Title	数論的量子カオスと量子エルゴード性(解析的整数論)
Author(s)	小山, 信也
Citation	数理解析研究所講究録 (1996), 961: 53-72
Issue Date	1996-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/60527
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
961 巻 1996 年 53-72

数論的量子カオスと量子エルゴード性

慶応大 理工 小山 信也 (Shin-ya Koyama)

第1章 量子エルゴード性

本論文の目的は、数論的量子カオスの主要概念である量子エルゴード性について、3次元数論的多様体のアイゼンシュタイン級数の場合に、それが成立するための必要十分条件を求めることである。その条件とは「保型形式の L-関数の凸境界の改善」であり、これは広く信じられているリンデレーフ予想を、最も弱い形に緩めた条件である。周知のようにリーマン予想の下ではリンデレーフ予想が成立することから、量子エルゴード性もそれ以上の確からしさを持って成立することがわかる。以下に、数論的量子カオスと量子エルゴード性について説明する。

数論的量子カオスは、１９９２年末より、プリンストン大学の P. Sarnak 教授により提唱されている数論の新分野である。その内容を端的に述べれば「数論的群のスペクトル λ とその固有関数 ϕ_λ を特に $\lambda \to \infty$ の時に詳しく研究すること」であると言える。こうした研究の数論における重要性については、Sarnak 自身による総合的紹介 [S2] 及び日本語による拙著 [K2] に述べられている。

このように数論的立場からスペクトルを観察しようとする動きは、歴史的には Hilbert の第八問題「素数分布に関する未解決問題、特にリーマンの予想」(1900)、及びその後の Hilbert-Polya の提案「リーマン・ゼータ関数の零点と、何らかの自己共役作用素の固有値との対応づけ」(1915) にその起源を見ることができる。セルバーグ跡公式とセルバーグ・ゼータの発見 (1956) によって数論

とラプラシアンのスペクトルの類似が（固有値が豊富に存在するという仮定の下に）具体化し、その後、Phillips-Sarnak の固有値存在理論 (1980 代–) により、固有値の豊富な存在が非コンパクト多様体の場合には基本群の数論性と同値であろうという予想が提出された [S3]。これは、固有値が常に豊富に存在するであろうというセルバーグの予想とは全く異なるものであったが、むしろ、セルバーグの発見した類似そのものが数論性と深く関わる事実であることを意味しており、この分野の数論における重要性を確立するのに大きく貢献したと言える。

このような経緯を経た結果、Sarnak 自身が到達したのが数論的量子カオスである。こうした内容は、従来から幾何学や量子力学で興味が持たれていたが、そこに数論的モデルや解析数論特有の手法を導入することにより、多くの新しい結果が得られている。結果はおおむね、次の 3 つのタイプに分けられる。

(1) <u>λ のばらつきに関する結果</u>：固有値の分布がポアッソンまたは GOE に従う場合が古典的に知られていたが、数論的多様体の場合はその二つのモデルにまたがるような分布を呈することが数値計算されている。Luo-Sarnak [LS1] はこの現象に初の理論的サポートを与えた。

(2) <u>ϕ_λ の L^p-ノルム</u>：L^∞-ノルムの $\lambda \to \infty$ における増大度を評価する問題は、その究極的な評価（L^∞-予想）がリーマン・ゼータ関数のリンデレーフ予想を含むことなどから重要である。2、3 次元の数論的双曲多様体に対し、L^∞-ノルムの評価を改善する結果が得られている。[IS][K1]

(3a) <u>$|\phi_\lambda(z)|$ の値分布</u>：$|\phi_\lambda(z)|$ が大きい複素数 z の集合は量子力学で言うところの確率振幅の大きな部分に相当する。$\lambda \to \infty$ の時、この集合は測地線に収束する (scarring の発生) と一部に予想されていたが（[H]）、数論的多様体の場合はそういう現象は起き得ないことが証明された。[RS]

(3b) 量子エルゴード性：前項 (3a) の集合が測地線に収束しないばかりでなく、限りなく均一に分布する状態になる性質を量子エルゴード性と言う。2 次元の多様体については証明されている。[LS2]

以下に量子エルゴード性を定義する。

X を体積有限のリーマン多様体とし、その上のラプラシアンのスペクトル（離散もしくは連続スペクトル）を λ, その固有関数を ϕ_λ とする。確率測度 $\mu_\lambda = |\phi_\lambda(x)|^2 dV(x)$ （dV は体積要素）が X の任意のジョルダン可測集合 A, B に対し、

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\mu_\lambda(A)}{\mu_\lambda(B)} = \frac{\mathrm{vol}(A)}{\mathrm{vol}(B)} \tag{1.1}$$

を満たす時、X は（離散もしくは連続スペクトルに関して）量子エルゴード的であるという。（文献によっては、(1.1) を満たす $\{\lambda\}$ の部分列が存在する時に「量子エルゴード的」、部分列を取らなくても (1.1) が満たされる時に「一意に量子エルゴード的」として区別する場合もある。）量子エルゴード性は、離散・連続の各スペクトルについて、（少なくとも証明の段階では）別々に考えられるものである。

元来エルゴード性とは、流れに対して定義された数学的概念である。その直感的意味はおおむね「時間の進展に伴い、流れの軌道がどこにも集中することなく、限りなく均一に分布する」と言うような感覚であるが、流れにおける時間の代わりに固有値を考え、軌道の点の代わりに固有関数の値を考えて同様の極限的な均一性を表したものが量子エルゴード性である。

本論文で扱うのは、λ が連続スペクトルの場合であり、ϕ_λ はアイゼンシュタイン級数となる。また、3 次元のモジュラー多様体を扱うので、$\lambda = 1 + t^2$ と表し、t で結果を表すと便利である。そこで、以下、上記のμ_λ を μ_t と書くことにする。この設定で量子エ

ルゴード性 (1.1) を示すには、以下が示せれば良い。

$$\mu_t(A) \sim C\mathrm{vol}(A)\log t \tag{1.2}$$

C は t に無関係な定数である。本論文では、(1.2) が保型形式の L-関数のリンデレーフ予想から導かれることを示す。より具体的には、L-関数の凸境界をわずかでも改善することと、量子エルゴード性は同値となる。

2 次元多様体に関する量子エルゴード性は、いくつかの大きな固有値に対する固有関数の値分布が数値計算され、その成立が予想されていたのに対し、3 次元多様体に関しては全く数値例が知られていないため、量子エルゴード性の成立の可否は不明であった。本結果により、3 次元数論的多様体に関しても、2 次元の場合と同様に量子エルゴード性が成立することがほぼ確実になったと言える。

第 2 章　3 次元双曲空間

本章では 3 次元双曲空間の基本的な概念の導入と記号の設定を行なう。

3 次元双曲空間 H の点を $v = z + yj$ $(z = x_1 + x_2 i \in \mathbf{C},\ y > 0)$ と表す。類数 1 の虚二次体 K を固定し、その判別式を D_K、整数環を $O = O_K$ と書き、$D = |D_K|$ とおく。O を $\mathbf{R}^2$ の格子とみなすとき、L と書き、L の $\mathbf{R}^2$ 内での基本領域を F_L と書く。また、K の inverse different を$\omega = \omega_K = D^{-1/2}$ とおく。群 $\Gamma = PSL(2, O)$ は H に非可換一次分数変換で作用し、商空間 $X = \Gamma\backslash\mathbf{H}$ は 3 次元数論的双曲多様体となる。X 上のラプラシアンは

$$\Delta = -y^2\left(\frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{d^2}{dx_2^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right) + y\frac{d}{dy}.$$

で定義される。これは $L^2(X)$ 上に自己共役拡張を持ち、Δ のスペクトルは正の実数となり、離散と連続の両方からなる。離散スペク

トルに対する固有関数は Maass カスプ形式と呼ばれる。本論文を通じ、Maass カスプ形式を単に「カスプ形式」と呼ぶ。固有値 λ_j に対し、そのカスプ形式を $\phi_j(v)$ で表す。$\phi_j(v)$ たちがヘッケ作用素の同時固有関数であり、かつ、L^2-ノルムが 1 であるように正規化しておく。$\phi_j(v)$ たちは、$L^2(X)$ の正規直交基底をなす。$\phi_j(v)$ のフーリエ展開は [S1](2.20) で与えられている：

$$\phi_j(v) = \sum_{n \in O^*/\sim} \rho_j(n) y K_{ir_j}(2\pi|n|y) e(\langle n, z \rangle). \tag{2.1}$$

ここで、$n \sim m$ は、n, m が O の中で同じイデアルを生成することを意味する。また、$\lambda_j = 1 + r_j^2$ であり、$\langle n, z \rangle$ は通常の $\mathbf{R}^2$ の内積で、K はベッセル関数である。

第 3 章 L-関数の凸境界

本章では L-関数の臨界線上の値の大きさに関する凸境界という概念を説明する。この概念は、本論文の主定理の仮定で用いられる。

初めに、リーマン・ゼータ関数 $\zeta(s)$ の場合に説明する。臨界線は $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ であり、この線上での値 $|\zeta(\frac{1}{2} + it)|$ の、t の増大に伴う評価の問題は、解析数論において古くから重要とされてきた。究極的には、次のリンデレーフ予想が成り立つと考えられている：

<u>リンデレーフ予想</u>.

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| \ll t^{\epsilon} \quad (\forall \epsilon > 0).$$

仮にリーマン予想が正しければリンデレーフ予想も正しいことなどから、これは広く信じられており、右辺の t のベキをできるだけ小さな正の数で押えることが問題とされている。凸境界とは、この問題においていわば自明な境界のことであり、リーマン・ゼータ関数の場合、次が知られている。

リーマン・ゼータの凸境界.

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| \ll t^{\frac{1}{4}}.$$

証明. 収束域内においては、$\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$ に対し、$|\zeta(s)| \leq |\zeta(\sigma)| = O(1)$ と、t に無関係に押えられる。次に、$\mathrm{Re}(s) < 0$ においては、関数等式より

$$\zeta(s) = \zeta(1-s) \times \pi^{-\frac{1}{2}+s}\frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}$$

と表され、スターリングの公式により、$\mathrm{Im}(s) = t \to \infty$ の時、

$$\left|\pi^{-\frac{1}{2}+s}\frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}\right| \sim \pi^{\sigma-\frac{1}{2}}|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}$$

となる。ここで、

$$\mu(\sigma) = \inf \quad \left\{\xi \mid \zeta(\sigma+it) = O(t^{\xi}) \ \ (t \to \infty)\right\}$$

とおけば、ディリクレ級数の一般論から、μ は連続・非負・非増加関数である。また、Phragmen-Lindelöf の定理により、μ のグラフは下に凸となる。先の議論から

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2}-\sigma & \sigma < 0 \\ 0 & \sigma > 1 \end{cases}$$

であり、μ のグラフが下に凸であることから、$\mu(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{4}$ を得る。 □

このように、まず収束域に関して t に無関係に押さえ、次に関数等式で収束域を移した範囲に関してスターリングの公式から評価を求め、残った帯状領域に関しては凸性により評価を求めたものが「凸境界」と呼ばれるものである。この証明からわかるように、凸

境界は関数等式を持つようなすべてのゼータ関数について同様の方法で容易に求められる。実際、ゼータ関数・L-関数が k 次のオイラー積を持つ時、その凸境界は $t^{\frac{k}{4}}$ であることが証明される。一般に、ゼータ関数の臨界線上の値に関し、凸境界よりも精密な結果を出すことは重要な問題とされているが、これまでに知られている例は、以下に述べる例に限られている。

	k	凸境界	得られている改善
$\zeta(s)$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{56}$ (Bombieri-Iwaniec)
$SL(2,\mathbf{R})$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ (Jutila, Meurman)
$SL(2,\mathbf{C})$	4	1	未解決

この表は、リーマン・ゼータ関数と $SL(2,\mathbf{R})$, $SL(2,\mathbf{C})$ の保型形式の L 関数に関する凸境界とその改善の現状をまとめたものである。リーマン・ゼータ関数については、初めに Weyl により指数が $\frac{1}{6}$ に改善されたが、現在の記録は Bombieri-Iwaniec によるものである。$SL(2,\mathbf{R})$ の保型形式の L-関数については、exponential sum の複雑な計算により、正則保型形式に関しては Jutila [J] が、非正則保型形式（Maass 形式）に関しては Meurman [M] が共に $\frac{1}{3}$ という指数を得た。本論文で扱う $SL(2,\mathbf{C})$ の保型形式については、凸境界の 1 が未だに改善されていない。リンデレーフ予想によれば、これは限りなく 0 に近くまで改善されるべきであるし、$SL(2,\mathbf{R})$ の場合に改善が成功していることから見て、凸境界を改善することは将来的には可能と思われる。(現状ではベッセル関数の評価に関するテクニカルな困難のため、証明が完了していない。) 次章では、この凸境界の改善が（わずかでも）できたと仮定し、量子エルゴード性を証明する。その仮定は、以下のように述べられる。

<u>仮定 **A**</u>. $SL(2,\mathbf{C})$ の任意のカスプ形式の L-関数に対し、正数 δ

が存在して次の評価が成り立つ。

$$L\left(\phi_j, \frac{1}{2}+it\right) \ll O(t^{1-\delta})$$

第 4 章 主定理

本章では、アイゼンシュタイン級数の量子エルゴード性が、L-関数の凸境界の改善と同値であることを証明する。アイゼンシュタイン級数とは、$y(v) = y$、$v = z + jy \in \mathbf{H}^3$、$\mathrm{Re}(s) > 2$、$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in O \right\}$ という記号の下で、

$$E(v,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} y(\gamma v)^s \tag{4.1}$$

により定義される級数である。$E(v,s)$ のフーリエ展開は、Asai [A] 更に一般に Elstrodt 等 [E] により得られている：

$$\begin{aligned} E(v,s) &= y^s + y^{2-s}\frac{\xi_K(s-1)}{\xi_K(s)} \\ &+ \frac{2}{\xi_K(s)} \sum_{n \in O^*/\sim} |n|^{s-1}\sigma_{2(1-s)}(n) e^{4\pi i \mathrm{Re}(n\omega z)} K_{s-1}(4\pi|n\omega|y)y. \end{aligned} \tag{4.2}$$

ここで $\sigma_s(n) = \sum_{d|n} |d|^s$、$\xi_K(s) = (\frac{\sqrt{D}}{2\pi})^s \Gamma(s)\zeta_K(s)$ である。我々の目的は、測度 $d\mu_t = |E(v, 1+it)|^2 dV(v)$ に関する equidistribution を示すことである。ただし、$dV(v) = \frac{dx_1 dx_2 dy}{y^3}$ である。そこで、$L^2(X)$ を張るいろいろな関数との内積を考えることにする。初めに、カスプ形式 ϕ_j を考える。

<u>命題 **4.1**</u>. 仮定 A は、任意の ϕ_j に対し

$$\lim_{t\to\infty} \int_X \phi_j d\mu_t = 0$$

が成り立つことと同値である。

<u>証明</u>.

$$J_j(t) = \int_X \phi_j d\mu_t = \int_X \phi_j(v)E(v, 1+it)E(v, 1-it)\frac{dx_1 dx_2 dy}{y^3} \tag{4.3}$$

とおく。この積分を調べるため、まず

$$I_j(s) = \int_X \phi_j(v)E(v, 1+it)E(v, s)\frac{dx_1 dx_2 dy}{y^3}. \tag{4.4}$$

を考える。ϕ_j がカスプ形式であることから、ここで登場したすべての積分は収束する。積分 (4.4) を、基本領域上から全平面上に開くことにより、

$$I_j(s) = \int_0^\infty \int_L \phi_j(v)E(v, 1+it)y^s \frac{dx_1 dx_2 dy}{y^3}. \tag{4.5}$$

を得る。$v = z + yj \in \mathbf{H}$ の共役を $\overline{v} = z - yj$ と定義する。2 次元の場合には良く知られているように、カスプ形式の空間は偶と奇のカスプ形式の空間の直和として表される。ここで、カスプ形式が偶であるとは、$\phi_j(1-\overline{v}) = \phi_j(v)$ が成り立つことであり、奇であるとは、$\phi_j(1-\overline{v}) = -\phi_j(v)$ が成り立つことである。$E(v,s) = E(1-\overline{v}, s)$ より、もし ϕ_j が奇であれば $I_j(s) \equiv 0$ である。以後、ϕ_j を偶とする。すると、フーリエ展開 (2.1) は

$$\phi_j(v) = y \sum_{n \in O^*/\sim} \rho_j(n) K_{it_j}(2\pi|n|y)\cos(2\pi i\langle n, z\rangle). \tag{4.6}$$

と書かれる。ここで、$1+t_j^2 = \lambda_j$ である。係数を $\rho_j(n) = \rho_j(1)\lambda_j(n)$ によって正規化すれば、$\lambda_j(n)$ が乗法的となる。これを用いて、オイラー積展開を持つ L-関数：

$$\begin{aligned} L(\phi_j, s) &:= \sum_{n \in O^*/\sim} \frac{\lambda_j(n)}{N(n)^s} \\ &= \prod_{p:\text{prime ideal}} \left(1 - \frac{\lambda_j(p)}{N(p)^s} + \frac{1}{N(p)^{2s}}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

が定義できる。(4.2) と (4.6) を (4.5) に代入すると、

$$I_j(s) = \int_0^\infty \int_L \left(y \sum_{n\in O^*/\sim} \rho_j(n) K_{ir_j}(2\pi|n|y) \cos(2\pi\langle n, z\rangle) \right)$$
$$\left(y^{1+it} + y^{1-it} \frac{\xi_K(it)}{\xi_K(1+it)} + \frac{2y}{\xi_K(1+it)} \right.$$
$$\left. \sum_{m\in O^*/\sim} |m|^{it} \sigma_{-2it}(m) e^{4\pi i \mathrm{Re}(m\omega z)} K_{it}(4\pi|m|\omega y) \right)$$
$$y^s \frac{dx_1 dx_2 dy}{y^3}. \quad (4.8)$$

となる。ここで、

$$\int_{F_L} \cos(2\pi i \langle n\omega, z\rangle) dv = \begin{cases} 0 & n \in O - \{0\} \\ 1 & n = 0 \end{cases},$$

であるから、(4.8) を展開する過程で公式

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

を用いることにより $n = m$ の項だけが残り、

$$I_j(s) = \frac{2}{\xi_K(1+it)} \left(\sum_{(n)\subset O} \frac{|n|^{it} \sigma_{-2it}(n) \rho_j(n)}{|n|^s} \right)$$
$$\int_0^\infty K_{it}(2\pi y) K_{it_j}(2\pi y) y^s \frac{dy}{y}.$$

となる。ベッセル関数に関する積分は知られており（例えば [GR]）

$$R(s) = \sum_{n\in O} \frac{|n|^{it} \sigma_{-2it}(n) \rho_j(n)}{|n|^s}$$

とおけば、

$$I_j(s) = \frac{2\pi^{-s}}{\xi_K(1+it)} \frac{\Gamma(\frac{s+it_j+it}{2})\Gamma(\frac{s+it_j-it}{2})\Gamma(\frac{s-it_j+it}{2})\Gamma(\frac{s-it_j-it}{2})}{\Gamma(s)} R(s)$$

と表される。$R(s)$ は次のように計算される：

$$\begin{aligned}
R(s) &= \frac{1}{\rho_j(1)} \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_j(p^k)|p|^{ikt}\sigma_{-2it}(p^k)}{|p|^{ks}} \\
&= \frac{1}{\rho_j(1)} \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_j(p^k)|p|^{ikt}}{|p|^{ks}} \sum_{l=0}^{k} |p|^{-2itl} \\
&= \frac{1}{\rho_j(1)} \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_j(p^k)|p|^{ikt}}{|p|^{ks}} \frac{1-|p|^{-2it(k+1)}}{1-|p|^{-2it}} \\
&= \frac{1}{\rho_j(1)(1-|p|^{-2it})} \prod_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_j(p^k)|p|^{-k(s-it)} \right. \\
&\qquad \left. -|p|^{-2it} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_j(p^k)|p|^{-k(s+it)} \right) \\
&= \frac{1}{\rho_j(1)(1-|p|^{-2it})} \prod_p \left(\frac{1}{1-\lambda_j(p)|p|^{-(s-it)}+|p|^{-2(s-it)}} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{|p|^{-2it}}{1-\lambda_j(p)|p|^{-(s+it)}+|p|^{-2(s+it)}} \right) \\
&= \frac{1}{\rho_j(1)} \prod_p \frac{1-|p|^{-2s}}{(1-\lambda_j(p)|p|^{-(s-it)}+|p|^{-2(s-it)})} \\
&\qquad \frac{1}{(1-\lambda_j(p)|p|^{-(s+it)}+|p|^{-2(s+it)})} \\
&= \frac{1}{\rho_j(1)} \frac{L(\phi_j, \frac{s-it}{2})L(\phi_j, \frac{s+it}{2})}{\zeta_K(s)}. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}J_j(t) &= I_j(1-it)\\ &= \frac{2\pi^{-1+it}}{\xi_K(1+it)}\frac{\Gamma(\frac{1+it_j}{2})\Gamma(\frac{1+it_j-2it}{2})\Gamma(\frac{1-it_j}{2})\Gamma(\frac{1-it_j-2it}{2})}{\Gamma(1-it)}\\ &\qquad \frac{1}{\rho_j(1)}\frac{L(\phi_j,\frac{1-2it}{2})L(\phi_j,\frac{1}{2})}{\zeta_K(1-it)}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

スターリングの公式 $|\Gamma(\sigma+it)| \sim e^{-\pi t/2}|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}$ により、$t\to\infty$ の時、

$$(4.10)\text{ のガンマ因子} \ll |t|^{-1} \tag{4.11}$$

となる。ここで、良く知られているゼータ関数の評価

$$t^{-\epsilon} \ll |\zeta_K(1+it)| \ll t^{\epsilon} \tag{4.12}$$

及び、L-関数の凸境界に関する仮定 A

$$L\left(\phi_j, \frac{1}{2}+it\right) \ll |t|^{1-\delta}. \tag{4.13}$$

を用いれば、(4.10) の数論的因子の漸近状態はわかり、(4.11)-(4.13) により、

$$J_j(t) \ll |t|^{-\delta}. \tag{4.14}$$

となる。これで命題 4.1 の同値性のうちの一方を得る。

逆に、$J_j(t)\to 0$ $(t\to\infty)$ とすると、(4.10) において (4.11)-(4.12) を考慮すれば、(4.13) すなわち仮定 A が成り立たなくてはならない。これで命題 4.1 を得る。 □

次に、不完全アイゼンシュタイン級数との内積を考える。初めに、不完全アイゼンシュタイン級数の定義をする。$h(y)$ を 0 と ∞

で急減少な関数とする。すなわち、y が 0 または∞に近付く時、$h(y) = O_N(y^N)$ （$N \in \mathbf{Z}$）とする。そのメリン変換を

$$H(s) = \int_0^\infty h(y) y^{-s} \frac{dy}{y}$$

とおく。これは s に関する正則関数で、t に関しては各鉛直線 $\sigma + it$ 上 Schwartz class に属する。メリン逆変換公式により、任意の $\sigma \in \mathbf{R}$ に対し、

$$h(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} H(s) y^s \, ds.$$

このような h に対して収束級数

$$F_h(v) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} h(y(\gamma v)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(3)} H(s) E(v,s) \, ds$$

を定義し、これを不完全アイゼンシュタイン級数と呼ぶ。

<u>命題 **4.2**</u>. 不完全アイゼンシュタイン級数 $F(v)$ に対し、t が∞に近付くのに伴って

$$\int_X F(v) \, d\mu_t(v) \sim \frac{2}{\zeta_K(2)} \left(\int_X F(v) \, dV(v) \right) \log t$$

が成り立つ。

<u>証明</u>. 不完全アイゼンシュタイン級数は∞で急減少し、$C^\infty(X)$ に

属する。したがって、

$$
\begin{aligned}
&\int_X F_h(v)d\mu_t(v)\\
&=\int_X F_h(v)|E(v,1+it)|^2\frac{dzdy}{y^3}\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_X\int_{(3)} H(s)E(v,s)ds|E(v,1+it)|^2\frac{dzdy}{y^3}\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\int_{(3)} H(s)y^s ds\int_{F_L}|E(v,1+it)|^2\frac{dzdy}{y^3}\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\int_{(3)} H(s)y^s ds\left(\left|y^{1+it}+y^{1-it}\frac{\xi_K(it)}{\xi_K(1+it)}\right|^2\right.\\
&\qquad\left.+\left|\frac{2y}{\xi_K(1+it)}\right|^2\sum_{n\in O^*/\sim}|\sigma_{-2it}(n)K_{it}(4\pi|n|\omega y)|^2\right)\frac{dy}{y^3}\\
&=F_1(t)+F_2(t).
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
F_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\int_{(3)} H(s)y^s ds\left|y^{1+it}+y^{1-it}\frac{\xi_K(it)}{\xi_K(1+it)}\right|^2\frac{dy}{y^3}
$$

とおいた。$\left|\frac{\xi_K(it)}{\xi_K(1+it)}\right|=1$ であるから、

$$
F_1(t)=2\int_0^\infty h(y)\frac{dy}{y}+(t\text{ の急減少関数}). \tag{4.15}
$$

一方、

$$
\begin{aligned}
F_2(t)=\frac{2}{\pi i|\xi_K(1+it)|^2}\int_{(3)} H(s)\sum_{n\in O^*/\sim}\frac{|\sigma_{-2it}(n)|^2}{|n|^s}\\
\int_0^\infty|K_{it}(4\pi\omega y)|^2y^s\frac{dy}{y}ds.
\end{aligned}\tag{4.16}
$$

級数の部分は、以下のように計算される：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\in O^*/\sim} \frac{|\sigma_a(n)|^2}{|n|^s} \\
&= \prod_{p:\ \text{prime ideal}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_a(p^k)\sigma_{-a}(p^k)}{|p|^{ks}} \\
&= \prod_{p:\ \text{prime ideal}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|p|^{ks}} \left(\frac{1-|p|^{a(k+1)}}{1-|p|^a}\right) \left(\frac{1-|p|^{-a(k+1)}}{1-|p|^{-a}}\right)^2 \\
&= \prod_{p:\ \text{prime ideal}} \frac{1}{(1-|p|^a)(1-|p|^{-a})} \\
&\qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(2|p|^{-ks} - |p|^{(a-s)k+a} + |p|^{(-a-s)k-a}\right) \\
&= \prod_{p:\ \text{prime ideal}} \frac{1}{(1-|p|^a)(1-|p|^{-a})} \\
&\qquad \left(\frac{2}{1-|p|^{-s}} - \frac{|p|^a}{1-|p|^{a-s}} - \frac{|p|^{-a}}{1-|p|^{-a-s}}\right) \\
&= \prod_{p:\ \text{prime ideal}} \frac{1+p^{-s}}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-a)})(1-p^{-(s+a)})} \\
&= \frac{\zeta_K(\frac{s}{2})^2 \zeta_K(\frac{s-a}{2}) \zeta_K(\frac{s+a}{2})}{\zeta_K(s)}. \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

(4.16) 中の y に関する積分は、前命題の証明と同様に Γ 関数を用

いて評価できる。したがって、

$$F_2(t) = \frac{2}{\pi i|\xi_K(1+it)|^2} \int_{(3)} H(s) \sum_{n \in O^*/\sim} \frac{|\sigma_{-2it}(n)|^2}{|n|^s} \int_0^\infty |K_{it}(4\pi\omega y)|^2 y^s \frac{dy}{y} ds$$
$$= \frac{2}{\pi i|\xi_K(1+it)|^2} \int_{(3)} \frac{H(s)\zeta_K(\frac{s}{2})^2|\zeta_K(\frac{s}{2}+it)\Gamma(\frac{s}{2}+it)|^2\Gamma(\frac{s}{2})^2}{(4\pi\omega)^s\zeta_K(s)\Gamma(s)} ds$$
$$= \frac{2}{\pi i|\xi_K(1+it)|^2} \int_{(3)} B(s)ds. \tag{4.18}$$

ここで、

$$B(s) = \frac{H(s)\zeta_K(\frac{s}{2})^2|\zeta_K(\frac{s}{2}+it)\Gamma(\frac{s}{2}+it)|^2\Gamma(\frac{s}{2})^2}{(4\pi\omega)^s\zeta_K(s)\Gamma(s)}. \tag{4.19}$$

とおいた。スターリングの公式でΓ因子を評価し、$H(\sigma+it)$ が t に関して急減少であることを考慮すると、(4.18) の積分路を $\mathrm{Re}(s)=1$ にずらすことができる：

$$F_2(t) = \frac{4\mathrm{Res}_{s=2}B(s)}{|\xi_K(1+it)|^2} + \frac{2}{\pi i|\xi_K(1+it)|^2} \int_{(1)} B(s)ds. \tag{4.20}$$

(4.20) の第二項は、Weyl の評価 ([T] Theorem 6.6) の類似

$$\zeta_K\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll t^{\frac{1}{6}+\epsilon}$$

により評価される。よって、

$$\frac{2}{\pi i|\xi_K(1+it)|^2} \int_{(1)} B(s)ds \ll_\epsilon t^{\frac{1}{3}+\epsilon}t^{-1/2} = t^{-\frac{1}{6}+\epsilon}$$

となり、これは (4.14) 式に対応する評価である。

次に、(4.20) の留数の項について考える。$s=2$ で正則な関数 $G(s)$ を用いて、$B(s)=\zeta_K(\frac{s}{2})^2G(s)$ と表せる。ここで、

$$\zeta_K(s/2)=\frac{A_{-1}}{s-2}+A_0+O(s-2)\quad (s\to 2).$$

とおく。$B(s)$ の展開

$$B(s)=\left(\frac{A_{-1}}{s-2}+A_0+O(s-2)\right)^2 \left(G(2)+G'(2)(s-2)+O(s-2)^3\right),$$

の中の、$(s-2)^{-1}$ の係数が留数

$$\mathrm{Res}_{s=2}B(s)=G(2)A_{-1}\left(2A_0+A_{-1}\frac{G'}{G}(2)\right)$$

を与える。計算により、

$$G(2)=\frac{H(2)|\zeta_K(1+it)\Gamma(1+it)|^2\Gamma(\frac{1}{2})^2}{(4\pi\omega)^2\zeta_K(2)}=\frac{H(2)|\xi_K(1+it)|^2}{4\zeta_K(2)}$$

及び

$$\frac{G'}{G}(2)=\frac{H'}{H}(2)+\frac{\zeta_K'(1+it)}{2\zeta_K(1+it)}+\frac{\zeta_K'(1-it)}{2\zeta_K(1-it)} +\frac{\Gamma'(1+it)}{2\Gamma(1+it)}+\frac{\Gamma'(1-it)}{2\Gamma(1-it)}+C$$

となる。ここで、C は t によらない。Weyl-Hadamard-De La Vallée Poussin の評価 [T] の類似により、

$$\frac{\zeta_K'(1+it)}{\zeta_K(1+it)}\ll O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right).$$

これとスターリングの公式 $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+it) \sim \log t$ により、

$$\mathrm{Res}_{s=2}B(s) = \frac{H(2)|\xi_K(1+it)|^2}{2\zeta_K(2)}\log t + O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right).$$

を得る。最後に、(4.20) の第一項は、

$$\frac{4\mathrm{Res}_{s=2}B(s)}{|\xi_K(1+it)|^2} = \frac{2H(2)}{\zeta_K(2)}\log t + O(1).$$

と評価される。

$$H(2) = \int_0^\infty h(y)\frac{dy}{y^3} = \int_X F_h(z)\frac{dzdy}{y^3}$$

を考え合わせれば、結論を得る。 □

<u>命題 **4.3**</u>. F を、X 内にコンパクトな台を持つ連続関数とする。この時、仮定 A の下で次の漸近評価が成り立つ。

$$\int_X F(v)d\mu_t(v) \sim \frac{2}{\zeta_K(2)}\left(\int_X F(v)dV(v)\right)\log t \quad (t \to \infty)$$

<u>証明</u>. すべての不完全アイゼンシュタイン級数とカスプ形式からなる空間は、カスプで値が 0 であるような連続関数全体の空間の中で、稠密である。すなわち、与えられた F と任意の $\epsilon > 0$ に対し、$\|G-F\|_\infty < \epsilon$ なる G で、 $G = G_1 + G_2$ とカスプ形式の有限和 G_1 と不完全アイゼンシュタイン級数 G_2 の和として表されるものが存在する。G_1 に関しては仮定 A と命題 4.1 より、$t \to \infty$ では貢献がない。G_2 に関しては命題 4.2 により右辺に相当する部分を得る。また、差 $H = G - F$ は十分小であり、カスプでは急減少している。従って、別の不完全アイゼンシュタイン級数

$$H_1(v) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} h_1(y(\gamma v))$$

を用いて

$$H_1(v) \geq |H(v)|$$

と押えられ、かつこれは K にのみよる定数 $C(K)$ により

$$\int_X H_1(v)dV(v) < C(K)\epsilon$$

と評価される。これで結論を得る。 □

<u>定理</u>. 3次元モジュラー多様体のアイゼンシュタイン級数に関する量子エルゴード性は、仮定 A と同値である。

<u>証明</u>. ジョルダン可測集合の特性関数を $F(v)$ として命題 3.3 を適用すれば、仮定 A の下で量子エルゴード性が成り立つことがわかる。

逆に量子エルゴード性が成り立つとすると、カスプ形式を階段関数で近似することにより、$\lim_{t\to\infty}\int_X \phi_j d\mu_t$ が ϕ_j の X における平均値 $\lim_{t\to\infty}\int_X \phi_j(v)dV(v)$ に比例することがわかる。ϕ_j たちは L^2-空間の正規直交基底をなすように選んでいるが、特に定数関数は固有値 0 に対する固有関数であるから、この平均値は 0 に他ならない。よって命題 3.1 により仮定 A は成立する。 □

References

[A] T. Asai, *On a certain function analogous to* $\log|\eta(z)|$., Nagoya Math. J. **40** (1970), 193-211.

[E] J. Elstrodt, F. Grunewald and J. Mennicke, *Eisenstein series for imaginary quadratic number fields*, Contemporary Math. **53** (1986), 97-117.

[GR] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, 1994.

[H] E.J. Heller, Chaos and quantum physics, Les Hauches 1989, (ed. by M.J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin), North-Holland, 1991, pp. 549-661.

[IS] H. Iwaniec and P. Sarnak, *L^∞-norms of eigenfunctions of arithmetic surfaces*, Ann. of Math. **141** (1995), 301-320.

[J] M. Jutila, *Lectures on a method in the theory of exponential sums*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics **80** (1987), Springer, Berlin-New York.

[K1] S. Koyama, *L^∞-norms of eigenfunctions for arithmetic hyperbolic 3-manifolds*, Duke Math. J. **77** (1995), 799-817.

[K2] ———, 散乱行列式と数論的量子カオス, 数理科学 **382** (1995/4月号), 46-53.

[LS1] W. Luo and P. Sarnak, *Number variance for arithmetic hyperbolic surfaces*, Comm. Math. Phys. **161** (1994), 419-432.

[LS2] ———, *Quantum ergodicity of eigenfunction on* $PSL_2(Z)\backslash H^2$ (to appear).

[M] T. Meurman, *On the order of the Maass L-function on the critical line*, Colloquia Math. Soc. János Bolyai **51** (1990), North-Holland, Budapest.

[RS] Z. Rudnick and P. Sarnak, *The behavior of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds*, Comm. Math. Phys. **161** (1994), 195-213.

[S1] P. Sarnak, *The arithmetic and geometry of some hyperbolic three manifolds*, Acta math. **151** (1983), 253-295.

[S2] ———, *Arithmetic quantum chaos*, Israel Math. Conf. Proc. **8** (19 95), 183-236.

[S3] ———, *Spectra of hyperbolic surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (1995) (to appear).

[T] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta function* (1951), Oxford.