

Title	SCALING函数のW空間の次元及びJOINT SPECTRAL RADIUS(函数解析を用いた偏微分方程式の研究)
Author(s)	程, 遠
Citation	数理解析研究所講究録 (1996), 969: 139-142
Issue Date	1996-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/60653
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

論文の内容の要旨

論文題目 SCALING 函数の W 空間の次元及び JOINT SPECTRAL RADIUS

氏 名 程 遠

この論文で、Wavelet 理論における D.Colella と C.Heil の予想を証明した。

$$(1) \quad f(x) = \sum_{k=0}^N c_k f(2x - k)$$

は dilation 方程式と呼ばれる。ここで、係数は、条件

$$(2) \quad \sum c_{2k} = \sum c_{2k+1} = 1$$

を満たすと仮定する。この方程式の nonzero 解は scaling function と呼ばれる。もし、係数 (c_0, \dots, c_N) が Cohen の条件を満たせば、任意の一つの scaling 函数から、一つの wavelet を作れる。この wavelet の連続性は scaling 函数の連続性より決まる。最近の wavelet 研究では、scaling 函数の連続性についての研究は多い。1992 年、I.Daubechies は初めて、dilation 方程式の研究で以下のような dyadic の方法を採用した。

まず、方程式 (1) を vector 函数より書き直す。係数 (c_0, \dots, c_N) に対して、もし連続で、compact な台を持つ解があれば、 $\text{supp}(f) \subset [0, N]$ だから、vector 函数

$$(3) \quad v(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ f(x+1) \\ \vdots \\ f(x+N-1) \end{pmatrix} \quad (\forall x \in [0, 1]).$$

は函数 $f(x)$ の全部の情報を含んでいる。

二つの $N \times N$ の行列を $(\mathbb{T}_0)_{i,j} = c_{2i-j-1}$, $(\mathbb{T}_1)_{i,j} = c_{2i-j}$ と定義する。即ち、

$$(4) \quad \mathbb{T}_0 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_N & c_{N-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{T}_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_N \end{pmatrix}$$

とする $x \in [0,1]$ に対し

$$(5) \quad \tau x = 2x \bmod 1 = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2x - 1 & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

と定義すれば、dilation 方程式は次の様な vector 方程式になる

$$v(x) = \begin{cases} \mathbb{T}_0 v(2x) & 0 \leq x \leq 1/2, \\ \mathbb{T}_1 v(2x - 1) & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$f(x)$ が連続とすれば、 $v(x)$ も連続で、逆もいえる。

この研究で、最初の問題は係数について、どんな条件を付けると、対応する函数 $f(x)$ が連続になるかという事である：この問題は 1994 年 D.Cololla と C.Heil より完全に解決された。彼らの結論は曲面 (2) の下で、函数 $f(x)$ が連続函数になる係数 (c_0, \dots, c_N) の集合は、次の様に与えられる

$$(6) \quad C_W = \{(c_0, \dots, c_N); (2) \text{ を満たし, } \hat{\rho}(\mathbb{T}_0|_W, \mathbb{T}_1|_W) < 1\}.$$

ここで

$$W = \text{span}\{v(x) - v(0); x \in [0,1] \text{ で } x \text{ は dyadic}\}.$$

(2) 式により、行列 \mathbb{T}_0 、 \mathbb{T}_1 の中で各列の成分を足すと全部 1 になるので、一般的に

$$W \subset V = \{u \in \mathbb{C}^N; u_1 + \dots + u_N = 0\}$$

が成り立つ。1994 年 D.Colella と C.Heil は次の予想をした：

予想 $\mu\{(c_0, \dots, c_N) \in C_W; W \neq V\} = 0$ in 曲面 (2)。

この論文で、次の事を証明した。

定理 5.1 (主定理) 予想は正しい。

この定理の証明のため、まず compact 台の distribution の整数移動に対する線形独立の概念を紹介する。 $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ とする。

$$(7) \quad N(f) := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}; \sum_{j \in \mathbb{Z}} a(j) f(c - j) = 0\}.$$

定義 もし $N(f) = \{0\}$ ならば、 f は整数移動について線形独立という。

$$K(f) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; (z^j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}\},$$

$$F(f) := \{\zeta \in \mathbb{C}; \hat{f}(\zeta + 2k\pi) = 0, k \in \mathbb{C}\}$$

と記すと、Ron は 1989 年、次の事を証明した。

$$N(f) = \{0\} \Leftrightarrow K(f) \text{ is empty} \Leftrightarrow F(f) \text{ is empty.}$$

更に、

$$(8) \quad e^{i\zeta} \in K(f) \Leftrightarrow \hat{f}(\zeta + 2k\pi) = 0 \text{ for } k \in \mathbb{Z}.$$

言い換えると、もし、 f が線形従属であれば、 $\exists \zeta \in \mathbb{C}$

$$(9) \quad \hat{f}(\zeta + 2k\pi) = 0 \text{ for } k \in \mathbb{Z}.$$

この論文はまず次の命題を示す：

命題 5.3 $f(x)$ は線形独立である $\Rightarrow W = V$ 。

命題 5.3 により

$$(10) \quad \{(c_0, \dots, c_N) \in C_W; W \neq V\} \subset \{(c_0, \dots, c_N) \in C_W; f(x) \text{ は線形従属である}\}.$$

故り、主定理は次の命題に帰着した。

命題 5.4

$$(11) \quad \mu\{(c_0, \dots, c_N) \in C_W; f \text{ は線形従属である}\} = 0 \text{ in 曲面 (2)}.$$

命題 5.4 の証明が本質的なので、以下命題 5.4 の証明の方針を述べる。

まず (11) の集合を、 S と記し、二つの集合

$$S_1 = \{(c_0, \dots, c_N) \in C_W, \exists \zeta \in \mathbb{C}, m(\zeta) = m(\zeta + \pi) = 0\}$$

と

$$S_2 = S \setminus S_1$$

に分けて、 $\mu(S_1) = 0$ と $\mu(S_2) = 0$ の証明ができれば、証明が終わる。

$\mu(S_1) = 0$ の証明は、 S_1 を二つの集合の直積として、Fubini の定理を使うと証明できる。予想の証明の point は $\mu(S_2) = 0$ の証明である。

$\mu(S_2) = 0$ の証明において、まず f は線形従属なので、ある $\zeta \in \mathbb{C}$ に対し (9) が成り立つ。一方、ここでの f が compact 台の distribution というだけでなく、scaling 函数でもあるので、次の式も満たす

$$(12) \quad \hat{f}(\zeta) = m(\zeta/2)\hat{f}(\zeta/2).$$

但し、 $m(\zeta) = 1/2 \sum_{k=0}^N c_k e^{-ik\zeta}$ 。論文は (9) と (12) の両方を出発点として、詳しい分析により、 $K(f)$ の構造は次のようである事が分かる：

$K(f)$ はいくつかの次のような輪より得られる集合である :

$$(13) \quad \{z_0, z_1, \dots, z_n\} \quad z_0 = z_1^2, z_1 = z_2^2, \dots, z_n = z_0^2, \quad z_i^{2^{n+1}} = z_i \quad (0 \leq i \leq n).$$

一方、この論文は次のことを証明する、

$$z \in K(f) \Rightarrow a(-z) = 0$$

但し、 $a(z) = 1/2 \sum_{k=0}^N c_k z^k$ 。故に

$$a(z) = (z + z_0)(z + z_1) \cdots (z + z_n) \tilde{a}(z)$$

と書ける。

$a(z)$ の係数 (c_0, \dots, c_N) より得た集合の自由度は $(\tilde{c}_0, \tilde{c}_2, \dots)$ できるもので、このような $a(z)$ の係数より得た集合は曲面 (2) 中の測度 0 の集合である。

一方、 N を固定すると、(13) の様な数列は有限個しかないので、 $\mu(S_2) = 0$ 。これにより予想の証明は完全にできる。

そのほか、論文は $m(\xi)$ を詳しく分析する。もし

$$m(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^L \tilde{m}(\xi)$$

と書けると仮定しよう。但し、 $\tilde{m}(\pi) \neq 0$, $\tilde{m}(\xi) = 1/2 \sum_{k=0}^{N-L} \tilde{c}_k e^{-ik\xi}$ 。よく知られているように L が大きければ大きいほど $f(x)$ は滑らかとなる。論文は更に $\tilde{m}(\xi)$ の整数部分 $I_{\tilde{m}}$ と小数部分 $D_{\tilde{m}}$ を次のように定義する :

$$I_{\tilde{m}} = \min\{L; \hat{\rho}(\mathbb{T}_0^{(L)}(\tilde{m}) |_{W_L(\tilde{m})}, \mathbb{T}_1^{(L)}(\tilde{m}) |_{W_L(\tilde{m})}) < 1\},$$

$$D_{\tilde{m}} = \hat{\rho}(\mathbb{T}_0^{(I_{\tilde{m}})}(\tilde{m}) |_{W_{I_{\tilde{m}}}(\tilde{m})}, \mathbb{T}_1^{(I_{\tilde{m}})}(\tilde{m}) |_{W_{I_{\tilde{m}}}(\tilde{m})}).$$

この定義の下で次のことが証明された : $(\frac{1+e^{-i\xi}}{2})^L \tilde{m}(\xi)$ に対応する函数を $f(x)$ とする。
 $L \geq I_{\tilde{m}}$ ならば

$$f \in C^{L-I_{\tilde{m}}}(\mathbb{R}) \setminus C^{L-I_{\tilde{m}}+1}(\mathbb{R}).$$

ここで $C^n(\mathbb{R})$ は n 階連続微分可能の函数空間を表す。更に、参考論文で証明したように函数

$$\alpha_{\max}(c_0, \dots, c_N) = \sup\{\alpha; f(x) \text{ は } \alpha \text{ 指数で Hölder 連続である}\}$$

の不連続点の集合は曲面 (2) 中の測度 0 の集合である。