

Title	Generalized Numerical Radius and $\rho$ -Dilation(Inequalities in operator theory and its related topics)
Author(s)	大久保, 和義
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1027: 68-74
Issue Date	1998-04
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/61784">http://hdl.handle.net/2433/61784</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Generalized Numerical Radius and  $\rho$ -Dilation

北海道教育大学札幌校 大久保 和義

1. はじめに ここでの結果は中路氏 (北海道大学・理学部) との共同研究による。  
以下では  $A, B$  はヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上の有界線形作用素とする。

$\rho > 0$  に対して  $A$  が  $\rho$ -縮小作用素であるとは  $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$  なるヒルベルト空間  $\mathcal{K}$  とその上のユニタリ作用素  $U$  があって、

$$A^n = \rho P U^n|_{\mathcal{H}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つこととする。ここで  $P$  は  $\mathcal{K}$  から  $\mathcal{H}$  への直交射影作用素である。 ([7] 参照)  $\rho$ -縮小作用素の特徴づけとして次のことが知られている。

**Theorem A.** ( *B.Sz.-Nagy and C. Foias*[8] )  $A \in B(\mathcal{H}), \rho > 0$  とする。このとき、次の条件は同値である。

(i)  $A$  が  $\rho$ -縮小作用素

(ii)  $r(A) \leq \frac{\rho}{|\rho-1|}, \|zA\{\rho - z(\rho-1)A\}^{-1}\| \leq 1 \quad (|z| < 1)$

(iii)  $-2\text{Re}[zA(I - zA)^{-1}] \leq \rho I \quad (|z| < 1)$

$C_\rho$  として  $\rho$ -縮小作用素全体の集合とする。

$A$  の  $\rho$ -半径を  $w_\rho(A) = \inf\{\gamma > 0 \mid \gamma^{-1}A \in C_\rho\}$  で定義する (J.A.R.Holbrook[4] 参照)。このとき、 $w_\rho(\cdot)$  は  $0 < \rho \leq 2$  でノルムになるが  $2 < \rho < \infty$  のときは以下のように準ノルムにはなるがノルムではない。

$$w_\rho(A + B) \leq \frac{\rho}{2}\{w_\rho(A) + w_\rho(B)\}$$

$\rho$ -半径は次の性質をもつ。(T.Ando[1] 参照)

(1)  $w_1(A) = \|A\|$  : the operator norm

(2)  $w_2(A) = w(A)$  : the numerical radius

(3)  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} w_\rho(A) = r(A)$  : the spectral radius

(4)  $\log w_{\lambda\rho+(1-\lambda)\sigma}(A) \leq \lambda \log w_\rho(A) + (1-\lambda) \log w_\sigma(A)$

$$(5) \quad 1 \leq \sigma \leq \rho \text{ ならば } w_\rho(A) \leq w_\sigma(A)$$

$$(6) \quad 1 \leq \sigma \leq \rho \text{ ならば } \sigma w_\sigma(A) \leq \rho w_\rho(A)$$

$$(7) \quad w_\rho(UAU^*) = w_\rho(A) \quad (\text{unitary } U)$$

$w|_\rho(\cdot)$  は Schwarz norm である。すなわち analytic function  $f: \bar{D} \rightarrow \bar{D}$  ( $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ),  $f(0) = 0$  に対して

$$(8) \quad w_\rho(A) \leq 1 \implies w_\rho(f(A)) \leq 1$$

$S \geq 0$  を有界半正値作用素とするとき、C.-K.Li, N.-K.Tsing and F.Uhlig [5] により一般化された数域  $V_S(A)$  が次のように定義された。

$$(9) \quad V_S(A) = \{(Ax, x) \mid x \in \mathcal{H}, |(Sx, x)| = 1\}$$

$V_S(A)$  に関して  $v_S(A)$  を次で定義する。

$$(10) \quad v_S(A) = \sup\{|(Ax, x)| \mid x \in \mathcal{H}, |(Sx, x)| = 1\}$$

特に  $S = I$  のときは、 $V_I(A) = W(A) := \{(Ax, x) \mid \|x\| = 1\}$  ( $A$  の数域) で、かつ  $v_I(A) = w(A)$  である。

この応用としては、 $A$  がコンパクト作用素で  $S = |A| := (A^*A)^{1/2}$ 、 $v_S(A) \leq 1$  のとき、 $A$  が正規作用素であることが T.Ando and K.Takahashi [3] によって知られている。  $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$  に対して

$$\mathbf{w}_\lambda(A) = \sup\{|(Ax, x)| \mid \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|Ax\|^2 \leq 1\}$$

$$\mathbf{w}_\mu^+(A) = \sup\{\mu\|Ax\|^2 + (1-\mu)|(Ax, x)| \mid \|x\| \leq 1\}$$

として、 $\mu \geq 1$  に対して、

$$\mathbf{w}_\mu^-(A) = \sup\{\mu\|Ax\|^2 + (\mu-1)|(Ax, x)| \mid \|x\| \leq 1\}$$

とする。ここでは、 $A$  が  $\rho$ -縮小作用素であることを  $A$  に関係する  $S \geq 0$  と  $v_S(A)$  を使って、さらに、 $\mathbf{w}_\lambda(A)$ ,  $\mathbf{w}_\mu^+(A)$ ,  $\mathbf{w}_\mu^-(A)$  を用いて特徴づける。

また、 $w_\rho(A)$  を  $|(Ax, x)|$ ,  $\|Ax\|$ ,  $\|x\|$  を使って表示する。

**2. 結果**  $\rho > 0$  に対して  $A$  が  $\rho$ -縮小作用素であるための条件として次を得る。

**定理 1**  $\rho > 0, \rho \neq 1$  とする。  $0 < t \leq 1$  に対して

$$(11) \quad S_t = \frac{1}{t} \frac{\rho}{2|\rho-1|} I + t \frac{\rho-2}{2|\rho-1|} |A|^2$$

とする。このとき、 $A$  が  $\rho$ -縮小作用素であるための必要十分条件は、 $S_t \geq 0$  かつ、 $v_{S_t}(A) \leq 1$  が  $0 < t \leq 1$  で成り立つことである。

**証明**  $\rho > 0$  とする。 $A \in C_\rho$  であるための必要十分条件は

$$\|x\|^2 + \left(1 - \frac{2}{\rho}\right) |\zeta|^2 \|Ax\|^2 - 2 \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \operatorname{Re} \zeta (Ax, x) \geq 0$$

が成り立つことである。ここで  $\zeta \in D, x \in \mathcal{H}$  である。これは

$$|\zeta| |(Ax, x)| \leq \frac{\rho}{2|\rho-1|} \|x\|^2 + \frac{\rho-2}{2|\rho-1|} |\zeta|^2 \|Ax\|^2$$

と同値であり、定理が言える。

この結果として、

**系 2**  $\rho > 0, \rho \neq 1$  に対して  $A$  が  $\rho$ -縮小作用素であるために必要十分条件は、 $0 < t \leq 1$  に対して  $A = S_t^{1/2} B_t S_t^{1/2}$  とできることである。ここで、 $B_t$  は  $w(B_t) \leq 1$  である。 $(S_t$  は (11) で定義された作用素)

この証明は次の定理と同様なのでそこで示す。

特に、 $0 < \rho \leq 2, \rho \neq 1$  のときは、次のことが言える。

**定理 3**  $0 < \rho \leq 2, \rho \neq 1$  とすると、 $A$  が  $\rho$ -縮小作用素であるために必要十分条件は  $A = S^{1/2} B S^{1/2}$  となることである。ただし、 $S = (\rho I + (\rho-2)|A|^2)/2|\rho-1|$  で、 $B$  は  $w(B) \leq 1$  を満たす。

**証明**  $A \in C_\rho$  とする。定理 1 で  $0 < \rho \leq 2$  のとき、 $S_t (0 \leq t \leq 1)$  の最小は  $t=1$  のときで、したがって  $S$  のみを考えるとよい。 $1 < \rho \leq 2$  とする。仮に、 $y (\neq 0) \in \mathcal{H}$  が  $Sy = 0$  を満たすとすると、 $|A|^2 y = \rho y / (2-\rho)$  となる。また、(6) より  $\rho w_\rho(A) \geq \|A\|$  がいえるから、

$$1 \geq w_\rho(A) \geq \frac{\|A\|}{\rho} \geq \frac{1}{\sqrt{\rho(2-\rho)}}$$

より、 $\rho=1$  となり矛盾。よって、 $\ker S = \{0\}$  である。 $0 < \rho < 1$  のとき、 $\rho w_\rho(A) = (2-\rho)w_{2-\rho}(A)$  が知られている (T.Ando and K.Nishio [2] 参照) から、さらに、

$$\begin{aligned} & \left( (2-\rho)I + ((2-\rho)-2) \left( \frac{2-\rho}{\rho} \right)^2 |A|^2 \right) / 2((2-\rho)-1) \\ &= \frac{2-\rho}{\rho} (\rho I + (\rho-2)|A|^2) / 2(1-\rho) \end{aligned}$$

が成り立つから、このときも  $\ker S = \{0\}$  であることがわかる。したがって、 $v_S(A) \leq 1$  であるための必要十分条件は

$$|(S^{-1/2}AS^{-1/2}x, x)| \leq (x, x) \quad (x \in \mathcal{H})$$

であり、 $B = S^{-1/2}AS^{-1/2}$  とするとこの不等式は

$$A = S^{1/2}BS^{1/2}, \quad w(B) \leq 1$$

となる。

**系 4**  $\rho > 0, \rho \neq 1$  とする。 $t \geq w_\rho(A)$  であるとき、

$$(12) \quad |(Ax, x)| \leq t \frac{\rho}{2|\rho-1|} \|x\|^2 + \frac{1}{t} \frac{\rho-2}{2|\rho-1|} \|Ax\|^2 \quad (x \in \mathcal{H})$$

が成り立つ。逆に、ある  $t_0$  があって、 $t \geq t_0$  に対して (12) が成り立てば、 $t_0 \geq w_\rho(A)$  である。

この事実は後で用いる。

**系 5**

(1)  $0 \leq \mu \leq 1, 1 \leq \rho = 2/(\mu+1) \leq 2$  とする。このとき、 $A$  が  $\rho$ -縮小作用素であることと  $w_\mu^+(A) \leq 1$  であることが同値である。

(2)  $1 \leq \mu, 0 < \rho = 2/(\mu+1) \leq 1$  とする。このとき、 $A$  が  $\rho$ -縮小作用素であることと  $w_\mu^-(A) \leq 1$  であることが同値である。

**証明** 定理 3 での考察より、 $w_\rho(A) \leq 1$  であるための必要十分条件は

$$\frac{2-\rho}{2|\rho-1|} \|Ax\|^2 + |(Ax, x)| \leq \frac{\rho}{2|\rho-1|} \|x\|^2 \quad (x \in \mathcal{H})$$

である。この不等式は

$$\mu \|Ax\|^2 + \lambda |(Ax, x)| \leq \|x\|^2$$

と同値になる。ここで  $\mu = (2-\rho)/\rho, \lambda = 2|\rho-1|/\rho$  である。仮に  $1 < \rho \leq 2$  なら  $\mu + \lambda = 1$ , もし  $0 < \rho < 1$  なら  $\mu - \lambda = 1$  である。

$\mu \|A\|^2 + \lambda w(A) \leq 1$  ( $\mu + \lambda = 1$  ( $0 \leq \mu \leq 1$ ) または  $\mu - \lambda = 1$  ( $1 \leq \mu < \infty$ )) とする。仮に  $\rho = 2/(\mu+1)$  ならば  $w_\rho(A) \leq 1$  が系 5 から言えるが、逆は言えない。

**系 6**  $0 < \rho \leq 2$  とする。このとき  $w_\rho(A) \leq 1$  であるための必要十分条件は  $w(\mu|A|^2 + \lambda^{i\theta}A) \leq 1$  ( $0 < \theta \leq 2\pi$ )。ここで  $\mu + \lambda = 1, \mu = \frac{2}{\rho} - 1$  または  $\mu - \lambda = 1, \mu = \frac{2}{\rho} - 1$  とする。

**定理 7**  $0 \leq \lambda \leq 1$  とする。

(1)  $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$ ,  $\rho = 2\lambda/(2\lambda - 1) \geq 2$  とするとき、 $A$  が  $\rho$ -縮小作用素である必要十分条件は  $w_\lambda(tA) \leq 1$  ( $0 < t \leq 1$ ) となることである。

(2)  $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ ,  $1 \leq \rho = 2(\lambda - 1)/(2\lambda - 1) \geq 2$  かつ  $A$  が可逆とするとき、 $A^{-1}$  が  $\rho$ -縮小作用素である必要十分条件は  $w_\lambda(tA) \leq 1$  ( $t \geq 1$ ) となることである。

この証明は定理 1 を用いてできる。

**定理 8**  $0 < \rho$ ,  $\rho \neq 1$  とする。このとき、

$$(13) \quad w_\rho(A) = \frac{|\rho - 1|}{\rho} \sup\{|(Ax, x)| + \sqrt{D} \mid \|x\| = 1, D \geq 0\}$$

ただし、 $D = |(Ax, x)|^2 - \frac{\rho(\rho-2)}{(\rho-1)^2} \|Ax\|^2$  とする。

**証明** 系 4 より、 $t \geq w_\rho(A)$  とすると  $\lambda \|x\|^2 t^2 - |(Ax, x)|t + (1 - \lambda) \|Ax\|^2 \geq 0$  ( $x \in \mathcal{H}$ ) となる。ここで  $\lambda = \rho/2|\rho - 1|$ 。  $D \geq 0$  と仮定すると、

$$w_\rho(A) \leq \frac{|(Ax, x)| - \sqrt{D}}{2\lambda \|x\|^2}$$

または、

$$w_\rho(A) \geq \frac{|(Ax, x)| + \sqrt{D}}{2\lambda \|x\|^2}$$

である。

$$t_0 = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax, x)| + \sqrt{D}}{2\lambda \|x\|^2}$$

とおくと、 $t \geq t_0$  ならば

$$\lambda \|x\|^2 t^2 - |(Ax, x)|t + (1 - \lambda) \|Ax\|^2 \geq 0$$

が  $x \in \mathcal{H}$  でいえる。系 4 から、 $w_\rho(A) \leq t_0$  となる。

$0 < \rho \leq 2$  のとき、 $|{(Ax, x)}| - \sqrt{D} \leq 0$  だから、 $w_\rho(A) \geq t_0$  がいえて、 $w_\rho(A) = t_0$  となる。

$\rho > 2$  のとき、 $x_0 \in \mathcal{H}$  で

$$w_\rho(A) \leq \frac{|(Ax_0, x_0)| - \sqrt{D}}{2\lambda \|x_0\|^2}$$

をみたすとする、系 4 から

$$|(Ax_0, x_0)| \leq t\lambda \|x_0\|^2 + \frac{1}{t}(1 - \lambda) \|Ax_0\|^2$$

$(t > \{|(Ax_0, x_0)| - \sqrt{D}\}/2\lambda\|x_0\|^2)$  がいえる。一方で、もし、 $t > \{|(Ax_0, x_0)| - \sqrt{D}\}/2\lambda\|x_0\|^2$  ならば、

$$\lambda\|x_0\|^2 t^2 - |(Ax_0, x_0)|t + (1 - \lambda)\|Ax_0\|^2 < 0$$

となり、これは矛盾する。したがって、

$$w_\rho(A) \geq \frac{|(Ax, x)| + \sqrt{D}}{2\lambda\|x\|^2}$$

がすべての  $x \in \mathcal{H}$  について成り立つ。ゆえに、 $\rho > 2$  でも  $w_\rho(A) = t_0$  がいえる。

**系 9**  $0 < \rho \leq 2$  とすると、次の不等式が成り立つ。

$$\max \left\{ 2 \left| 1 - \frac{1}{\rho} \right| w(A), \sqrt{\frac{2-\rho}{\rho}} \|A\| \right\} \leq w_\rho(A) \leq 2 \left| 1 - \frac{1}{\rho} \right| w(A) + \sqrt{\frac{2-\rho}{\rho}} \|A\|$$

先に注意したように、 $0 < \rho \leq 2$  では  $\rho w_\rho(A) = (2 - \rho)w_{2-\rho}(A)$  が成り立つから、 $1 \leq \rho \leq 2$  でこの不等式がいえることを示すとよいことがわかる。定理 8 から簡単にこの不等式は示される。また、 $1 < \rho \leq 2$  で、左辺の不等式はすでに知られている不等式

$$w(A) \leq w_\rho(A), \|A\| \leq \rho w_\rho(A)$$

より、良くないが、左辺との関連で挙げておいた。

### 定理 10

(1)  $0 < \rho \leq 2$  とする。このとき、

$$w_\rho(A) = \frac{2}{\rho} \sup_{\|x\|=1} \sup_{0 \leq t \leq 1} \{ \sqrt{\rho(2-\rho)} \|Ax\| \sqrt{t(1-t)} + |\rho - 1| |(Ax, x)| t \}$$

(2)  $\rho > 2$  のとき、

$$w_\rho(A) = \frac{2}{\rho} \sup_{\|x\|=1, D \geq 0} \inf_{t \geq 1} \{ -\sqrt{\rho(2-\rho)} \|Ax\| \sqrt{t(t-1)} + |\rho - 1| |(Ax, x)| t \}$$

ただし、 $D = |(Ax, x)|^2 - \frac{\rho(\rho-2)}{(\rho-1)^2} \|Ax\|^2$  とする。

**証明** (1)  $0 < \rho \leq 2$  とする。 $\|x\| = 1$  なる  $x \in \mathcal{H}$  に対して  $g(t, x) = \sqrt{\rho(2-\rho)} \|Ax\| \sqrt{t(1-t)} + |\rho - 1| \cdot |(Ax, x)| t$  とおく。このとき、

$$\begin{aligned} & 2 \left( \frac{d}{dt} g(t, x) \right) \sqrt{t(1-t)} \\ &= \sqrt{\rho(2-\rho)} \|Ax\| (1-2t) + 2|\rho - 1| \cdot |(Ax, x)| \sqrt{t(1-t)} \end{aligned}$$

となり、 $\frac{d}{dt}g(t, x)|_{t=t_0} = 0$ ,  $0 \leq t_0 \leq 1$  である必要十分条件は

$$t_0 = \frac{1}{2} + \frac{|(Ax, x)|}{2\sqrt{D}}$$

であり、したがって、

$$\sqrt{t_0(1-t_0)} = \frac{\sqrt{\rho(2-\rho)}\|Ay\|}{2|\rho-1|\sqrt{D}}$$

となる。ここで  $D = |(Ax, x)|^2 - \frac{\rho(\rho-2)}{(\rho-1)^2}\|Ax\|^2$  とする。ゆえに

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\rho} \sup_{\|x\|=1} \sup_{0 \leq t \leq 1} \{ \sqrt{\rho(2-\rho)}\|Ay\|\sqrt{t(1-t)} + |\rho-1| \cdot |(Ax, x)|t \} \\ &= \frac{2}{\rho} \sup_{\|x\|=1} \left\{ \sqrt{\rho(2-\rho)}\|Ax\| \times \frac{\sqrt{\rho(2-\rho)}\|Ax\|}{2|\rho-1|\sqrt{D}} + |\rho-1| \cdot |(Ax, x)| \times \left( \frac{1}{2} + \frac{|(Ax, x)|}{2\sqrt{D}} \right) \right\} \\ &= \frac{|\rho-1|}{\rho} \sup_{\|x\|=1} \{ |(Ax, x)| + \sqrt{D} \} \end{aligned}$$

(2) も  $f(t, x) = -\sqrt{\rho(\rho-2)}\|Ax\|\sqrt{t(t-1)} + (\rho-1)|(Ax, x)|t$  とおいて、(1) と同様な考察で示される。

定理 10 のことから、R.Mathias and K.Okubo[6] の次の表示が得られる。

系 11  $0 < \rho \leq 2$  とする。このとき、 $w_\rho(A) = \frac{2}{\rho}w(C_\rho \otimes A)$  となる。ここで、

$$C_\rho = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\rho(2-\rho)} \\ 0 & 1-\rho \end{bmatrix} \text{ である。}$$

## REFERENCES

1. T.Ando,  $\rho$ -dilation and  $\rho$ -radius (Japanese), Sugaku **28** (1976), 107-120.
2. T.Ando and K.Nishio, Convexity properties of operator radii associated with unitary  $\rho$ -dilations, Michigan Math. J. **20** (1973), 303-307.
3. T.Ando and K.Takahashi, On operators with unitary  $\rho$ -dilations, Ann. Pol. Math. **66** (1997), 11-14.
4. J.A.R.Holbrook, On the power-bounded operators of Sz.-Nagy and Foias, Acta Sci. Math. (Szeged) **29** (1968), 299-310.
5. C.K.Li, N.K.Tsing and F.Uhling, Numerical ranges of operator on an indefinite inner product space, Electronic J.Lin Alg. **1** (1996), 1-17.
6. Mathias and K.Okubo, The induced norm of the Schur multiplication operator with respect to the operator radius, Linear and Multilinear Algebra **37** (1994), 114-124.
7. B.Sz.-Nagy and C.Foias, On certain classes of power bounded operators in Hilbert space, Acta Sci. Math. **27** (1966), 17-25.
8. B.Sz.-Nagy and C.Foias, Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space, North-Holland, Amsterdam, 1970.