E[Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1]$$

が成り立つ。また,

$$\begin{aligned} p_k^2 \int_{\gamma_k - 2a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx &\leq p_k^2 \int_{\gamma_k - 2a_k}^{\gamma_k - a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= p_k^2 \int_{\gamma_k - a_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2}(x - a_k)^2} dx + p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= p_k^2 \int_{\gamma_k - a_k}^{\gamma_k} e^{a_k x - \frac{1}{2}a_k^2} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + 2\sqrt{2\pi} E[Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1] \end{aligned}$$

であり,  $x \leq \gamma_k$  のとき  $Z_k(x) \leq 1$  だから,

$$e^{a_k x - \frac{1}{2}a_k^2} \leq \frac{1}{p_k} + 1 = \frac{1 + p_k}{p_k} \leq \frac{2}{p_k}, \quad \forall x \leq \gamma_k$$

である。よって,

$$\begin{aligned} p_k^2 \int_{\gamma_k - 2a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx &\leq 2p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\gamma_k} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + 2\sqrt{2\pi} E[Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1] \\ &\leq 6\sqrt{2\pi} E[Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1] \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに,

$$\begin{aligned} p_k^2 (e^{a_k^2} - 1) \int_{\gamma_k + 2a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx &= p_k^2 (e^{a_k^2} - 1) \int_{\gamma_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x + 2a_k)^2} dx \\ &\leq p_k^2 e^{a_k^2} \int_{\gamma_k}^{\infty} e^{-2a_k x - 2a_k^2} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \leq p_k^2 e^{-a_k^2} \int_{\gamma_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &\leq \int_{\gamma_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \leq \sqrt{2\pi} E[Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1] \end{aligned}$$

である。□

命題 2 の証明  $\mu_{G+Y} \sim \mu_G$  とすれば, 補題 1, 命題 A, および (1), (2) より,

$$\sum_{a_k \leq 2} p_k^2 a_k^2 + \sum_{a_k > 2} p_k^2 + \sum_k p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + \sum_k p_k^2 (e^{a_k^2} - 1) \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx < \infty$$

だから,

$$\sum_{a_k \leq 2} p_k^2 a_k^2 + \sum_{a_k > 2} p_k^2 + \sum_{a_k > 2} p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + \sum_{a_k > 2} p_k^2 e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx < \infty$$

である。逆に, これが成り立つならば, (1), (2) と補題 2 から

$$\sum_{a_k > 2} E[Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1] + \sum_{a_k > 2} E[Z_k(G_k)^2 : |Z_k(G_k)| < 1] < \infty$$

である。よって、 $\mu_{\mathbf{G}+\mathbf{Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$  を示すためには、

$$\sum_{a_k \leq 2} \mathbb{E}[Z_k(G_k) : Z_k(G_k) \geq 1] + \sum_{a_k \leq 2} \mathbb{E}[Z_k(G_k)^2 : |Z_k(G_k)| < 1] < \infty$$

を示せばよく、これは、 $\sum_{a_k \leq 2} Z_k(G_k)$  の概収束と同等である (Kitada and Sato [4])。さらに、 $\{Z_k(G_k)\}_k$  は独立確率変数列だから、 $\sum_{a_k \leq 2} Z_k(G_k)$  が  $L^2$ -収束することをいえばよく、 $\mathbb{E}[Z_k(G_k)] = 0$  から、 $\sum_{a_k \leq 2} Z_k(G_k)$  の  $L^2$ -収束は  $\sum_{a_k \leq 2} \mathbb{E}[Z_k(G_k)^2] < \infty$  と同値である。

$a_k \leq 2$  のとき、 $e^{a_k^2} - 1 \leq e^4 a_k^2$  だから、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_k(G_k)^2] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p_k^2 \left( e^{a_k x - \frac{1}{2} a_k^2} - 1 \right)^2 e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \\ &= \frac{p_k^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-2a_k)^2} dx - 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-a_k)^2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right\} \\ &= \frac{p_k^2}{\sqrt{2\pi}} (e^{a_k^2} - 1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx = p_k^2 (e^{a_k^2} - 1) \leq p_k^2 a_k^2 e^4, \end{aligned}$$

したがって、 $\sum_{a_k \leq 2} \mathbb{E}[Z_k(G_k)^2] \leq e^4 \sum_{a_k \leq 2} p_k^2 a_k^2 < \infty$  である。  $\square$

### § 3.2 命題 3 の証明

不等式 (3) から、

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \left\{ \begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx < \infty &\iff \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k \frac{1}{\gamma_k - a_k} e^{-\frac{1}{2}(\gamma_k - a_k)^2} < \infty \\ \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx < \infty &\iff \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} < \infty \end{aligned} \right. \\ \text{(II)} \quad & \left\{ \begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{N}_2} p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx < \infty &\iff \sum_{k \in \mathcal{N}_2} p_k \frac{1}{\gamma_k - a_k} e^{-\frac{1}{2}(\gamma_k - a_k)^2} < \infty \\ \sum_{k \in \mathcal{N}_2} p_k^2 e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx < \infty &\iff \sum_{k \in \mathcal{N}_2} p_k^2 e^{a_k^2} \frac{1}{2a_k - \gamma_k} e^{-\frac{1}{2}(2a_k - \gamma_k)^2} < \infty \end{aligned} \right. \\ \text{(III)} \quad & \left\{ \begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx < \infty &\iff \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k < \infty \\ \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k^2 e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx &\iff \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k^2 e^{a_k^2} \frac{1}{2a_k - \gamma_k} e^{-\frac{1}{2}(2a_k - \gamma_k)^2} < \infty \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

が成り立つ。また、

$$e^{-\frac{1}{2}(\gamma_k - a_k)^2} = e^{a_k \gamma_k - \frac{1}{2} a_k^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \gamma_k^2} = \frac{1 + p_k}{p_k} e^{-\frac{1}{2} \gamma_k^2}$$

$$e^{-\frac{1}{2}(2a_k - \gamma_k)^2} = \left( e^{\gamma_k a_k - \frac{1}{2} a_k^2} \right)^2 e^{-a_k^2} e^{-\frac{1}{2} \gamma_k^2} = \left( \frac{1 + p_k}{p_k} \right)^2 e^{-a_k^2} e^{-\frac{1}{2} \gamma_k^2}$$



だから

$$e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} < p_k e^{-\frac{1}{2}(\gamma_k - a_k)^2} < 2e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2}, \quad e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} < p_k^2 e^{a_k^2} e^{-\frac{1}{2}(2a_k - \gamma_k)^2} < 4e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} \quad (4)$$

である。

### 補題 3

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx < \infty \iff \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} < \infty$$

証明 (I) から,

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} < \infty \implies \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k \frac{1}{\gamma_k - a_k} e^{-\frac{1}{2}(\gamma_k - a_k)^2} < \infty$$

を示せばよい。  $\gamma_k - a_k \geq 1$  と (4) から,

$$p_k \frac{1}{\gamma_k - a_k} e^{-\frac{1}{2}(\gamma_k - a_k)^2} \leq 2e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2}$$

であり, また,  $\log \frac{1+p_k}{p_k} = \gamma_k a_k - \frac{1}{2}a_k^2$  より

$$\frac{1}{p_k} < \frac{1+p_k}{p_k} = e^{\gamma_k a_k - \frac{1}{2}a_k^2}$$

だから,

$$p_k^2 e^{a_k^2} e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} > e^{-2\gamma_k a_k + a_k^2} e^{a_k^2} e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} = e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2 - 2\gamma_k a_k + 2a_k^2} = e^{\frac{1}{2}(\gamma_k - 2a_k)^2} \geq 1$$

である。よって,

$$p_k \frac{1}{\gamma_k - a_k} e^{-\frac{1}{2}(\gamma_k - a_k)^2} \leq 2e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} \leq 2p_k^2 e^{a_k^2},$$

したがって,

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} < \infty \implies \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k \frac{1}{\gamma_k - a_k} e^{-\frac{1}{2}(\gamma_k - a_k)^2} < \infty$$

が成り立つ。  $\square$

### 補題 4

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathcal{N}_2} p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + \sum_{k \in \mathcal{N}_2} p_k^2 e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx < \infty \\ \iff & \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{a_k}{(\gamma_k - a_k)(2a_k - \gamma_k)} e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} < \infty \end{aligned}$$

証明 これは (II) と (4) から直ちに分かる。  $\square$

## 補題 5

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k \int_{\gamma_k - a_k}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k^2 e^{a_k^2} \int_{-\infty}^{\gamma_k - 2a_k} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx < \infty \iff \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k < \infty$$

証明 (III) より

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k < \infty \implies \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k^2 e^{a_k^2} \frac{1}{2a_k - \gamma_k} e^{-\frac{1}{2}(2a_k - \gamma_k)^2} < \infty$$

を示せばよい。  $2a_k - \gamma_k \geq 1$  と (4) より

$$p_k^2 e^{a_k^2} \frac{1}{2a_k - \gamma_k} e^{-\frac{1}{2}(2a_k - \gamma_k)^2} \leq 4e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2}$$

であり,  $\gamma_k \geq 2\sqrt{\frac{1}{2} \log \frac{1+p_k}{p_k}} = \sqrt{2 \log \frac{1+p_k}{p_k}}$  より

$$e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} \leq e^{-\log \frac{1+p_k}{p_k}} = \frac{p_k}{1+p_k} < p_k$$

だから

$$p_k^2 e^{a_k^2} \frac{1}{2a_k - \gamma_k} e^{-\frac{1}{2}(2a_k - \gamma_k)^2} \leq 4e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} < 4p_k$$

である。よって,

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k < \infty \implies \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k^2 e^{a_k^2} \frac{1}{2a_k - \gamma_k} e^{-\frac{1}{2}(2a_k - \gamma_k)^2} < \infty$$

が成り立つ。  $\square$

命題 2 と補題 3, 4, 5 から,  $\mu_{\mathbf{G}+\mathbf{Y}} \sim \mu_{\mathbf{G}}$  と

$$\sum_{a_k \leq 2} p_k^2 a_k^2 + \sum_{a_k > 2} p_k^2 + \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} + \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{a_k}{(\gamma_k - a_k)(2a_k - \gamma_k)} e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} + \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k < \infty$$

は同値であり,

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^2 \leq \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2}, \quad \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k^2 \leq \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k$$

と次の補題から,  $\sum_{a_k > 2} p_k^2 < \infty$  は不要である。

$$\text{補題 6} \quad \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{a_k}{(\gamma_k - a_k)(2a_k - \gamma_k)} e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} < \infty \implies \sum_{k \in \mathcal{N}_2} p_k^2 < \infty$$

証明

$$\sup_k \frac{(\gamma_k - a_k)(2a_k - \gamma_k)}{a_k} p_k^2 e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} < \infty$$

を証明すればよい。  $\max(x - a_k)(2a_k - x) = \frac{1}{4}a_k^2$  だから

$$\frac{(\gamma_k - a_k)(2a_k - \gamma_k)}{a_k} p_k^2 e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} \leq \frac{a_k}{4} p_k^2 e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2}$$

であり,

$$\frac{2}{p_k} > 1 + \frac{1}{p_k} = e^{\gamma_k a_k} e^{-\frac{1}{2}a_k^2}, \quad -a_k < 1 - a_k \leq \gamma_k - 2a_k \leq -1$$

だから

$$\begin{aligned} p_k^2 e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} &< \left(2 e^{-\gamma_k a_k} e^{\frac{1}{2}a_k^2}\right)^2 e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} = 4e^{a_k^2} e^{-2\gamma_k a_k} e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} = 4e^{\frac{1}{2}(\gamma_k - 2a_k)^2} e^{-a_k^2} \\ &< 4e^{\frac{1}{2}a_k^2} e^{-a_k^2} = 4e^{-\frac{1}{2}a_k^2} \end{aligned}$$

である。したがって,

$$\frac{(\gamma_k - a_k)(2a_k - \gamma_k)}{a_k} p_k^2 e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} \leq \frac{a_k}{4} p_k^2 e^{\frac{1}{2}\gamma_k^2} \leq \frac{a_k}{4} \cdot 4e^{-\frac{1}{2}a_k^2} \leq \max_x x e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

が成り立つ。□

以上の補題から, 命題 3 が得られる。

### § 3.3 命題 4 の証明

命題 3 に現れた項を,  $p_k$  のベキの形に書き換えていく。まず,

$$e^{a_k^2} = e^{\frac{a_k^2}{\log \frac{1+p_k}{p_k}}} \left( \log \frac{1+p_k}{p_k} \right) = \left( \frac{p_k}{1+p_k} \right)^{-\frac{a_k^2}{\log \frac{1+p_k}{p_k}}} = p_k^{-\frac{a_k^2}{\log \frac{1+p_k}{p_k}}} (1+p_k)^{\frac{a_k^2}{\log \frac{1+p_k}{p_k}}}$$

であり,  $k \in \mathcal{N}_1$  のとき  $\gamma_k > 2a_k - 1$ ,  $a_k > 2$  だから

$$\frac{1}{a_k} \log \frac{1+p_k}{p_k} > 2a_k - \frac{a_k}{2} - 1 = \frac{3}{2}a_k - \frac{a_k}{2} = a_k,$$

である。よって,

$$1 < (1+p_k)^{\frac{a_k^2}{\log \frac{1+p_k}{p_k}}} < 2$$

となり

$$p_k^{-\frac{a_k^2}{\log \frac{1+p_k}{p_k}}} < e^{a_k^2} < 2p_k^{-\frac{a_k^2}{\log \frac{1+p_k}{p_k}}}, \quad k \in \mathcal{N}_1$$

が成り立つ。したがって,

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^2 e^{a_k^2} < \infty \iff \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^{2 - \frac{a_k^2}{\log \frac{1+p_k}{p_k}}} < \infty \quad (5)$$

である。次に,

$$\gamma_k^2 = \frac{1}{4}a_k^2 + \log \frac{1+p_k}{p_k} + \frac{1}{a_k^2} \left( \log \frac{1+p_k}{p_k} \right)^2$$

より

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} &= e^{-\frac{1}{8}a_k^2} e^{-\frac{1}{2}\log\frac{1+p_k}{p_k}} e^{-\frac{1}{2a_k^2}\left(\log\frac{1+p_k}{p_k}\right)^2} = e^{-\frac{1}{8}a_k^2} \sqrt{\frac{p_k}{1+p_k}} \left(\frac{1+p_k}{p_k}\right)^{\frac{1}{2a_k^2}\log\frac{1+p_k}{p_k}} \\ &= e^{-\frac{1}{8}a_k^2} \left(\frac{1+p_k}{p_k}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2a_k^2}\log\frac{1+p_k}{p_k}} \end{aligned}$$

であり,

$$e^{-\frac{1}{8}a_k^2} = e^{-\frac{1}{8}\frac{a_k^2}{\log\frac{1+p_k}{p_k}}\left(\log\frac{1+p_k}{p_k}\right)} = \left(\frac{p_k}{1+p_k}\right)^{\frac{1}{8}\frac{a_k^2}{\log\frac{1+p_k}{p_k}}}$$

だから,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} &= \left(\frac{p_k}{1+p_k}\right)^{\frac{1}{8}\frac{a_k^2}{\log\frac{1+p_k}{p_k}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2a_k^2}\log\frac{1+p_k}{p_k}} = \left(\frac{p_k}{1+p_k}\right)^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{a_k^2}{\log\frac{1+p_k}{p_k}} + 2 + \frac{2\log\frac{1+p_k}{p_k}}{a_k^2}\right)} \\ &= \left(\frac{p_k}{1+p_k}\right)^{\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a_k^2}{2\log\frac{1+p_k}{p_k}}} + \sqrt{\frac{2\log\frac{1+p_k}{p_k}}{a_k^2}}\right)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

である。いま,

$$\gamma_k = \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{a_k} \frac{a_k^2}{2\sigma_k^2} = \frac{1}{2}a_k + \frac{a_k}{2\sigma_k^2}$$

だから

$$\gamma_k - a_k = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sigma_k^2}\right), \quad 2a_k - \gamma_k = \frac{a_k}{2}\left(3 - \frac{1}{\sigma_k^2}\right),$$

したがって,

$$\begin{aligned} \frac{(\gamma_k - a_k)(2a_k - \gamma_k)}{a_k} &= \frac{1}{a_k} \frac{a_k^2}{4} \left(\frac{1}{\sigma_k^2} - 1\right) \left(3 - \frac{1}{\sigma_k^2}\right) = \frac{a_k}{4\sigma_k^4} (1 - \sigma_k^2)(3\sigma_k^2 - 1) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\sigma_k^3} \sqrt{2\log\frac{1+p_k}{p_k}} (1 - \sigma_k^2)(3\sigma_k^2 - 1) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sigma_k^3} \sqrt{\log\frac{1+p_k}{p_k}} (1 - \sigma_k^2)(3\sigma_k^2 - 1) \end{aligned}$$

が成り立つ。  $k \in \mathcal{N}_2$  のとき  $a_k + 1 \leq \gamma_k \leq 2a_k - 1$  だから

$$\frac{1}{2}a_k + 1 \leq \frac{1}{a_k} \log\frac{1+p_k}{p_k} \leq \frac{3}{2}a_k - 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{2+a_k}{a_k} \leq \frac{2\log\frac{1+p_k}{p_k}}{a_k^2} \leq \frac{3a_k-2}{a_k},$$

したがって

$$1 < \sqrt{\frac{2+a_k}{a_k}} \leq \frac{1}{\sigma_k} \leq \sqrt{\frac{3a_k-2}{a_k}} < \sqrt{3}$$

である。よって、

$$\frac{2\sqrt{2}}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)} \frac{1}{\sqrt{\log \frac{1+p_k}{p_k}}} \leq \frac{a_k}{(\gamma_k - a_k)(2a_k - \gamma_k)} \leq \frac{6\sqrt{6}}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)} \frac{1}{\sqrt{\log \frac{1+p_k}{p_k}}}$$

が成り立つ。これらと (6) を併せて、

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{a_k}{(\gamma_k - a_k)(2a_k - \gamma_k)} e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2} < \infty \\ \Leftrightarrow & \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)} \frac{1}{\sqrt{\log \frac{1+p_k}{p_k}}} \left( \frac{p_k}{1+p_k} \right)^{\frac{1}{4}(\sigma_k + \frac{1}{\sigma_k})^2} < \infty \\ \Leftrightarrow & \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}(\sigma_k + \frac{1}{\sigma_k})^2}}{\sqrt{\log \frac{1+p_k}{p_k}}} < \infty \end{aligned}$$

が成り立つ。

上の計算と命題 3 から、命題 4 が成り立つ。

### § 3.4 定理 1 の証明

補題 7 (a)  $a_k > 2$ ,  $\frac{1}{\sqrt{3}} < \sigma_k < \sqrt{\frac{a_k}{3a_k-2}}$  のとき、次の不等式が成り立つ。

$$p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k)^2} < p_k^{2(1-\sigma_k^2)} < e^{\frac{3}{4}} p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k)^2} < \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{3}{4}}}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}}$$

(b)  $a_k > 2$ ,  $\sqrt{\frac{a_k}{2+a_k}} < \sigma_k < 1$  のとき、次の不等式が成り立つ。

$$p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k)^2} < p_k < e p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k)^2} < \frac{4e}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}}$$

証明 (a)  $2(1-\sigma_k^2) < \frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k)$  だから、

$$p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k)} < p_k^{2(1-\sigma_k^2)}$$

である。また、 $\frac{1}{p_k} < \frac{1+p_k}{p_k} = e^{\frac{a_k^2}{2\sigma_k^2}} < e^{\frac{3}{2}a_k^2}$  より

$$\begin{aligned} p_k^{2(1-\sigma_k^2)} \frac{1}{p_k} &= p_k^{-\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k)^2} &= p_k^{-\frac{1}{4}\sigma_k^2(3-\frac{1}{\sigma_k^2})^2} < p_k^{-\frac{1}{4}\frac{a_k}{3a_k-2}(3-\frac{3a_k-2}{a_k})^2} \\ &= \left(\frac{1}{p_k}\right)^{\frac{1}{a_k(3a_k-2)}} < e^{\frac{3}{2}\frac{a_k}{3a_k-2}} < e^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

だから,

$$p_k^{2(1-\sigma_k^2)} < e^{\frac{3}{4}(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k)^2}$$

である。さらに,  $|\log p_k| < \log \frac{1+p_k}{p_k} = \frac{a_k^2}{2\sigma_k^2}$  だから,

$$(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)\sqrt{|\log p_k|} < \left(\frac{3a_k}{3a_k-2}-1\right) \frac{a_k}{\sqrt{2}\sigma_k} < \frac{\sqrt{6}}{3-\frac{2}{a_k}} < \sqrt{\frac{3}{2}}$$

である。

(b)  $1 < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k\right)$  より

$$p_k^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k\right)^2} < p_k$$

が成り立つ。また,  $\frac{1}{p_k} < \frac{1+p_k}{p_k} = e^{\frac{a_k^2}{2\sigma_k^2}} < e^{\frac{1}{2}a_k(2+a_k)}$  だから,

$$p_k p_k^{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k\right)^2} = p_k^{-\frac{1}{4}\sigma_k^2\left(\frac{1}{\sigma_k^2}-1\right)^2} < \left(\frac{1}{p_k}\right)^{\frac{1}{4}\left(\frac{2+a_k}{a_k}-1\right)^2} = \left(\frac{1}{p_k}\right)^{\frac{1}{4}} < e^{\frac{1}{2}\frac{a_k+2}{a_k}} < e,$$

よって,

$$p_k < e p_k^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k\right)^2}$$

である。さらに,  $|\log p_k| < \log \frac{1+p_k}{p_k} = \frac{a_k^2}{2\sigma_k^2}$ ,  $\sigma_k > \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  だから,

$$\begin{aligned} (1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)\sqrt{|\log p_k|} &< \left(1 - \frac{a_k}{2+a_k}\right) 2 \frac{a_k}{\sqrt{2}\sigma_k} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2+a_k} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a_k}{\sigma_k} < \frac{4}{1+\frac{2}{a_k}} < 4 \end{aligned}$$

である。□

定理 1 の証明  $\mu_{G+Y} \sim \mu_G$  とすれば, 命題 4 より,

$$\sum_{\substack{a_k > 2 \\ \sigma_k \leq \frac{1}{\sqrt{3}}} p_k^{2(1-\sigma_k^2)} + \sum_{\substack{a_k > 2 \\ \sigma_k \geq 1}} p_k \leq \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^{2(1-\sigma_k^2)} + \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k < \infty$$

であり,  $\max\{1, 2(1-\sigma_k^2)\} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k\right)^2$  だから,

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{a_k > 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} < \sigma_k < 1}} \alpha(\sigma_k, p_k) p_k^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k\right)^2} \\ &= \sum_{\substack{a_k > 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} < \sigma_k < \sqrt{\frac{a_k}{3a_k-2}}} p_k^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k\right)^2} + \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k\right)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}} + \sum_{\substack{a_k > 2 \\ \sqrt{\frac{a_k}{2+a_k}} < \sigma_k < 1}} p_k^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k\right)^2} \\ &\leq \sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^{2(1-\sigma_k^2)} + \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k\right)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}} + \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k < \infty \end{aligned}$$

である。逆に,

$$\sum_{a_k \leq 2} a_k^2 p_k^2 + \sum_{a_k > 2} \alpha(\sigma_k, p_k) p_k^{\varphi(\sigma_k)} < \infty$$

とすれば,

$$\sum_{\substack{a_k > 2 \\ \sigma_k \leq \frac{1}{\sqrt{3}}}} p_k^{2(1-\sigma_k^2)} + \sum_{\substack{a_k > 2 \\ \sigma_k \geq 1}} p_k + \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}} < \infty$$

であり, 補題 7 より

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a_k > 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} < \sigma_k < \sqrt{\frac{a_k}{3a_k-2}}} p_k^{2(1-\sigma_k^2)} &\leq e^{\frac{3}{4}} \sum_{\substack{a_k > 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} < \sigma_k < \sqrt{\frac{a_k}{3a_k-2}}} p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2} < \infty, \\ \sum_{\substack{a_k > 2 \\ \sqrt{\frac{a_k}{2+a_k}} < \sigma_k < 1}} p_k &\leq e \sum_{\substack{a_k > 2 \\ \sqrt{\frac{a_k}{2+a_k}} < \sigma_k < 1}} p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2} < \infty \end{aligned}$$

だから,

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^{2(1-\sigma_k)^2} + \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{1}{(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}} + \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k < \infty$$

である。したがって, 命題 4 より  $\mu_{G+Y} \sim \mu_G$  が成り立つ。  $\square$

### § 3.5 命題 1 の証明

補題 8  $k \in \mathcal{N}_2$ ,  $0 < p_k < \frac{1}{2}$  のとき, 次の不等式が成り立つ。

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} < (1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)\sqrt{|\log p_k|} < \frac{1}{3} p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k}+\sigma_k)^2} p_k^{-2}.$$

証明  $p_k < \frac{1}{2}$  より  $\log \frac{1+p_k}{p_k} < 2|\log p_k|$  だから,

$$\frac{a_k}{\sigma_k} = \sqrt{2 \log \frac{1+p_k}{p_k}} < 2\sqrt{|\log p_k|}$$

である。したがって,

$\sigma_k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき

$$(1-\sigma_k^2)(3\sigma_k^2-1)\sqrt{|\log p_k|} > \frac{1}{2} \left( \frac{3a_k}{3a_k-2} - 1 \right) \frac{a_k}{2\sigma_k} > \frac{1}{2} \frac{2}{3-\frac{2}{a_k}} \frac{1}{2} \sqrt{2} > \frac{1}{3\sqrt{2}},$$

$\sigma_k > \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき

$$(1 - \sigma_k^2)(3\sigma_k^2 - 1)\sqrt{|\log p_k|} > \left(1 - \frac{a_k}{2 + a_k}\right) \left(\frac{3}{2} - 1\right) \frac{a_k}{2\sigma_k} > \frac{2}{1 + \frac{2}{a_k}} \frac{1}{2} \frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

である。一方、 $\frac{1}{\sqrt{3}} < \sigma_k < 1$  だから、

$$2 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k\right)^2 > 2 - \frac{1}{4}(3 + 1 + 2) = \frac{1}{2},$$

したがって、

$$p_k^2(1 - \sigma_k^2)(3\sigma_k^2 - 1)\sqrt{|\log p_k|} p_k^{-\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k)^2} \leq \frac{1}{3} \sqrt{\log\left(1 + \frac{1}{p_k}\right)} \sqrt{p_k} < \frac{1}{3}$$

である。□

命題 1 の証明

$$\sum_{a_k > 2} p_k^{\varphi(\sigma_k)} + \sum_{a_k \leq 2} a_k^2 p_k^2 < \infty$$

とする。

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_1} p_k^{2(1 - \sigma_k^2)} + \sum_{k \in \mathcal{N}_3} p_k \leq \sum_{a_k > 2} p_k^{\varphi(\sigma_k)} < \infty$$

だから、命題 4 より、

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{1}{(1 - \sigma_k^2)(3\sigma_k^2 - 1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}} < \infty$$

を示せばよい。いま、 $\sum_{a_k > 2} p_k^2 \leq \sum_{a_k > 2} p_k^{\varphi(\sigma_k)} < \infty$  だから、

$$0 < p_k < \frac{1}{2}, \quad k \geq k_0, \quad a_k > 2$$

をみたす  $k_0 \in \mathbb{N}$  が存在し、補題 8 より、

$$\frac{1}{(1 - \sigma_k^2)(3\sigma_k^2 - 1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}} \leq 3\sqrt{2} p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k)^2}, \quad k_0 \leq k \in \mathcal{N}_2$$

が成り立つ。よって、

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{1}{(1 - \sigma_k^2)(3\sigma_k^2 - 1)} \frac{p_k^{\frac{1}{4}(\frac{1}{\sigma_k} + \sigma_k)^2}}{\sqrt{|\log p_k|}} < \infty$$

である。



逆に,  $\mu_{G+Y} \sim \mu_G$  とする。命題 A より  $\sum_{a_k > 2} p_k^2 < \infty$  だから,  $a_k > 2$  のとき,

$$0 < p_k < \frac{1}{2}, \quad \text{すなわち,} \quad |\log p_k| > \log 2$$

が成り立っているとしても一般性を失わない。このとき, 命題 4 より

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_3} \frac{p_k^{\varphi(\sigma_k)}}{\sqrt{|\log p_k|}} \leq \frac{1}{\sqrt{\log 2}} \sum_{k \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_3} p_k^{\varphi(\sigma_k)} < \infty$$

である。

いま,  $k \in \mathcal{N}_2$  に対して

$$0 < (1 - \sigma_k^2)(3\sigma_k^2 - 1) \leq \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(3 \cdot \frac{2}{3} - 1\right) = \frac{1}{3}$$

だから,

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{p_k^{\varphi(\sigma_k)}}{\sqrt{|\log p_k|}} \leq \frac{1}{3} \sum_{k \in \mathcal{N}_2} \frac{1}{(1 - \sigma_k^2)(3\sigma_k^2 - 1)} \frac{p_k^{\varphi(\sigma_k)}}{\sqrt{|\log p_k|}} < \infty$$

である。よって,

$$\sum_{a_k \leq 2} a_k^2 p_k^2 + \sum_{a_k > 2} \frac{p_k^{\varphi(\sigma_k)}}{\sqrt{|\log p_k|}} < \infty$$

が成り立つ。□

## 参 考 文 献

- [1] M. Hino. On equivalence of product measures by random translation. *J. Math. Kyoto Univ.*, 34(4):755–765, 1994.
- [2] J.-P. Kahane. Sur le chaos multiplicatif. *Ann. Sci. Math. Québec*, 9(2):105–150, 1985.
- [3] S. Kakutani. On equivalence of infinite product measures. *Ann. Math.*, 49:214–224, 1948.
- [4] K. Kitada and H. Sato. On the absolute continuity of infinite product measure and its convolution. *Probab. Th. Rel. Fields*, 81:609–627, 1989.
- [5] H. Mizumachi and H. Sato. Absolute continuity of a two-valued random translation of a gaussian sequence. to appear in Trends in Probability and Related Analysis, the Proceedings of SAP'96.
- [6] H. Sato and M. Tamashiro. Multiplicative chaos and random translation. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 30(2):245–264, 1994.