Title	モデルの合併について(数学基礎論およびその応用)
Author(s)	若井, 健太郎
Citation	数理解析研究所講究録 (1995), 930: 107-111
Issue Date	1995-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/59943
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
930巻 1995年 107-111

モデルの合併について

筑波大数学研究科 若井 健太郎 (Kentaro Wakai)

濃度の等しい L_1-構造 M_1 と L_2-構造 M_2 があったとき, これらの構造を重ね合せたもの (合併) として $L_1 \cup L_2$-構造を考えることができる. M_1, M_2 が共に $\aleph_0$-categorical という性質を持つとき, $\aleph_0$-categorical な合併が存在するかを考える. この問題については, [Sc] で $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ の場合が, [PT] で M_1, M_2 が可算の場合が証明されている. 本文では [PT] と同様の方法を用いて, M_1, M_2 が非可算, saturated の場合の証明を示す.

Definition 1 M_1 は L_1-構造, M_2 は L_2-構造とする. $L_1 \cup L_2$-構造 M は, 次の条件を満たすとき, M_1 と M_2 との合併である, という:

$$M|L_1 \simeq M_1, M|L_2 \simeq M_2.$$

$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ のとき, 合併が存在するためには次の条件が必要である:

$$M_1|L_0 \simeq M_2|L_0 (L_0 = L_1 \cap L_2).$$

以後 $M_1|L_0$と $M_2|L_0$を同一視して M_0と書く.

Definition 2 同じ理論を持つ可算構造が同型を除いて *1* つしかないとき, 構造 Mは$\aleph_0$-*categorical* であるという.

Example 3 $L_1 = \{E_1\}, L_2 = \{E_2\}$ とする. L_1-構造 M_1と L_2構造 M_2において, E_1, E_2はそれぞれ無限個の同値類を持つ同値関係で, E_1の各同値類の濃度は 2, E_2の同値類の濃度は *1* つだけ 1 で他は 2 とする. このとき M_1, M_2は共に$\aleph_0$-*categorical* であるが, $\aleph_0$-*categorical* であるような合併はない.

Definition 4 構造 Mは次の条件を満たすとき弱い仮想元消去ができるという:

任意の $a \in M^{eq}$に対してある有限集合 $B \subset M$が存在して, $a \in dcl(B)$ かつ $B \subset acl(a)$.

Fact 5 L-構造 Mで弱い仮想元消去ができるとき, *algebraic closed set* $A \subset M$ 上の完全なタイプはすべて *stationary* である.

Theorem 6 $\aleph_0$-*categorical* な構造 M_1, M_2は, 次の条件 *(1)–(3)* を満たすとき, $\aleph_0$-*categorical* な合併を持つ:

(1) M_1, M_2は *saturated,*

(2) M_0は *stable* で弱い仮想元消去ができる,

(3) 任意の $A \subset M_1$に対して $acl_{L_1}(A) = acl_{L_0}(A)$ ただし acl_{L_i}は L_iでの *algebraic closure.*

Proof. M_1と M_2との合併 Mを作るには, M_1と M_2の間の L_0-同型写像を作り, これによって M_1の元と M_2の元とを同一視すればよい.

$\kappa = |M_0|$, $M_1 = \{a_i : i < \kappa\}$, $M_2 = \{b_i : i < \kappa\}$ とする. M_1, M_2の algebraic closed な有限部分集合上のタイプの組がκ回ずつ現われるように並べたものを $\{(p_i, q_i) : i < \kappa\}$ とする. つまり p_iは L_1-タイプ, q_iは L_2-タイプである. 次の条件を満たすように L_0-部分同型写像 $f_i : M_1 \to M_2 (i < \kappa)$ を作る:

(i) $i < j$ならば $f_i \subset f_j$

(ii) $|Dom(f_i)|, |Ran(f_i)| < \kappa$,

(iii) $a_i \in Dom(f_{i+1})$, $b_i \in Ran(f_{i+1})$,

(iv) $Dom(p_i) \subset Dom(f_i)$, $Dom(q_i) \subset Ran(f_i)$, $f_i(p_i|L_0) = q_i|L_0$ならば, p_iの解 $a \in Dom(f_{i+1})$ と q_iの解 $b \in Ran(f_{i+1})$ で, $f_{i+1}(a) = b$ となるものがある.

$f_0 = \emptyset$, δ: limit のときは $f_\delta = \cup_{i<\delta} f_i$とする. f_iまでできていて, p_iと q_i

が (iv) の前提条件を満たしているとする. M_0が stable であることより, p_i と q_iの non-forking extension $p' \in S_{L_0}(Dom(f_i))$ と $q' \in S_{L_0}(Ran(f_i))$ がとれる. M_0で弱い仮想元消去ができることより, $p_i|L_0$と $q_i|L_0$が stationary になるので $f_i(p') = q'$である. M_1と M_2が saturated であることより, $p_i \cup p'$の解 $a \in M_1$と $q_i \cup q'$の解 $b \in M_2$がとれる. $Dom(f_i) \cup a \cup a_i \subset Dom(f_{i+1})$, $Ran(f_i) \cup b \cup b_i \subset Ran(f_{i+1})$, $f_{i+1}(a) = b$ となるように f_{i+1}をとる. (iv) の前提条件を満たさないときは, $Dom(f_i) \cup a_i \subset Dom(f_{i+1})$, $Ran(f_i) \cup b_i \subset Ran(f_{i+1})$ となるように f_{i+1}をとる.

$f = \cup_{i<\kappa} f_i$とし, この L_0-同型写像で M_1と M_2を同一視した合併を Mとすると, Mは次の性質を持つ:

(*) A は Mの有限部分集合で algebraic closed, $p \in S_{L_1}(A)$, $q \in S_{L_2}(A)$, $p|L_0 = q|L_0$ならば, p と qは共通解を Mに持つ.

この性質を用いて Mが$\aleph_0$-categorical であることを示す. N_1, N_2は Mと同じ理論を持つ可算構造とする. (*) は一階述語で書けるので, N_1と N_2も性質 (*) を持つ. $N_1 = \{c_i : i < \omega\}$, $N_2 = \{d_i : i < \omega\}$ とし, 次の条件 (a), (b) を満たすように $L_1 \cup L_2$-部分同型写像 $g_i : N_1 \to N_2 (i < \omega)$ を作る:

(a) $Dom(g_i)$, $Ran(g_i)$ は algebraic closed,

(b) $c_i \in Dom(g_{i+1})$, $d_i \in Ran(g_{i+1})$.

g_iまでできたとする. $A = Dom(g_i)$, $B = Ran(g_i)$ とする. (*) より

$g_i(tp_{L_1}(c_i/A))$ と $g_i(tp_{L_2}(c_i/A))$ は共通解 $d \in N_2$を持つ. $B \cup d \cup d_i \subset D$ となるように L_2で algebraic closed な $D \subset N_2$をとると, (3) より Dは L_1でも algebraic closed である. (*) より $g_i^{-1}(tp_{L_1}(D/B))$ と $g_i^{-1}(tp_{L_2}(D/B))$ は共通解 $D \subset N_1$を持つ. $g_{i+1}(C) = D$となるように $g_{i+1} : C \to D$をとればよい. $g = \cup_{i<\omega} g_i$は N_1と N_2の間の $L_1 \cup L_2$-同型写像になる. よって Mは $\aleph_0$-categorical であることが示せた. □

Question 7 *M_1, M_2が saturatedでない場合にも合併は作れるか?*

$acl_{L_1}(A) = acl_{L_2}(A)$ という条件をもっと弱くできないか?

References

[PT] A. Pillay and A. Tsuboi, Amalgamations preserving $\aleph_0$-categority, preprint.

[Sc] J. H. Schmerl, Decidability and $\aleph_0$-categoricity of theories of partially ordered sets, The Journal of Symbolic Logic, 45 (1980), 585–611.

[Sh] S. Shelah, Classification Theory, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1990.

[Ts] 坪井 明人, モデル論概説, 1995.