Title	Garnier system に関する一つの考察(パンルヴェ函数と漸近解析)
Author(s)	川向, 洋之
Citation	数理解析研究所講究録 (1995), 931: 34-36
Issue Date	1995-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/59960
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
931 巻 1995 年 34-36

Garnier system に関する一つの考察

東大数理科学 博士2年 川向 洋之 (KAWAMUKO, Hiroyuki)

Garnier system とは 次の Hamiltonian H_i $(i=1,\cdots,n)$ で与えられる Hamiltonian system $\partial q_i/\partial t_j = \partial H_j/\partial p_i$, $\partial p_i/\partial t_j = -\partial H_j/\partial q_i$ のことである。

$$H_i := \frac{1}{t_i(t_i-1)}\left[\sum_{j,k=1}^{n} E^i_{jk}(t,q)p_jp_k - \sum_{j=1}^{n} F^i_j(t,q)p_j + \kappa q_i\right]$$

$$E^i_{jk} := \begin{cases} q_iq_jq_k, & \text{if } i\neq j\neq k\neq i \\ q_iq_j(q_j-R_{ji}), & \text{if } i\neq j=k \\ q_iq_k(q_k-R_{ki}), & \text{if } i=j\neq k \\ q_i(q_i-1)(q_i-t_i)-\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}} S_{il}q_iq_l, & \text{if } i=j=k \end{cases}$$

$$F^i_j := \begin{cases} Aq_iq_j - \theta_iR_{ij}q_j - \theta_jR_{ji}q_i, & \text{if } i\neq j \\ (\kappa_0-1)q_i(q_i-1)+\kappa_1q_i(q_i-t_i)+\theta_i(q_i-1)(q_i-t_i) & \\ +\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n}\{\theta_kq_i(q_i-R_{jk})-\theta_iS_{ik}q_k\} & \text{if } i=j \end{cases}$$

$$R_{ij} := \frac{t_i(t_j-1)}{t_j-t_i},\quad S_{ij} := \frac{t_i(t_i-1)}{t_i-t_j}$$

$$A := k_0+k_1+k_\infty+(\sum_{i=1}^{n}\theta_i)-1$$

$$\kappa := \frac{1}{4}(A^2-\kappa_\infty{}^2)$$

特に $n=1$ として Hamiltonian system から p を消去すると、q の満たす微分方程式は Painlevé VI 型方程式になる。また 次のことが知られている。

Theorem *parameter* t ($\in \mathbf{C}$) の入った2階の線形常微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}y + p_1(x,t)\frac{d}{dx}y + p_2(x,t)y = 0 \tag{1}$$

は *Riemann* 図式

$$\left\{\begin{array}{cccccccccccc} x=0 & x=1 & x=\infty & x=t_1 & x=t_2 & \cdots & x=t_N & x=\lambda_1 & x=\lambda_2 & \cdots & x=\lambda_N \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \kappa_0 & \kappa_1 & \rho+\kappa_\infty & \kappa_1 & \kappa_2 & \cdots & \kappa_N & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{array}\right\}$$

ただし $\kappa_0,\kappa_1,\kappa_\infty,\theta_1,\cdots,\theta_n$ は非整数で、$x=\lambda_i$ は見かけの特異点

を持つものとする。この時、

$$K_j := -\operatorname*{Res}_{x=t_j} p_2(x,t),$$

$$\mu_j := \operatorname*{Res}_{x=\lambda_j} p_2(x,t).$$

とおいて λ_j, μ_j を t の関数とすると (1) の 解の基本系で、その *monodromy* 群が t によらないものが存在するための必要十分条件は λ_j, μ_j が K_j を *Hamiltonian* とする *Hamiltonian system* を満たすことである。

また この *Hamiltonian system* は正準変換で *Garnier system* に移すことが出来る。

この事から Garnier system は (1) の解の基本系で その monodromy 群が t によらないものが存在するための条件として得られることがわかる。

以下 monodromy 群が t によらない解の基本系が存在するとき (1) は Isomonodromic deformation を許すということにする。

ところで Garnier system は、一見 非常に複雑な形をしている。この理由は Garnier system を与える Fuchs 型方程式の 見かけを除いた $n+3$ 個の確定特異点の内、3つを $0, 1, \infty$ に固定しているからだと思われる。この事から次のようなことを考えてみた。

$x = \lambda_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ は見かけの特異点であるとして、Riemann 図式

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x = t_1 & x = t_2 & \cdots & x = t_N & x = \lambda_1 & x = \lambda_2 & \cdots & x = \lambda_N \\ \rho & \rho & \cdots & \rho & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho + \kappa_1 & \rho + \kappa_2 & \cdots & \rho + \kappa_N & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{array}\right\}$$

を持つ Fuchs 型方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}y + \tilde{p}_1(x,t)\frac{d}{dx}y + \tilde{p}_2(x,t)y = 0 \tag{2}$$

の解の基本系で、その monodromy 群が t によらないものが存在するための条件を求めよ。

そして 結論として 次のようなことがわかった。

Theorem

$$\tilde{K}_j := -\operatorname*{Res}_{x=t_j} p_2(x,t),$$
$$\mu_j := \operatorname*{Res}_{x=\lambda_j} p_2(x,t)$$

とおいた時、λ_j, μ_j が

$$\sum_{i=1}^{N} \tilde{K}_i = \sum_{i=1}^{N} \mu_i, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{N} t_i \tilde{K}_i = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mu_i - \rho(N \cdot \rho + 2), \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} {t_i}^2 \tilde{K}_i = \sum_{i=1}^{N} {\lambda_i}^2 \mu_i + 2\rho \sum_{i=1}^{N} t_i(\rho + \kappa_i) \tag{5}$$

及び

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_k} = \frac{\partial \tilde{K}_k}{\partial \mu_j}, \; \frac{\partial \mu_j}{\partial t_k} = -\frac{\partial \tilde{K}_k}{\partial \lambda_j} \quad (j, k = 1, \cdots, N) \tag{6}$$

を満たすとき、(2) は Isomonodromic deformation を許す。

Hamiltonian system (6) は完全積分可能であり、(3),(4),(5) を満たす Hamiltonian system の解も存在する。また Garnier system の時と同様の正準変換 $(\lambda,\mu,\tilde{K},t) \to (q,p,\tilde{H},t)$ を行うと Hamiltonian $\tilde{K}_j$ は

$$\tilde{H}_j := -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} \frac{1}{t_j - t_i}[(p_j - p_i)^2 q_j q_i + (p_j - p_i)(\kappa_i q_j - \kappa_j q_i) + \rho(2\rho + \kappa_i + \kappa_j)] + q_j {p_j}^2 - \kappa_j p_j. \qquad (7)$$

に移る。さらに q_j, p_j は 一つの関数 τ を使って表せ、この τ により Hmamiltonian system を書き直すと、

$$(t_l - t_k)\tau_{lk} = \tau_k D\tau_l - \tau_l D\tau_k,$$
$${\kappa_l}^2 + 2\tau_l D^2\tau_l - (D\tau_l)^2 = 0 \quad (k,l = 1,\cdots,N),$$

where

$$D := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad \tau_k := \frac{\partial \tau}{\partial t_k}, \quad \tau_{kl} := \frac{\partial^2 \tau}{\partial t_k \partial t_l},$$

となる。

最後に $N = n+3$ の時、(2) の見かけの特異点は (1) のものに比べ3つ多いが、(1) の解と (2) の解は 双有理変換で移り合うので、(7) を Hamiltonian とする Hamiltonian system は Garnier system を含むと思われる。