京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

京都大学
KYOTO UNIVERSITY

| | |
|---|---|
| Title | 4次元平坦トーラス内非正則極小曲面の構成の一例 (リーマン部分多様体の総合的研究) |
| Author(s) | 庄田, 敏宏 |
| Citation | 数理解析研究所講究録 (2002), 1292: 20-36 |
| Issue Date | 2002-10 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/42540 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

Kyoto University

数理解析研究所講究録 1292 巻 2002 年 20-36



# 4次元平坦トーラス内 非正則極小曲面の構成の一例

庄田　敏宏
Toshihiro Shoda

東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻
Department of Mathematics
Graduate School of Science and Engineering
Tokyo Institute of Technology

## 1 Introduction

ユークリッド空間内の周期的極小曲面はコンパクト Riemann 面から平坦トーラスへの極小はめ込みを誘導する. 周期的な極小曲面の研究は, 約 100 年以上も前の Schwarz による研究に端を発した ([10]). Schwarz は 3 次元空間内の "しかるべき" 閉折れ線に対する Plateau 問題を解き, できた曲面を鏡像の原理を用いて境界を通してのばしていくと云う筋で 3 重周期的 (縦, 横, 高さの方向に周期的) な極小曲面を構成した (Schwarz Primitive surface あるいは Diamond surface). その後 1970 年 A. Schoen によって幾つかの 3 次元平坦トーラス内極小曲面の具体例が構成された ([9]). 1989 年 H. Karcher は A. Schoen の構成を応用して幾つかの 3 次元平坦トーラス内極小曲面の具体例を構成した ([3]). H. Karcher の論文には Schwarz Primitive surface などのグラフがコンピューターグラフィックを駆使して紹介されているので興味のある方は参照すると良いであろう. Schwarz による Plateau 問題と鏡像の原理を用いた構成法は長野-Smyth の研究によって一般次元平坦トーラス内極小曲面の構成へと拡張された ([6], [7]). 一方, 平坦トーラス内安定極小曲面については M. Micallef による研究がある ([4], [5]). 平坦トーラス内安定極小超楕円曲線はトーラスの

適当な複素構造によって正則曲線の構造がはいる. また, 4次元平坦トーラス内安定極小曲面にはトーラスの適当な複素構造によって正則曲線の構造がはいる. そこで今回は (1) 平坦トーラス内極小曲面の具体例の構成 (2) Micallef の定理における安定性が sharp であるか の2つをテーマとし, 4次元トーラス内非正則極小曲面の具体例の構成法を紹介する. 極小曲面における Weierstrass 表現に具体的な値をいれて計算すると云う極めて古典的かつ肉体労働的な方法である.

## 2 諸定義

本セクションでは登場人物をまとめる. まずは後々のために格子について言及しておく. 一般に Lie 群 $G$ の部分群 $\Lambda$ が $G$ の閉集合であって $G$ の単位元 $e$ の近傍 $U$ を適当にとると $\Lambda \cap U = \{e\}$ となるとき, $\Lambda$ を $G$ の離散部分群 (discrete subgroup) と云う. ここで次の定理を紹介するが, 証明は松島与三氏の多様体入門に任せる.

**Theorem 2.1.** $\Lambda$ を $\boldsymbol{R}^n$ の離散部分群とする. このとき $\Lambda$ に $d$ 個の元 $u_1, u_2, \ldots, u_d$ が存在して (1) $u_1, u_2, \ldots, u_d$ は $\boldsymbol{R}$ 上一次独立, (2) $\Lambda$ の任意の元は一意的に $m_1u_1 + m_2u_2 + \cdots + m_du_d$ ($m_1, m_2, \ldots, m_d$ は整数) と表される. (1), (2) の性質を持つ $\Lambda$ の元の個数は一定で, $d$ を $\Lambda$ の階数 (*rank*) と云う.

**Definition 2.1.** $\boldsymbol{R}^n$ の最大階数離散部分群を格子と云う.

**Proposition 2.1.** ([1] section 6) $\boldsymbol{R}^n$ を張るベクトルの列 $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ ($m \geq n$) が格子ベクトルとなるためには, $\boldsymbol{R}$ 上一次独立なベクトルの列 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ が存在して

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_m)\, G_1$$
$$(u_1, u_2, \ldots, u_m) = (v_1, v_2, \ldots, v_n)\, G_2$$

となる整数係数の $(m,n)$ 行列 $G_1$ と $(n,m)$ 行列 $G_2$ が存在する, と云うのが必要十分条件である.

次に極小部分多様体などを導入する. $(M, ds_M^2)$, $(N, ds_N^2)$ をそれぞれ Riemann 多様体とし, $f : M \longrightarrow N$ を等長はめ込みとする. このとき $f$ が任意の (コンパクト台をもつ) 変分の停留点になるならば $f$ を極小はめ

込みと云い, その第2変分が 0 以上になるとき $f$ を安定極小はめ込みと云う. 本講では特に平坦トーラス内極小曲面について考えるため $M$ はコンパクト Riemann 面であり, $N = \mathbf{R}^n/\Lambda$ とする ($\Lambda$ は格子). このとき次の (一般化された) Weierstrass 表現が知られている.

**Theorem 2.2.** (一般化された Weierstrass 表現) $f : M \longrightarrow \boldsymbol{R}^n/\Lambda$ を極小はめ込みとする. このとき, 平行移動は無視して $f$ は

$$f(p) = \Re \int_{p_0}^{p} (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T \quad Mod\ \Lambda, \tag{1}$$

と表される. ここで $p_0 \in M$ は定点, 上付き $T$ は転置行列の意味であり, $\{\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n\}$ は

$$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\} \text{ には共通零点がない}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 = 0 \ (\ conformal\ \ condition\ ), \tag{3}$$

$$\text{周期行列}\Omega := \left\{ \Re \int_{\gamma} (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T \mid \gamma \in H_1(M, \boldsymbol{Z}) \right\} \tag{4}$$

が$\Lambda$の部分格子になる ( *periodic condition* ).

を満たすような $M$ 上の正則微分である. 逆に (1)〜(4) によって表現される $f$ は $\boldsymbol{R}^n/\Lambda$ 内への極小はめ込みを定義する.

以後, 本講では $\Omega$ によって周期行列を意味するものとする.

周期的な極小曲面の例は次の Schwarz 曲面が最初のものである ([10]). Schwarz は $\mathbf{R}^3$ 内の4本の辺によって構成される閉折れ線に対する Plateau 問題を解き, さらに鏡像の原理を用いてその解曲面を境界を通してひろげてゆくと云う筋で, $\mathbf{R}^3$ 内の3重周期的極小曲面を構成した. これは種数3の超楕円曲線から3次元平坦トーラスへの極小埋め込みを定義する.

**Example 2.1.** (Schwarz surface)

$M$ を

$$w^2 = z^8 + 14z^4 + 1,$$

で定義される超楕円曲線とする. *Schwarz* 極小曲面は

$$\Re \int_{p_0}^{p} \left( z, \frac{-1+z^2}{2}, \frac{i\,(-1-z^2)}{2} \right)^T \frac{dz}{w},$$

で与えられる. ちなみに周期行列 $\Omega$ は次で与えられる.

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{A}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{2} \end{pmatrix},$$

ここで

$$A = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1 - t^2 + t^4}}.$$

この Schwarz 極小曲面が周期的極小曲面の基本になる具体例である. この他の具体例は A. Schoen らによって与えられている (Gyroid, CLP-曲面 etc [9]). また, これらの具体例のグラフィックは [3] を参照されたし.

ユークリッド空間内の "しかるべき" 閉折れ線に対する Plateau 問題を解き, さらに鏡像の原理を用いて周期的な極小曲面を構成すると云う筋は長野-Smyth によって一般化された. メインになる手法としては Plateau 問題の一つの解である Rado の定理 : ある適当な平面上に凸空間としてアフィン射影される $\mathbf{R}^n$ 内の Jordan 曲線 $\Gamma$ に対して $\Gamma$ を境界とする極小曲面が存在する, などを用いている. 興味のある方は原論文を参照されたし ([6], [7]).

一方平坦トーラス内安定極小曲面に関しては以下のような結果が知られている.

**Theorem 2.3.** ([5]) 平坦トーラスへの超楕円曲線の安定極小はめ込みはトーラスの適当な複素構造によって正則になる.

また, 4 次元平坦トーラスに対しては次のような結果がある.

**Theorem 2.4.** ([4]) 4 次元平坦トーラス内安定極小曲面はトーラスの適当な複素構造によって正則曲線の構造が入る.

そこで本講では次の 2 つをテーマとする.

**Problem 2.1.** (1) Theorem 2.4 の安定性と云う条件が本質的である事を示せ.
(2) 平坦トーラス内極小曲面の具体例を *Weierstrass* 表現を用いて, 格子も含めて構成せよ.

**Remark 2.1.** ちなみに先の *Schwarz* 曲面の *index* と *nullity* は M. Ross によって計算されている ([8]). *Schwarz* 曲面は安定極小曲面ではないが CMC-安定である事が示されている.

次にガウス写像について復習する. ガウス写像を用いた極小曲面の survey は [2] を参照されたし. 今 $f : M \longrightarrow \mathbf{R}^n/\Lambda$ を等長はめ込みとする. このとき (一般化された) ガウス写像 $G : M \longrightarrow G_{n,2}$ が $p \longmapsto f_*(T_pM)$ で与えられる (但し $G_{n,2}$ は $n$ 次元ユークリッド空間の中の 2 次元平面全体からなるグラスマン多様体). $G_{n,2}$ は $Q_{n-2} := \{[w] \in \mathbf{C}P^{n-1} | w \cdot w = 0\}$ (但し "・" は複素双線形形式) と同型である事が知られている. $z = x + iy$ を $M$ の局所複素座標とすると $G(p)$ の斉次座標は $f_z$ で与えられる.

**Definition 2.2.** ([2] p.49) $A \cdot f_z \equiv 0$ なる $A \in \boldsymbol{C}^n$ が存在するとき, ガウス写像は退化すると云う.

ガウス写像が退化するような 4 次元トーラス内極小曲面の Weierstrass 表現は以下のように簡易化される.

**Theorem 2.5.** ([2] Theorem 4.7) $f : M \longrightarrow \boldsymbol{R}^4/\Lambda$ をガウス写像が退化するような極小曲面とする. このとき $f$ は次式で表される.

$$\Re \int_{p_0}^{p} \left(1, i\,t, \frac{1}{2}(\frac{-1+t^2}{F} + F), \frac{i}{2}(\frac{-1+t^2}{F} - F)\right)^T \omega,$$

ここで, $F$ は $M$ 上の有理型関数であり, $t \in [0,1]$ は定数, $\omega$ は $M$ 上の正則微分で

$$\left\{\omega, i\,t\,\omega, \frac{1}{2}(\frac{-1+t^2}{F} + F)\,\omega, \frac{i}{2}(\frac{-1+t^2}{F} - F)\,\omega\right\}$$

が $M$ 上の正則微分となり, かつ

$$\Omega = \left\{\Re \int_\gamma \left(1, i\,t, \frac{1}{2}(\frac{-1+t^2}{F} + F), \frac{i}{2}(\frac{-1+t^2}{F} - F)\right)^T \omega \mid \gamma \in H_1(M, \boldsymbol{Z})\right\}$$

が $\Lambda$ の部分格子になるものである.

**Remark 2.2.** 4 次元の場合, $t = 1$ と $f$ がトーラスの適当な複素構造によって正則になる事は同値である ([2] Proposition 4.6, Theorem 4.7 の証

# 3 構成法

$M$ を

$$w^2 = z^8 + 14z^4 + 1.$$

で定義される超楕円曲線とする.

$M$ は種数 3 で $z$-平面の分岐 2 重被覆面となる. 分岐点は 8 個からなり, $ae^{k\pi i/4}$, $a^{-1}e^{k\pi i/4}$ (ここで $a$ と $k$ は $a = (1+\sqrt{3}/\sqrt{2})$, $k \in \{1,3,5,7\}$) となる. 立体射影によって $z$-平面と $S^2$ とを同一視すると分岐点は $S^2$ に内接する立方体の角の点 $(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$ になる. $M$ 上の正則微分は $\left\{\dfrac{dz}{w}, z\,\dfrac{dz}{w}, z^2\,\dfrac{dz}{w}\right\}$ で構成される事に注意する. よって今, 4 次元平坦トーラス内の極小曲面を構成したいのだから, ガウス写像は必ず退化している. よって Theorem 2.5 において $F = z$, $\omega = z\dfrac{dz}{w}$ を代入して, 以下で定義された $f : M \longrightarrow \mathbf{R}^4$ を考える.

$$(5)\quad p \mapsto \Re \int^p \Phi = \Re \int^p \left(z, i\,t\,z, \frac{-1+t^2+z^2}{2}, \frac{i\,(-1+t^2-z^2)}{2}\right)^T \frac{dz}{w}.$$

$t = 0$ のときが Schwarz の極小曲面であり, $t = 1$ のときはトーラスの適当な複素構造によって $f$ は正則になる. このとき

$$\Phi = \left(z, i\,t\,z, \frac{-2+t^2}{4}(1-z^2) + \frac{t^2}{4}(1+z^2), i\,\frac{t^2}{4}(1-z^2) + i\,\frac{t^2-2}{4}(1+z^2)\right)^T \frac{dz}{w}.$$

であるので, 周期行列 $\Omega$ は以下で与えられる ([8] p.185).

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{A}{2} & 0 & -\frac{A}{2} & 0 & \frac{A}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{t}{2}B & 0 & -\frac{t}{2}B & 0 & -\frac{t}{2}B \\ \frac{t^2}{4}B & 0 & \frac{t^2}{4}B & \frac{t^2-2}{4}A + \frac{t^2}{4}B & -\frac{t^2}{4}B & 0 \\ -\frac{t^2}{4}B & \frac{t^2-2}{4}A - \frac{t^2}{4}B & \frac{t^2}{4}B & 0 & \frac{t^2}{4}B & -\frac{t^2-2}{4}A + \frac{t^2}{4}B \end{pmatrix}$$

ここで

$$A := \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1-t^2+t^4}}\ ,\quad B := \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}}.$$

$A > B$ に注意しておく.
この $\Omega$ が適当な, 整数係数の $(6,4)$ 行列 $G_1$ と $(4,6)$ 行列 $G_2$ とによってある適当な $(4,4)$ 行列 $\Lambda$ と

$$\Lambda = \Omega G_1\,,\ \ \Omega = \Lambda G_2,$$

となれば良いわけであるが, 一般の $t$ では難しい. そこで次のような手筋を使う. つまり "都合の良い" $t$ をとるわけである.

今, 十分大きい $\dfrac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ に対して $t$ を

$$(6)\quad t^2 = \frac{\dfrac{A}{2}}{\dfrac{m}{2n}B + \dfrac{A-B}{4}} \in (0,1) \left( i.e.\ \frac{m}{n}\frac{t^2}{2}B + \frac{t^2-2}{4}A - \frac{t^2}{4}B = 0 \right),$$

と定める. ただし, $m$, $n$ は共に正であり, 互いに素, 即ち $(m,n) = 1$ としておく.

ここで $n$ が偶数あるいは奇数のときで場合分けをする.

まず $n$ が偶数のとき $(m,n) = 1$ なので

$$(7)\qquad nx + my = 1,$$

となる整数 $x$, $y$ が存在する. このとき $m$, $y$ は奇数でなければならない. また, $(m,n) = 1$ であったので $(m, \dfrac{n}{2}) = 1$ である. よって

$$(8)\qquad \frac{n}{2}x' + my' = 1,$$

となる整数 $x'$, $y'$ が存在する. さらに $(m,2) = 1$ なので

$$(9)\qquad 2x'' + my'' = 1,$$

となる整数 $x''$, $y''$ が存在する.

ここで 3 つの行列

$$\Lambda_{even} := \begin{pmatrix} \dfrac{A}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & tB & \dfrac{y}{2}tB & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{n}\dfrac{t^2}{2}B & \dfrac{1}{n}\dfrac{t^2}{2}B \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{n}\dfrac{t^2}{2}B \end{pmatrix},$$

$$G_1 := \begin{pmatrix} my'' - \frac{n}{2}\, my''(x+y) + x'' & 0 & x+y & X \\ -\frac{n}{2}\, y''(1 - \frac{n}{2}\, x) & -1 & 0 & (1 - \frac{n}{2}\, x)\, y' + \frac{n}{2}\, x'y''(1 - \frac{n}{2}\, x) \\ -\frac{n}{2}\, my''(x+y) & 0 & x+y & my'(x+y) + \frac{n}{2}\, mx'y''(x+y) \\ \frac{n}{2}\, myy'' & 0 & -y & -myy' - \frac{n}{2}\, mx'yy'' \\ x'' & 0 & 0 & -x'x'' \\ \frac{n^2}{4}\, xy'' & -1 & 0 & -\frac{n}{2}\, xy' - \frac{n^2}{4}\, xx'y'' \end{pmatrix}$$

(ここで $X = x' + my'(x+y) - mx'y'' + \frac{n}{2}\, mx'y''(x+y) - x'x''$)

$$G_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2}\, x & -\frac{n}{2}\, y & -\frac{n}{2}\, (x+y) & 0 & \frac{n}{2}\, x - 1 \\ 0 & -m & n & n-m & 0 & m \\ \frac{n}{2} & m & -\frac{n}{2} & 0 & -\frac{n}{2} & -m \end{pmatrix},$$

を考えると (7), (8), (9) から

$$\Lambda_{even} = \Omega\, G_1, \Omega = \Lambda_{even}\, G_2$$

が成り立つ. 実際, $\Omega\, G_1 = (\Omega\, G_1)^i_j$ とすると

$$\begin{aligned}
(\Omega\, G_1)^1_1 &= \frac{A}{2}\, \{my'' - \frac{n}{2}\, my''(x+y) + x'' + \frac{n}{2}\, my''(x+y) + x''\} \\
&= \frac{A}{2}\, (2x'' + my'') \\
&= \frac{A}{2} \quad by\ (9), \\
(\Omega\, G_1)^1_2 &= 0, \\
(\Omega\, G_1)^1_3 &= \frac{A}{2}\, (x+y) - \frac{A}{2}\, (x+y) \\
&= 0, \\
(\Omega\, G_1)^1_4 &= \frac{A}{2}\, \{x' + my'(x+y) - mx'y'' + \frac{n}{2}\, mx'y''(x+y) - x'x'' \\
&\qquad - my'(x+y) - \frac{n}{2}\, mx'y''(x+y) - x'x''\} \\
&= \frac{A}{2}\, x'(1 - 2x'' - my'') \\
&= 0 \quad by\ (9),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\Omega\, G_1)^2_1 &= -\frac{t}{2} B \{ -\frac{n}{2} y''(1-\frac{n}{2} x) + \frac{n}{2} myy'' + \frac{n^2}{4} xy'' \} \\
&= -\frac{t}{2} B \{ (-\frac{n}{2} y'')(1 - nx - my) \} \\
&= 0 \quad by\ (7), \\
(\Omega\, G_1)^2_2 &= tB, \\
(\Omega\, G_1)^2_3 &= \frac{y}{2} tB, \\
(\Omega\, G_1)^2_4 &= -\frac{t}{2} B \{ (1-\frac{n}{2} x) y' + \frac{n}{2} x'y''(1-\frac{n}{2} x) - myy' - \frac{n}{2} mx'yy'' - \frac{n}{2} xy' - \frac{n^2}{4} xx'y'' \} \\
&= -\frac{t}{2} B \{ (1-nx) y' + \frac{n}{2} x'y''(1-nx) - myy' - \frac{n}{2} mx'yy'' \} \\
&= -\frac{t}{2} B \{ (1-nx-my) y' + \frac{n}{2} x'y''(1-nx-my) \} \\
&= 0 \quad by\ (7), \\
(\Omega\, G_1)^3_1 &= \frac{t^2}{4} B \{ my'' - \frac{n}{2} my''(x+y) + x'' - \frac{n}{2} my''(x+y) \} + (\frac{t^2-2}{4} A + \frac{t^2}{4} B) \frac{n}{2} myy'' \\
&\qquad - \frac{t^2}{4} B\, x'' \\
&= \frac{t^2}{4} B \{ my'' - nmy''(x+y) \} + \frac{n}{2} myy''(-\frac{m}{n} \frac{t^2}{2} B + \frac{t^2}{2} B) \quad by\ (6) \\
&= my'' \frac{t^2}{4} B\, (1 - n(x+y) - my + ny) \\
&= 0 \quad by\ (7), \\
(\Omega\, G_1)^3_2 &= 0, \\
(\Omega\, G_1)^3_3 &= \frac{t^2}{2} B\, (x+y) - (\frac{t^2-2}{4} A + \frac{t^2}{4} B)\, y, \\
&= \frac{t^2}{2} B\, (x+y) - (-\frac{m}{n} \frac{t^2}{2} B + \frac{t^2}{2} B)\, y \quad by\ (6) \\
&= \frac{t^2}{2} B\, (x + \frac{m}{n} y) \\
&= \frac{1}{n} \frac{t^2}{2} B \quad by\ (7) \\
(\Omega\, G_1)^3_4 &= \frac{t^2}{4} B \{ x' + my'(x+y) - mx'y'' + \frac{n}{2} mx'y''(x+y) - x'x'' \} \\
&\qquad + \frac{t^2}{4} B \{ my'(x+y) + \frac{n}{2} mx'y''(x+y) \} \\
&\qquad + (\frac{t^2-2}{4} A + \frac{t^2}{4} B)(-myy' - \frac{n}{2} mx'yy'') + x'x'' \frac{t^2}{4} B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{t^2}{4}B\,\{x' + 2my'(x+y) - mx'y'' + nmx'y''(x+y)\} \\
&\quad + (-\frac{m}{n}\frac{t^2}{2}B + \frac{t^2}{2}B)(-myy' - \frac{n}{2}mx'yy'') \quad \textit{by } (6) \\
&= \frac{t^2}{4}B\,\{x' + 2my'(x+y) - mx'y'' + nmx'y''(x+y) \\
&\qquad\quad + \frac{2m^2}{n}yy' - 2myy' + m^2x'yy'' - nmx'yy''\} \\
&= \frac{t^2}{4}B\,\{x' + 2my'(x + \frac{m}{n}y) + mx'y''(-1+nx+my)\} \\
&= \frac{t^2}{4}B\,(x' + \frac{2m}{n}y') \quad \textit{by } (7) \\
&= \frac{1}{n}\frac{t^2}{2}B \quad \textit{by } (8),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Omega\,G_1)^4_1 &= -\frac{t^2}{4}B\,\{my'' - \frac{n}{2}my''(x+y) + x''\} + (\frac{t^2-2}{4}A - \frac{t^2}{4}B)\,\{-\frac{n}{2}y''(1-\frac{n}{2}x)\} \\
&\quad + \frac{t^2}{4}B\,\{-\frac{n}{2}my''(x+y)\} + \frac{t^2}{4}B\,x'' + (-\frac{t^2-2}{4}A + \frac{t^2}{4}B)\,\frac{n^2}{4}xy'' \\
&= -my''\,\frac{t^2}{4}B + \frac{m}{2}y''\,\frac{t^2}{2}B \quad \textit{by } (6) \\
&= 0, \\
(\Omega\,G_1)^4_2 &= 0, \\
(\Omega\,G_1)^4_3 &= 0, \\
(\Omega\,G_1)^4_4 &= -\frac{t^2}{4}B\,\{x' + my'(x+y) - mx'y'' + \frac{n}{2}mx'y''(x+y) - x'x''\} \\
&\quad + (\frac{t^2-2}{4}A - \frac{t^2}{4}B)\{(1-\frac{n}{2}x)y' + \frac{n}{2}x'y''(1-\frac{n}{2}x)\} \\
&\quad + \frac{t^2}{4}B\,\{my'(x+y) + \frac{n}{2}mx'y''(x+y)\} - \frac{t^2}{4}B\,x'x'' \\
&\quad + (\frac{t^2-2}{4}A - \frac{t^2}{4}B)(\frac{n}{2}xy' + \frac{n^2}{4}xx'y'') \\
&= -\frac{t^2}{4}B\,(x' - mx'y'') - \frac{m}{n}\frac{t^2}{2}B\,(y' + \frac{n}{2}x'y'') \quad \textit{by } (6) \\
&= -\frac{t^2}{4}B\,(x' + \frac{2m}{n}y') \\
&= -\frac{1}{n}\frac{t^2}{2}B.
\end{aligned}
$$

また, $\Lambda_{even}\,G_2 = (\Lambda_{even}\,G_2)^i_j$ とすると

$$
\begin{aligned}
(\Lambda_{even}\,G_2)^1_1 &= \frac{A}{2},\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^1_2 &= 0,\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^1_3 &= -\frac{A}{2},\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^1_4 &= 0,\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^1_5 &= \frac{A}{2},\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^1_6 &= 0,\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^2_1 &= 0,\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^2_2 &= -\frac{nx}{2}\,tB - \frac{my}{2}\,tB\\
&= -\frac{t}{2}B, \quad by\ (7)\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^2_3 &= 0,\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^2_4 &= -\frac{n(x+y)}{2}\,tB + \frac{(n-m)y}{2}\,tB\\
&= -\frac{t}{2}B,\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^2_5 &= 0,\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^2_6 &= \frac{nx-2+my}{2}\,tB\\
&= -\frac{t}{2}B \quad by\ (7),\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^3_1 &= \frac{t^2}{4}B,\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^3_2 &= 0,\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^3_3 &= \frac{t^2}{4}B,\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^3_4 &= \frac{t^2}{2}B - \frac{m}{n}\frac{t^2}{2}B\\
&= \frac{t^2-2}{4}A + \frac{t^2}{4}B \quad by\ (6),\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^3_5 &= -\frac{t^2}{4}B,\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^3_6 &= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Lambda_{even}\,G_2)^4_1 &= -\frac{t^2}{4}B,\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^4_2 &= -\frac{m}{n}\frac{t^2}{2}B\\
&= \frac{t^2-2}{4}A - \frac{t^2}{4}B, \quad by\ (6)\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^4_3 &= \frac{t^2}{4}B,\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^4_4 &= 0,\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^4_5 &= \frac{t^2}{4}B,\\
(\Lambda_{even}\,G_2)^4_6 &= \frac{m}{n}\frac{t^2}{2}B\\
&= -\frac{t^2-2}{4}A + \frac{t^2}{4}B \quad by\ (6).
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

次に $n$ が奇数のときを考える. 同様にして $(m,n)=1$ なので

$$nx + my = 1, \tag{10}$$

となる整数 $x$, $y$ が存在する. 次に $(n,2)=1$ なので

$$2x' + ny' = 1, \tag{11}$$

となる整数 $x'$, $y'$ をとる. さらに $(2m,n)=1$ なので

$$nx'' + 2my'' = 1, \tag{12}$$

となる整数 $x''$, $y''$ が存在する. ここで3つの行列

$$
\Lambda_{odd} := \begin{pmatrix}
A & 0 & 0 & \frac{x''}{2}A\\
0 & \frac{t}{2}B & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{n}\frac{t^2}{2}B & x''\frac{t^2}{4}B\\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{n}\frac{t^2}{4}B
\end{pmatrix},
$$

$$G_1' := \begin{pmatrix} 1 & -(m-n)y' & x+y+(m-n)yy' & x''-(m-n)y'y'' \\ 0 & -x' & x'y & y''-x'y'' \\ 0 & -(m-n)y' & x+y+(m-n)yy' & -(m-n)y'y'' \\ 0 & -ny' & -y+nyy' & -ny'y'' \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x' & x'y & -x'y'' \end{pmatrix},$$

$$G_2' := \begin{pmatrix} my'' & -mx'' & -my'' & 0 & 1-my'' & mx'' \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ nmy'' & -nmx'' & n(1-my'') & n-m & -nmy'' & nmx'' \\ n & 2m & -n & 0 & -n & -2m \end{pmatrix},$$

を考えると (10), (11), (12) から

$$\Lambda_{odd} = \Omega\, G_1', \Omega = \Lambda_{odd}\, G_2'$$

が成り立つ. 実際, $\Omega\, G_1' = (\Omega\, G_1')^i_j$ とすると

$$\begin{aligned}
(\Omega\, G_1')^1_1 &= A, \\
(\Omega\, G_1')^1_2 &= 0, \\
(\Omega\, G_1')^1_3 &= 0, \\
(\Omega\, G_1')^1_4 &= \frac{x''}{2}A, \\
(\Omega\, G_1')^2_1 &= 0, \\
(\Omega\, G_1')^2_2 &= -\frac{t}{2}B\,(-2x'-ny') \\
&= \frac{t}{2}B, \quad by\ (11) \\
(\Omega\, G_1')^2_3 &= -\frac{t}{2}B\,(2x'y+nyy'-y) \\
&= -\frac{t}{2}B\,(y-y) \quad by\ (11) \\
&= 0 \\
(\Omega\, G_1')^2_4 &= -\frac{t}{2}B\,(y''-2x'y''-ny'y'') \\
&= 0, \quad by\ (11) \\
(\Omega\, G_1')^3_1 &= 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\Omega\, G_1')^3_2 &= \frac{t^2}{2}B\,(-m+n)y' + (\frac{t^2-2}{4}A + \frac{t^2}{4}B)(-ny') \\
&= \frac{t^2}{2}B\,(-m+n)y' + (-\frac{m}{n}\,\frac{t^2}{2}B + \frac{t^2}{2}B)(-ny') \quad \textit{by } (6) \\
&= \frac{t^2}{2}B(-my' + ny' + my' - ny') \\
&= 0, \\
(\Omega\, G_1')^3_3 &= \frac{t^2}{2}B\{x + y + (m-n)yy'\} + (\frac{t^2-2}{4}A + \frac{t^2}{4}B)(-y + nyy') \\
&= \frac{t^2}{2}B\{x + y + (m-n)yy'\} + (-\frac{m}{n}\,\frac{t^2}{2}B + \frac{t^2}{2}B)(-y + nyy') \quad \textit{by } (6) \\
&= \frac{t^2}{2}B\{x + y + (m-n)yy' + \frac{m}{n}y - myy' - y + nyy'\} \\
&= \frac{1}{n}\,\frac{t^2}{2}B, \quad \textit{by } (10) \\
(\Omega\, G_1')^3_4 &= \frac{t^2}{4}B\{x'' - 2(m-n)y'y''\} + (\frac{t^2-2}{4}A + \frac{t^2}{4}B)(-ny'y'') \\
&= \frac{t^2}{4}B\{x'' - 2(m-n)y'y''\} + (-\frac{m}{n}\,\frac{t^2}{2}B + \frac{t^2}{2}B)(-ny'y'') \quad \textit{by } (6) \\
&= \frac{t^2}{4}B\{x'' - 2(m-n)y'y'' + 2my'y'' - 2ny'y''\} \\
&= x''\,\frac{t^2}{4}B, \\
(\Omega\, G_1')^4_1 &= 0, \\
(\Omega\, G_1')^4_2 &= 0, \\
(\Omega\, G_1')^4_3 &= 0, \\
(\Omega\, G_1')^4_4 &= -\,x''\,\frac{t^2}{4}B + y''\,(\frac{t^2-2}{4}A - \frac{t^2}{4}B) \\
&= -\,x''\,\frac{t^2}{4}B + y''\,(-\frac{m}{n}\,\frac{t^2}{2}B) \quad \textit{by } (6) \\
&= \frac{t^2}{4}B(-x'' - 2\,\frac{m}{n}\,y'') \\
&= -\,\frac{1}{n}\,\frac{t^2}{4}B, \quad \textit{by } (12)
\end{aligned}
$$

また, $\Lambda_{odd}G'_2 = (\Lambda_{odd}G'_2)^i_j$ とすると

$$
\begin{aligned}
(\Lambda_{odd}G'_2)^1_1 &= \frac{A}{2}(nx'' + 2my'') \\
&= \frac{A}{2}, \quad by\ (12) \\
(\Lambda_{odd}G'_2)^1_2 &= 0 \\
(\Lambda_{odd}G'_2)^1_3 &= \frac{A}{2}(-nx'' - 2my'') \\
&= -\frac{A}{2}, \quad by\ (12) \\
(\Lambda_{odd}G'_2)^1_4 &= 0 \\
(\Lambda_{odd}G'_2)^1_5 &= \frac{A}{2}(2 - 2my'' - nx'') \\
&= \frac{A}{2}, \quad by\ (12) \\
(\Lambda_{odd}G'_2)^1_6 &= 0, \\
(\Lambda_{odd}G'_2)^2_1 &= 0, \\
(\Lambda_{odd}G'_2)^2_2 &= -\frac{t}{2}B, \\
(\Lambda_{odd}G'_2)^2_3 &= 0, \\
(\Lambda_{odd}G'_2)^2_4 &= -\frac{t}{2}B, \\
(\Lambda_{odd}G'_2)^2_5 &= 0, \\
(\Lambda_{odd}G'_2)^2_6 &= -\frac{t}{2}B, \\
(\Lambda_{odd}G'_2)^3_1 &= \frac{t^2}{4}B(nx'' + 2my'') \\
&= \frac{t^2}{4}B, \quad by\ (12) \\
(\Lambda_{odd}G'_2)^3_2 &= 0, \\
(\Lambda_{odd}G'_2)^3_3 &= \frac{t^2}{4}B(2 - 2my'' - nx'') \\
&= \frac{t^2}{4}B, \quad by\ (12) \\
(\Lambda_{odd}G'_2)^3_4 &= \frac{t^2}{2}B - \frac{m}{n}\frac{t^2}{2}B \\
&= \frac{t^2-2}{4}A + \frac{t^2}{4}B, \quad by\ (6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Lambda_{odd}\, G_2')_5^3 &= \frac{t^2}{4} B\,(-nx'' - 2my'') \\
&= -\frac{t^2}{4}B, \quad by\ (12) \\
(\Lambda_{odd}\, G_2')_6^3 &= 0 \\
(\Lambda_{odd}\, G_2')_1^4 &= -\frac{t^2}{4}B, \\
(\Lambda_{odd}\, G_2')_2^4 &= -\frac{m}{n}\frac{t^2}{2}B \\
&= \frac{t^2-2}{4}A - \frac{t^2}{4}B, \quad by\ (6) \\
(\Lambda_{odd}\, G_2')_3^4 &= \frac{t^2}{4}B, \\
(\Lambda_{odd}\, G_2')_4^4 &= 0, \\
(\Lambda_{odd}\, G_2')_5^4 &= \frac{t^2}{4}B, \\
(\Lambda_{odd}\, G_2')_6^4 &= \frac{m}{n}\frac{t^2}{2}B \\
&= -\frac{t^2-2}{4}A + \frac{t^2}{4}B \quad by\ (6)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

以上より, $n$ が偶数あるいは奇数のどちらでも (5) によって 4 次元平坦トーラス内極小曲面

$$
f : M \longrightarrow \mathbf{R}^4/\Lambda_{even}
$$
$$
f : M \longrightarrow \mathbf{R}^4/\Lambda_{odd}
$$

が構成される. また, (6) から $0 < t < 1$ としたので, Remark 2.2 から, これらの極小曲面は正則ではない. さらに, この構成は有理数 $\frac{m}{n}$ をパラメーターにしているので, $0 < t < 1$ において稠密に構成する事ができる.

# 参考文献


[1] N. Ejiri. A differential-geometric Schottky problem and minimal surfaces in tori. *to appear in Proceedings of 9th MSJ-IRI.*

[2] D. A. Hoffman and R. Osserman. The geometry of the generalized Gauss map. *Mem. Amer. Math. Soc. vol.28, No.236*, 1980.

[3] H. Karcher. The triply periodic minimal surfaces of Alan Schoen and their constant mean curvature companions. *manuscripta Math 64*, pp. 291–357.

[4] M. Micallef. Stable minimal surfaces in Euclidean space. *J. Diff. Geom. 19*, pp. 57–84, 1984.

[5] M. Micallef. Stable minimal surfaces in flat tori. *Complex Diff. Geom and Nonlinear Diff. Equations 49*, pp. 73–78, 1984.

[6] T. Nagano and B. Smyth. Minimal surfaces in tori by Weyl groups I. *Proc. Amer. Math. Soc. 61*, pp. 102–104, 1976.

[7] T. Nagano and B. Smyth. Periodic minimal surfaces and Weyl groups. *Acta. Math 145*, pp. 1–27, 1980.

[8] M. Ross. Schwarz' P and D surfaces are stable. *Differential Geometry and its Applications 2 (1992)*, pp. 179–195.

[9] A. Schoen. *Infinite periodic minimal surfaces without self-intersections.* Technical Note D-5541, N. A. S. A, Cambridge, Mass., May 1970.

[10] H. A. Schwarz. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Vol 1.* Berlin: Springer-Verlag, 1890.