Title	log etale cohomologyの双対性(代数的整数論と数論的幾何学)
Author(s)	Nakayama, Chikara
Citation	数理解析研究所講究録 (1995), 925: 95-101
Issue Date	1995-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/59805
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
925 巻 1995 年 95-101

log etale cohomologyの双対性

東京大学D3 中山能力
Chikara Nakayama

"Duality in log etale cohomology"

Throughout this manuscript, A denotes a (commutative) ring.
k denotes a (commutative) field.

0. Introduction

$$\text{scheme} \xrightarrow{\text{log化}} \text{log scheme}$$

右が左を含んでいる
⑪:話の順序

etale cohomology	① log etale cohomology
② Poincaré duality	③ log Poincaré duality

④ Proofs

⑤ Application

1. The definition of log etale cohomology

Let X be an fs log scheme (i.e. locally the log str. M_X of X has a chart with an fs monoid).

$$P: \text{fs} \leftrightarrow \begin{cases} \text{finitely generated, } P \to P^{gp} \text{ is injective (}\underline{f}\text{ine)} \\ \forall a \in P^{gp}, a^n \in P,\ n \geq 1 \Rightarrow a \in P \quad (\underline{s}\text{aturated}) \end{cases}$$

Then we define the log etale pretopology $X^{\log}_{et}$ of X as follows:

$$\mathrm{Obj} = \{ Y \to X \text{ in } \overset{(\mathrm{fs\,log\,sch})}{(\mathrm{fs})},\ \text{log etale and } \underline{\text{of Kummer type}} \}$$

for $\forall y \mapsto x$

$(M_Y/\mathcal{O}_Y^*)_{\bar{y}} \leftarrow (M_X/\mathcal{O}_X^*)_{\bar{x}}$ is injective and $\forall a \in$, $\exists n \geq 1$, $a^n \in$

Fl = X-morphisms

coverings = surjective families

log etale cohomologyは K.Fujiwaraによって導入され、一般の定義は K. Katoによる。従来のetale cohomology論と並行的にするために、クンマー型を課する。単に log etale だけでは、例えば全射のbase changeが全射にならないことがある、などの困難が生ずる。((fs)での base change の underlying scheme は scheme の圏での base changeにならない場合がある。)

Proposition If X has the trivial log str., i.e. $M_X = \mathcal{O}_X^*$,

then $X_{et}^{log} = \overset{\circ}{X}_{et}$ ($\overset{\circ}{X}$ denotes the underlying scheme.)

このように、log etale cohomology は、fs というよい性質をもつ log scheme に対してのみ定義されるが、trivial log str. は fs なので、従来の場合は含んでいることになる。

2. A review of relative Poincaré duality in etale cohomology (SGA4 XVIII §3)

Poincaré dualityといえば普通は H_c^i と H^{2d-i} とが dual ということだが、etale cohomologyについて証明するとき、relativeな定式化が有効であった。

① Formal duality

Let S be a scheme. (一つbaseを固定)

Let $f: X \to Y$ be an S-compactifiable morphism and let A be a torsion ring.

fがproperならRf_*, open immersionなら0による拡張, 一般にはその合成で定義

Then $Rf_!: D(X,A) \to D(Y,A)$ has a (unique) partial right adjoint

$$Rf^!: D^+(Y,A) \to D^+(X,A), \text{ and}$$

$$R^+f_* R\mathcal{H}om(K, Rf^!L) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(Rf_!K, L),\ K \in D^-(X,A),\ L \in D^+(Y,A)$$

これは本質的には圏論のadjoint functor theoremに帰着する形式的な命題である。

② Further assume f is smooth and the relative dimension d of f is pure. Let $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ where n is an integer invertible on S. Then

$$Rf^!L \cong f^*L(d)[2d]$$

<u>Notes.</u> In particular when $Y = S = k = k_{sep}$, $L = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[0]$, and $K = F[0]$ is locally constant and constructible on X_{et},

①+② ⇒ there is a non-degenerate pairing

$$H^i_c(X, F) \times H^{2d-i}(X, \check{F}(d)) \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

3. Log Poincaré duality

以上をlog化したいが, まずformal dualityはそのまま成り立つので, 問題は

① Formal duality OK.

② <u>Problem</u> Calculate $Rf^!\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ for various f that is log smooth and compactifiable.

ということになる。ではlog smooth射にはどういうものがあるかというと。

Typical examples of log smooth morphisms:

a) toric variety/S=(Spec k, trivial log.)

b) semistable family/T=(Spec $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dvr}}}{R}$, log str. defined by the closed pt)

このように、singularityのある対象が適当なlog str.を与えることで、log smoothになるということがそもそものlog scheme導入の動機であった。結果を述べる。

<u>Thm. 1.</u> Let S be as above and let $A=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ where n is an integer invertible on S. Let $f: Y \to X$ be a log smooth S-compactifiable morphism in $(fs)/S$ with Y and X connected $\neq \phi$. Let $d = \dim Y - \dim X$.

Assume (a) X is log smooth and compactifiable over S

or (b) X is compactifiable over S and is etale locally <u>the log locus</u> of an X' that is log smooth over S. $\overset{\|}{\text{Supp}}(M_{X'}/\mathcal{O}^*_{X'})$

Then

$$Rf^! \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = j_! \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)[2d]$$

where $j: Y_{\text{ver}/f} \hookrightarrow Y$ is the open immersion from $\{y \in Y \mid f \text{ is vertical at } y \text{ i.e. } \forall a \in M_{Y,\bar{y}}\ \exists b \in M_{X,\overline{f(y)}} \text{ s.t. } a | b \text{ in } M_{Y,\bar{y}}\}$ //

For simplicity $\boxed{\Lambda := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ in the following. 本稿の最後まで

<u>Example 1</u> (a) Assume $X=S$. Then $Y_{\text{ver}/f} \hookrightarrow Y$ is a toroidal

embedding.

普通のetale cohomologyでは、toric varietyの双対複体は複雑だが、logでは、単に、torusからの0による拡張となっている、ということ。

(b) Let $f: Y \to X$ be the special fiber of a $\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{T\otimes_R k}$ semistable family.

Then X satisfies (b) and $Y_{ver/f} = Y$, so $Rf^!\Lambda = \Lambda(d)[2d]$ where $d = \dim Y$.

普通のsmoothの場合と全く並行的である。実際に族から来ていなくても、局所的にそうなっているだけでもよい。

<u>Remark</u> For a certain f which does not satisfy (a) nor (b), $Rf^!\Lambda \neq j_!\Lambda(d)[2d]$.

一般にはどうなるかは、今の所予想することも難しい。

<u>Thm 2.</u> (d.v.r. base) Let T be as above and let η be its generic point. Let n be an integer invertible on T. Let $f: Y \to X$ be a log smooth T-compactifiable morphism in $(fs)/T$ with Y and X connected $\neq \phi$. Assume that f is vertical. Let $d = \dim(Y_\eta) - \dim(X_\eta)$. Assume X is log smooth and compactifiable over T.

Then the same conclusion as in Thm.1 holds.

<u>Example 2</u>. Let $f: Y \to X = T$ be a semistable family. Then Thm 2.

can be applied to f.

4. Proofs

Thm1.(a) reduces to the case where $X = S = k = k_{sep}$ and $Y = \mathrm{Spec}(k[t_1, \cdots, t_d])$ with log str. associated to $\mathbb{N} \ni 1 \mapsto t_1$.

Consider

$$\begin{tikzcd}
Y_{ver} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "u"'] & Y \arrow[d, "f"] & Y \setminus Y_{ver} =: Z \arrow[l, hook', "\iota"'] \arrow[d, "\varepsilon:\ \text{forgetting log morphism}"] \\
& k & Z^{cl} = (\mathring{Y}/(t_1), \text{trivial log}) \arrow[l, "z^{cl}"']
\end{tikzcd}$$

trivial log

(Notation: For a log scheme X, $\mathring{X}$ denotes the underlying scheme of X and $X^{cl} = (\mathring{X}, \text{the trivial log str.})$)

We have $j^* Rf^! \Lambda = Ru^! \Lambda \cong \Lambda(d)[2d]$ (usual Poincaré duality).

We prove its adjoint $Rf^! \Lambda \xleftarrow{\mu} j_! \Lambda(d)[2d]$ is an isomorphism.

To see this, it suffices to show $R\iota^! \mu$ is an isomorphism.

Consider

$$\begin{tikzcd}
R\iota^! j_! \Lambda(d)[2d] \arrow[d, "R\iota^! \mu"'] & & R\iota^! \iota_* \Lambda(d)[2d-1] \arrow[ll, "\partial", "\sim"'] \arrow[r, equal] & \Lambda(d)[2d-1] \arrow[d, "\wr"] \\
R\iota^! Rf^! \Lambda \arrow[r, equal] & R\varepsilon^! R z^{cl!} \Lambda \arrow[rr, "\cong", "\text{usual P.d. for } \mathring{Z}"'] & & R\varepsilon^! \Lambda(d-1)[2d-2]
\end{tikzcd}$$

where ∂ is an isomorphism by (usual) relative purity and the right vertical arrow is an isomorphism induced by a Galois theory on the constant log scheme Z:

$$\{\text{Module on } Z^{log}_{et}\} \simeq \{\text{Module on } \mathring{Z}_{et} \text{ on which } \hat{\mathbb{Z}}'(1) = \varprojlim_{(m, ch k) = 1} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(1) \text{ acts continuously}\}$$

この図式の可換性の証明は難しいが、実は formal duality を利用した論法があって可換性を示すことなしに、μの同型をいうことができる。

Thm 1(b) is reduced to (a). Thm 2 is formally induced from Thm 1 and purity for log smooth families over d.v.r.

5. An application of Thm 1(a).

Prop. Let Δ be a finite simplicial fan of dim. r and let k be a field. Let n be an integer prime to ch(k) and to N_Δ (an integer determined by Δ).

$\boxed{\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$

Then $R(X_\Delta \to k)^! \Lambda \cong \Lambda(r)[2r]$ on $(X_\Delta)_{et}$.

the toric variety associated to Δ

(Note that this statement concerns the usual etale cohomology (not log).)

文献について：log scheme の基本的なことについては 論文集 Algebraic analysis, geometry, and number theory, Johns Hopkins University Press, 1989 の中の K. Kato の論文 (pp. 191-224) をはじめ、いくつかの文献が出版されている。しかし §1, 3-5 の内容が書かれた文献は今の所 (1995年4月現在) preprint の段階である。