MATEMÀTIQUES DE COLORS

ARIADNA MATABOSCH REIXACH

Treball guanyador del Premi Jordi Pujiula.
Àmbit de Tecnologia, 2012

Trobo que el món matemàtic és un tema gairebé tabú, ja que quan algú em demana el que vull estudiar i jo contesto: “Matemàtiques!”, tothom em mira estranyat que em puguin interessar i acaben dient-me: “Matemàtiques? Amb lo difícils que són!”

M’interessa molt el que pot venir després d’aquest treball, ja que podré iniciar una carrera universitària fent allò que m’agrada.

Lligant el tema dels meus possibles estudis universitaris matemàtics i el Cub de Rubik com a element molt relacionat amb les matemàtiques, vaig pensar que seria interessant estudiar-lo, a partir dels meus coneixements matemàtics, i aprofundir-hi.

Has intentat mai fer el Cub de Rubik? De ben segur que sí, que alguna vegada a la teva vida t’ha arribat a les mans un cub, i has intentat resoldre’l. Com a molt, el primer dia deus haver aconseguit fer una cara i, amb molta sort, amb algú que t’ho expliqui i molta paciència, has arribat a fer-lo gairebé tot. Resoldre el Cub de Rubik no és bufar i fer ampolles, ja que requereix lògica, paciència i, sovint, un manual d’instruccions.

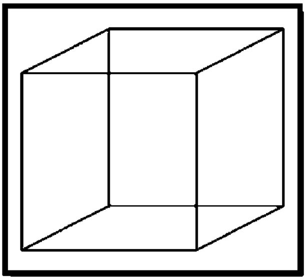
El Cub de Rubik està molt relacionat amb el món lògic i matemàtic, ja que la seva resolució té una base matemàtica. A més de la funció lògica, el cub és vist com un dels entreteniments més coneguts del món.

L’objectiu final d’aquest treball és l’elaboració d’un manual que permeti la resolució del cub a qualsevol persona que no tingui cap coneixement previ.

Per arribar a aquest final, primer hauré d’estudiar el cub com a cos platònic, la seva configuració, característiques, propietats, desenvolupaments, els diferents girs i simetries que conté, estructures..., com a pas previ a un estudi matemàtic més profund que condueixi a la seva resolució.

El cub: un cos geomètric

El cub com a poliedre regular:



Un poliedre regular és un cos tridimensional, les cares del qual són polígons regulars, que s'uneixen de la mateixa manera al voltant de cada vèrtex del polígon.

En total existeixen cinc poliedres regulars, que també s'anomenen sòlids platònics i són: tetraedre, l'octaedre, el dodecaedre, l'icosàedre i l'hexaedre, talment conegut com el cub.

Aquest grup de poliedres regulars presenta un seguit de propietats molt estrictes amb les respectives característiques. Aquestes propietats són les següents:

- *La regularitat*.

- *La simetria*, que és la correspondència exacta en la disposició regular de les parts o punts d'un cos o figura en relació a un punt (centre), una recta (eix) o un pla.

- *La conjugació*, que demostra que, si es dibuixa un poliedre utilitzant com a vèrtex els centres de les cares d'un sòlid platònic, s'obtenen altres sòlids platònics, anomenant conjugat del primer, amb tants vèrtexs com cares tenia el sòlid inicial, i el mateix nombre d'arestes. El poliedre conjugat d'un dodecaedre és un icosàedre, i al revés; i el d'un cub és un octaedre, i al revés; i el poliedre conjugat d'un tetraedre és un altre tetraedre.

- *Teorema de poliedres d'Euler*, el qual explica que el número de cares d'un poliedre platònic més el seu nombre de vèrtexs és sempre igual al seu nombre d'arestes més dos:

c = nombre de cares del poliedre
v = nombre de vèrtexs del poliedre
a = nombre d'arestes del poliedre

$$c + v = a + 2$$

Cal tenir en compte que, geomètricament parlant, un cub és un objecte sòlid tridimensional format per sis cares iguals que s'uneixen per arestes i cada tres cares es troben en un vèrtex.

Desplegaments en el pla:

El cub està format per sis quadrats idèntics que conjuntament formen les seves sis cares. Aquestes cares poden tenir diferents desplegaments en el pla, que és el que estudiaré a continuació:

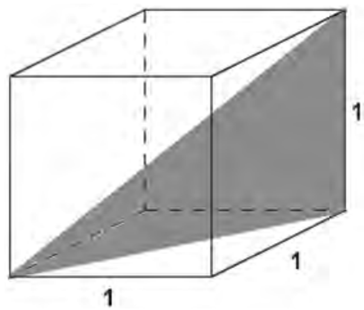
Aparentment hi ha diversos desplegaments diferents però observant-los amb atenció es veu que n'hi ha molts de repetits, ja que són el producte d'una simetria o d'una rotació obtinguda a algun altre desplegament trobat anteriorment. Cal tenir en compte que hi ha algunes figures que es poden obtenir unint els sis quadrats que, en plegar-los no permeten formar un cub tridimensional, per tant, aquests desplegaments no es poden considerar com a vàlids. Com a resultat final, i fent el recompte, es pot veure que només hi ha 11 possibles desplegaments d'un cub en el pla.

Nombres reals que es poden trobar en un cub:

Una aplicació del treball més relacionada amb les matemàtiques és quan s'utilitzen teoremes matemàtics, com per exemple el Teorema de Pitàgores que diu que, en un triangle rectangle, el quadrat de la seva hipotenusa és igual a la suma del quadrat dels seus dos catets ($h^2=c^2+c^2$), per tal de trobar números que estiguin relacionats amb el cub. Per trobar aquests números cal agafar un cub unitari, és a dir, un cub les arestes del qual mesuren 1 unitat i, per tant, cada una de les seves cares mesuren 1 unitat2.

Un dels números més representatius del cub és $\sqrt{2}$ unitats, ja que aquest és el resultat de calcular la diagonal d'una cara del cub unitari. Aquest número l'he obtingut amb l'ajuda del Teorema de Pitàgores on he pres els costats del cub com a catets, els quals valien una unitat i he trobat la hipotenusa.

Un altre número que personalment penso que és molt interessant a estudiar és la diagonal del cub, és a dir, la línia imaginària que travessa el cub per dins i va d'un vèrtex al seu oposat. En aquest cas, un catet valia 1 unitat ja que representa l'alçada del cub i l'altre catet valia $\sqrt{2}$ perquè representaria la distància de la diagonal d'una cara. Com a resultat d'utilitzar el Teorema de Pitàgores per a obtenir aquest número, m'ha donat $\sqrt{3}$ unitats.



Moviments que deixen un cub invariable:

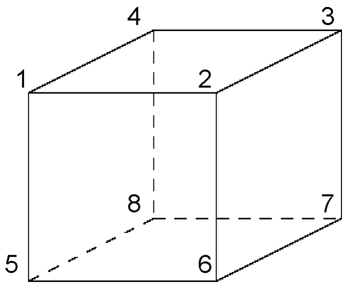
Deixant de banda les matemàtiques aplicades i aprofundint en la matemàtica més complexa, m'he dedicat a estudiar dos tipus de moviments que es poden aplicar a un cub i deixar-lo visiblement invariat. Aquests dos moviments són els moviments giratoris i les simetries.

Cal definir una nomenclatura per identificar tots aquests moviments. Per fer-ho utilitzarem matrius.

Una matriu és un conjunt de nombres disposats en files i columnes de manera que si té m files (horitzontals) i n columnes (verticals) direm que la matriu és de dimensió m x n.

En aquest cas, utilitzaré matrius de 2 files i 8 columnes, és a dir de dimensió 2 x 8. En la primera fila hi posaré els 8 vèrtexs del cub disposat tal i com mostra l'esquema i en la segona fila hi posaré el lloc on ha anat a parar cada vèrtex després d'haver fet un moviment.

Em referiré a la Identitat, com al cub que no ha estat sotmès a cap transformació, per tant, a l'original.



$$I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Començaré pels *moviments giratoris*: aquests moviments són aquells que, prenent un eix determinat que passa per certs punts del cub com poden ser el centre de les cares, vèrtexs oposats o centres de les arestes, es fa girar el cub un nombre de graus determinat per tal que, un cop realitzat el gir, el cub sembla aparentment que no s'ha mogut, però en realitat sí que ho ha fet.

Els primers moviments giratoris a estudiar són aquells que utilitzen els coneguts eixos de coordenades (X, Y, Z), en els quals faré girar el cub 90º, 180º i 270º per veure el moviment que realitzen les arestes del cub en cada cas. Un cop estudiats els nou moviments diferents, faré passar els eixos pels vèrtexs per obtenir nous resultats, i de cada un d'aquests possibles eixos es poden realitzar nous moviments fent girar el cub 120º i 240º cada vegada. D'aquests girs definits anteriorment n'hi ha 8 de diferents entre ells i amb els trobats al principi de l'exercici. I, finalment, l'última possibilitat que em permet aconseguir el cub invariable a partir d'un gir consisteix que l'eix travessi les dues arestes oposades. D'aquests girs només en puc obtenir una variació en cada cas i aquest es tracta de fer girar el cub 180º pel respectiu eix. D'aquesta última variació, n'he obtingut 6 moviments diferents.

Aquestes són totes les variacions que presenta un cub en moure'l, fent-lo girar prenent diferents eixos rotatoris, i que deixen el cub visiblement invariat.

Aquest conjunt de moviments els anomenaré de M2 a M24, i cada un prendrà el nom, depenent de l'ordre en què els he anat trobant, tenint en compte que el M1 és la Identitat, que l'anomenarem I.

Arribats a aquest punt, m'interessa estudiar la composició de moviments giratoris, és a dir, quin és el resultat d'aplicar dos dels moviments trobats anteriorment consecutivament en el cub per veure si el resultat d'aquesta composició és una nova posició del cub o un moviment ja trobat anteriorment.

La meva hipòtesi inicial era que algun espai de l'anterior taula no pogués ser omplert ja que pensava que, a partir de la composició de dos moviments qualssevol, no sempre obtindria un altre dels moviments definits. Però, un cop realitzades totes les operacions, he pogut comprovar que la meva hipòtesi no era correcta i s'ha pogut d'omplir completament. Demostrant que els 24 moviments giratoris d'un cub formen un conjunt tancat.

Un cop realitzada aquesta taula l'he analitzat detalladament i he pogut observar que hi ha una sèrie de subconjunts marcats de color lila on es pot veure que hi ha una repetició de la identitat i de números consecutius en petites quadrícules

Seguidament hi ha les *simetries*: són una altra manera de modificar la posició de cada vèrtex d'un cub, però sempre deixant-lo invariable. Aquesta manera és utilitzant plans de simetria que tallen el cub per diferents posicions, i inverteixen la posició dels vèrtexs. Mentre es vagin trobant nous moviments, s'aniran donant noms a aquests a partir del M24. Finalment, he arribat a la conclusió que hi ha 8 simetries diferents i, per tant, he obtingut fins al M33.

A partir de tots els càlculs respectius, he obtingut la taula següent:

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
2	2	3	4	1	13	20	16	11	22	17	23	5	19	10	8	21	24	7	12	9	18	6	15	14
3	3	4	1	2	19	9	21	23	6	24	15	13	12	17	11	18	14	16	5	22	7	20	8	10
4	4	1	2	3	12	22	18	15	20	14	8	19	5	24	23	7	10	21	13	6	16	9	11	17
5	5	17	21	15	6	7	1	13	19	12	2	23	24	4	20	10	22	8	3	14	9	11	16	18
6	6	22	9	20	7	1	5	24	3	23	17	16	18	15	14	12	11	13	21	4	19	2	10	8
7	7	11	19	14	1	5	6	18	21	16	22	10	8	20	4	23	2	24	9	15	3	17	12	13
8	8	13	24	18	15	23	11	9	10	1	19	4	20	7	21	2	5	22	14	16	17	12	3	6
9	9	20	6	22	21	3	19	10	1	8	14	18	16	11	17	13	15	12	7	2	5	4	24	23
10	10	16	23	12	17	24	14	1	8	9	7	22	2	19	5	20	21	4	11	13	15	18	6	3
11	11	19	14	7	8	15	23	22	17	2	12	1	9	16	18	3	13	6	10	21	24	5	4	20
12	12	10	16	23	22	18	4	5	13	19	1	11	17	3	6	14	9	15	2	24	20	8	7	21
13	13	24	18	8	20	16	2	19	12	5	3	15	14	1	9	17	6	11	4	10	22	23	21	7
14	14	7	11	16	10	17	24	4	15	20	18	9	1	13	12	6	16	3	8	5	23	21	22	2
15	15	5	17	21	23	11	8	20	14	4	13	3	6	18	16	1	12	9	24	7	10	19	2	22
16	16	23	12	10	2	13	20	7	18	21	6	17	11	9	1	15	3	14	22	8	4	24	5	19
17	17	21	15	5	24	14	10	2	11	22	16	6	3	12	13	9	18	1	23	19	8	7	20	4
18	18	8	13	24	4	12	22	21	16	7	9	14	15	6	3	11	1	17	20	23	2	10	19	5
19	19	13	7	11	9	21	3	12	5	13	4	8	10	2	22	24	20	23	1	17	6	15	18	16
20	20	6	22	9	16	2	13	14	4	15	24	21	7	8	10	5	23	19	18	1	12	3	17	11
21	21	15	5	17	3	19	9	16	7	18	20	24	23	22	2	8	4	10	6	11	1	14	13	12
22	22	9	20	6	18	4	12	17	2	11	10	7	21	23	24	19	8	5	16	3	13	1	14	15
23	23	12	10	16	11	8	15	6	24	3	5	2	22	21	7	4	19	20	17	18	14	13	1	9
24	24	18	8	13	14	10	17	3	23	6	21	20	4	5	19	22	7	2	15	12	11	16	9	1

De la mateixa manera que ho he fet amb els girs, comprovaré si el conjunt de les simetries forma un conjunt tancat a partir de la composició de dues d'elles. I com a resultat final he obtingut la taula següent:

*****	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**
25	I	9	8	10	3	4	2	19	21
26	9	I	10	8	6	22	20	7	5
27	10	8	I	9	23	12	16	11	15
28	8	10	9	I	24	18	13	14	17
29	3	6	23	24	I	2	4	5	7
30	2	22	11	17	4	I	3	12	18
31	4	20	15	14	2	3	I	13	16
32	19	5	12	13	7	11	14	I	6
33	21	7	16	18	5	17	15	6	I

A patir dels resultats obtinguts a la taula puc afirmar que cap composició de dues simetries pertany als moviment del 25 al 33, que són amb els que he operat. En canvi, s'han obtingut moviments d'entre l'I al 24. Això ens demostra que, del moviment 25 al 33, no és un conjunt tancat.

Arribat a aquest punt, i partint dels resultats que del moviment I al 24 (moviments giratoris) formen un conjunt tancat i que del moviment 25 al 33 (simetries) formen un conjunt no tancat, em proposo comprovar si, ajuntant els moviments giratoris amb les simetries, es pot arribar a aconseguir un conjunt tancat. I fent les respectives operacions he obtingut els següents resultats dels quals n'extrec les conclusions.

I	...	24	25	...	33
	GIRS			SIMETRIES*GIRS	
	GIRS*SIMETRIES			SIMETRIES	

1. **Formen o no formen un grup tancat:**
En observar la taula de la composició de moviments giratoris i simetries de les operacions entre tots els possibles moviments d'un cub que el deixen invariable, he vist que queden espais buits. Aquests espais corresponen a variacions no estudiades, que impedeixen l'obtenció d'un conjunt tancat.
En no obtenir tota la taula completa numèricament parlant, no puc dir que tot el conjunt de moviments que deixen un cub invariable formen un conjunt tancant.
Fent una lectura ràpida de la taula i com a hipòtesi inicial, creia que obtindria els següents resultats: part de color rosa i blau forma un conjunt tancat, part de color verd i groc formen un conjunt no tancat. Però un cop fetes totes les operacions anteriors i fent una anàlisi més completa de la taula, m'adono que la hipòtesi inicial no es pot verificar ja que únicament es pot considerar com a grup tancat la part de color rosa, mentre que la verda, la blava i la groga són grups no tancats.
Cal tenir en compte que seria de fàcil confusió fer una observació de la zona blava, i creure que forma un conjunt tancat pel sol fet que tots els requadres queden omplerts. Però, com bé s'ha detallat en l'apartat de composició de simetries, queda demostrat que no forma un conjunt tancat.
2. **Relacions numèriques que s'estableixen dins la taula**
Inicialment no m'havia plantejat que pogués haver-hi una relació entre els resultats numèrics de la taula. Tot i que, mentre feia l'anàlisi dels resultats, em vaig adonar que, mínimament, la taula segueix una certa organització. Aquesta organització està estructurada en subgrups molt reduïts, els resultats dels quals oscil·len entre intervals poc separats.

Estructures albegraiques:

Una estructura algebraica és un conjunt d'elements amb unes propietats operacionals determinades. El que determina l'estructura algebraica d'un conjunt són les operacions matemàtiques que es poden realitzar amb els elements d'aquest i les propietats d'aquestes operacions.

Quan parlem dels elements del conjunt ens referim a cadascuna de les unitats del conjunt, és a dir, dels nombres que el formen. Per exemple: En el conjunt dels nombres naturals, els elements són 1, 2, 3, 4, 5...

En el meu cas, els elements serien cada moviment obtingut en moure un cub i obtenir-lo en la mateixa posició, encara que amb els vèrtexs canviats.

Donat un conjunt, es poden definir operacions amb els seus elements, com poden ser la suma, la resta, el producte...

Trobem que existeixen dos tipus d'operacions:

- Interna: quan s'opera entre elements del mateix conjunt. Aquesta operació es troba en la propietat de clausura, ja que obliga que el resultat de l'operació entre dos elements d'un mateix conjunt es trobi dins el mateix conjunt.
- Externa: quan s'opera entre elements de diferents conjunts. Un exemple seria la multiplicació.

Segons les propietats que verifiquen aquestes operacions, s'obtenen diverses estructures algebraiques, entre altres:

- Estructura de grup
- Estructura d'anell
- Estructura de cos
- Estructura d'espai vectorial

ESTRUCTURA DE GRUP: Es diu que un conjunt, G, amb els seus respectius elements, que conté una llei interna o operació interna (*), té estructura de grup, si aquesta operació o llei posseeix les següents propietats:

- Propietat de clausura: diu que el resultat de l'operació interna entre dos elements del conjunt ha de donar com a resultat un element del mateix conjunt.

$$x * y \in G \quad \forall x, y \in G$$

- Propietat associativa: expressa que el resultat serà invariable independentment de la manera en què operem.

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in G$$

- Propietat de l'existència de l'element neutre: obliga l'existència d'un element, e, en el conjunt que, operat tant per la dreta com per l'esquerra amb un element qualsevol del conjunt, obtindrem aquest mateix element.

$$\exists e \in G: \quad x * e = e * x = x \quad \forall x \in G$$

- Propietat de l'existència de l'element simètric: obliga l'existència d'un element, x-1, que sigui l'invers d'un altre del conjunt i que, operats per qualsevol costat, donin com a resultat l'element neutre.

$$\exists x\text{-}1 \in G: \quad x * x\text{-}1 = x\text{-}1 * x = e \quad \forall x \in G$$

Si, a més d'aquestes quatre propietats, també es compleix la propietat commutativa, es diu que el grup és commutatiu o abelià.

Aquesta propietat expressa que no importa l'ordre en què operis els dos elements ja que sempre donarà el mateix resultat:

$$x * y = y * x \quad \forall , y \in G$$

L'estructura de grup és una de les més simples, ja que només cal que es verifiquin unes poques propietats.

ESTRUCTURA D'ANELL: Una altra de les estructures algebraiques és l'estructura d'anell.

Per tenir una estructura d'anell, a un grup abelià A (en aquest cas s'anomena additiu) li afegim una segona llei, anomenada multiplicació. Aquesta és tancada, associativa i distributiva respecte a la primera llei.

És a dir: el conjunt A té estructura d'anell si conté les operacions internes de la suma (+) i la multiplicació (•) amb les següents propietats:

Propietats de l'addició: (són les mateixes propietats que l'estructura de grup)

- Propietat de la clausura:

$x + y \in A \quad \forall\, x , y \in A$

- Propietat associativa:

$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall\, x, y, z \in A$

- Propietat de l'existència del zero:

$x + 0 = 0 + x = x \quad \forall\, x, 0 \in A$

- Propietat de l'existència de l'oposat:

$x + (-x) = (-x) + x = 0 \quad \forall\, -x, x, 0 \in A$

- Propietat de commutativa:

$x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in A$

Propietats de la multiplicació: (segona operació interna del conjunt)

- Propietat de la clausura:

$x \cdot y \in A \quad \forall\, x , y \in A$

- Propietat associativa:

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall\, x, y, z \in A$

La propietat distributiva és l'última propietat que es necessita per determinar una estructura d'anell. Aquesta propietat lliga la primera i la segona operació interna de tal manera que expressa que la multiplicació per dos nombres sumats és el mateix que multiplicar aquest nombre pel primer i després sumar la multiplicació d'aquest pel segon:

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall\, x, y, z \in A$

$(y \cdot z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \quad \forall\, x, y, z \in A$

Si, a més, es verifiquen altres propietats (de la multiplicació), existeixen altres tipus d'estructures d'anell:

- Propietat de l'existència de la unitat: és similar a la propietat de l'existència de l'element neutre, que consisteix a obtenir el mateix element multiplicant-lo per la unitat (1).

$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \forall\, x, 0 \in A$

- Propietat commutativa:

$x \cdot y = y \cdot x \quad \forall\, x, y \in A$

Direm que, si en una estructura d'anell es verifica la propietat de l'existència de la unitat del producte, aquest conjunt A és un anell unitari.

En el cas en què aquest conjunt A compleixi la propietat commutativa, però no la propietat de l'existència de la unitat, direm que es tracta d'un anell commutatiu.

I, finalment, si tenim un conjunt A, en el qual es verifiquin tant la propietat de l'existència de la unitat com la propietat commutativa del producte, direm que el conjunt A és un anell unitari i commutatiu.

ESTRUCTURA DE COS: S'anomena cos commutatiu a tots aquells anells K els elements dels quals formen un grup abelià respecte a la multiplicació. És a dir, el conjunt K té estructura de cos commutatiu si aquest conjunt està compost per les lleis internes + i •, i aquestes tenen les propietats següents:

Propietats de l'addició: (aquestes propietats són les mateixes que les d'estructura d'anell)

- Propietat de la clausura:

$x + y \in K \quad \forall\, x , y \in K$

- Propietat associativa:

$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall\, x, y, z \in K$

- Propietat de l'existència del zero.

$x + 0 = 0 + x = x \quad \forall\, x, 0 \in K$

- Propietat de l'existència de l'oposat:

$x + (-x) = (-x) + x = 0 \quad \forall\, -x, x, 0 \in K$

- Propietat commutativa:

$x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in K$

És imprescindible que totes aquestes propietats es verifiquin ja que, si no fos així, ja no es partiria d'un grup abelià i per tant ja no podríem arribar a dir que tenim una estructura de cos commutatiu.

Per altra banda, també és indispensable que compleixi totes les propietats de la multiplicació, que són les mateixes que en el cas de l'estructura d'anell. Però en l'estructura de cos, cal que es compleixin la propietat commutativa i la propietat de l'existència de la unitat. També s'ha de verificar la propietat de l'existència de l'oposat per la multiplicació: Aquestes propietats son les següents:

- Propietat de la clausura:

$x \cdot y \in K \quad \forall\, x , y \in K$

- Propietat associativa:

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall\, x, y, z \in K$

- Propietat commutativa:

$x \cdot y = y \cdot x \quad \forall\, x\,,\, y \in K$

- Propietat de l'existència de la unitat:

$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \forall\, x,\, 1 \in K$

- Propietat de l'existència de l'invers: Molt semblant a la propietat de l'existència del simètric en les estructures de grup. L'única cosa que canvia és que en aquesta propietat, l'operació és una multiplicació. L'element invers es representa x-1:

$x \cdot x\text{-}1 = x\text{-}1 \cdot x = 1 \quad \forall\, x,\, x \neq 0 \in K \text{ i } \exists\, x\text{-}1 \in K$

No ens hem d'oblidar de la propietat que relaciona les dues lleis. Aquesta propietat és la propietat distributiva, i els anells també tenen aquesta propietat:

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall\, x,\, y,\, z \in K$

$(y \cdot z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \quad \forall\, x,\, y,\, z \in K$

En el cas que el conjunt K compleixi totes les propietats anteriors, llevat de la propietat commutativa respecte a la multiplicació, direm que el conjunt K simplement forma una estructura de cos.

Si el conjunt K compleix totes les propietats esmentades anteriorment, podrem dir que el conjunt K forma una estructura de cos commutatiu.

ESTRUCTURA D'ESPAI VECTORIAL: Prenem E ≡ {V, V', V'', ...}, com un conjunt que tindrà estructura de grup additiu abelià i suposem que es compleix una igualtat entre els seus elements. Prenem K ≡ { α, β, γ, ...} com un altre conjunt amb estructura de cos.

Si apliquem una llei de composició externa al conjunt E que faci correspondre un element del conjunt E amb un del conjunt K, per parelles, (α,V), direm que el conjunt E forma una estructura d'espai vectorial, és a dir, que el conjunt E és un espai vectorial sobre el cos K.

Els elements que formen el conjunt E s'anomenen vectors.

A causa que aquest tipus d'estructura algebraica és molt complex i necessita complir moltes lleis o propietats, es divideixen les propietats per blocs depenent del conjunt, grup o llei al qual s'apliquen.

El primer bloc pertany a les propietats del grup additiu abelià del conjunt E:

- Propietat de clausura:

$V + V' \in E \quad \forall\, V\,,V' \in E$

- Propietat associativa:

$(V + V') + V'' = V + (V' + V'') \quad \forall\, V\,,V',\, V'' \in E$

- Propietat commutativa:

$V + V' = V' + V \quad \forall V, V' \in E$

- Propietat de l'existència de l'element neutre:

$V + 0 = 0 + V = V \quad \forall V, 0 \in E$

- Propietat de l'existència de l'element simètric:

$V + (-V) = (-V) + V = O \quad \forall V, (-V) \in E$

Les propietats del segon bloc són les que determinen l'estructura de cos del grup K:

Per començar trobem les propietats del grup abelià:

- Propietat de la clausura:

$x + y \in K \quad \forall x, y \in K$

- Propietat associativa:

$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in K$

- Propietat de l'existència del zero.

$x + 0 = 0 + x = x \quad \forall x, 0 \in K$

- Propietat de l'existència de l'oposat:

$x + (-x) = (-x) + x = 0 \quad \forall x, (-x) \in K$

- Propietat de commutativa:

$x + y = y + x \quad \forall x, y \in K$

Seguidament trobem les propietats de la multiplicació:

- Propietat de la clausura:

$x \cdot y \in K \quad \forall x, y \in K$

- Propietat associativa:

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in K$

- Propietat commutativa:

$x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in K$

- Propietat de l'existència de la unitat:

$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \forall x, 1 \in K$

- Propietat de l'existència de l'invers:

$x \cdot x\text{-}1 = x\text{-}1 \cdot x = 1 \quad \forall x, x \neq 0 \in K \text{ i } \exists x\text{-}1 \in K$

I finalment la propietat que relaciona les dues lleis:

- Propietat distributiva:

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall\, x, y, z \in K$

$(y \cdot z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \quad \forall\, x, y, z \in K$

Com a tercer i últim bloc de propietats, trobem les que estan relacionades amb la llei externa, la multiplicació:

- Propietat de clausura:

$\alpha \cdot V \in E \quad \forall\, \alpha, V \in K$

- Propietat distributiva:

$\alpha \cdot (V + V') = \alpha \cdot V + \alpha \cdot V' \quad \forall\, \alpha, V, V' \in K$

$(\alpha \cdot \beta) \cdot V = \alpha \cdot V + \beta \cdot V \quad \forall\, \alpha, \beta, V \in K$

- Propietat associativa:

$(\alpha \cdot \beta) \cdot V = \alpha \cdot (\beta \cdot V) = \beta \cdot (\alpha \cdot V) \quad \forall\, \alpha, \beta, V \in K$

- L'element unitat de K és neutre:

$1 \cdot V = V \quad \forall\, V \in K$

En apartats anteriors, he estudiat tots els possibles moviments dels vèrtexs d'un cub, que aparentment el deixen invariable.

Per una banda m'he adonat que hi ha 24 moviments, que són els que pertanyen al conjunt de moviments giratoris, que formen un conjunt tancat.

Per altra banda, el conjunt de 8 moviments simètrics, no formen un conjunt tancat.

Per tant, prendré el conjunt dels moviments giratoris (que l'expressarem com a M) ja que és un conjunt tancat, i l'estudiaré per intentar trobar quina estructura algebraica forma.

Coneixem quatre tipus d'estructura diferents, i es pot veure que totes parteixen de l'estructura de grup, per tant començaré per veure si forma estructura de grup i després aniré continuant amb l'estudi.

En primer lloc, com he dit anteriorment, caldrà comprovar si es compleixen les propietats d'estructura de grup.

Després d'un seguit d'operacions i comprovacions he pogut demostrar que les quatre propietats es compleixen, per tant es pot afirmar que es tracta d'una estructura de grup.

En segon lloc, és necessari comprovar si es tracta d'un Grup Commutatiu o Abelià i, en veure que la propietat commutativa no es compleix, no podrem dir que el conjunt de moviments giratoris que deixen el cub visiblement invariat és un grup Abelià o Commutatiu però sí podem dir que es tracta d'una estructura de grup.

El cub en l'art i en l'arquitectura

Deixant de banda les matemàtiques i entrant en la nostra societat, he pogut observar que el cub és un objecte i una forma molt utilitzada en la nostra societat, ja sigui en l'art o en l'arquitectura.

Referint-me a l'art, trobem el cubisme, que va ser un moviment artístic que es va desenvolupar entre el 1907 i el 1914. Va néixer a França propulsat per Pablo Picasso, Georges Braque i Juan Gris. Va ser una tendència essencial ja que va donar peu a la resta d'avantguardes europees del segle XX. No es tracta d'un moviment artístic més, sinó que es tracta de la ruptura definitiva amb la pintura tradicional.

El cubisme és considerat la primera avantguarda, ja que va trencar amb l'últim estatut renaixentista a principis del segle XX: la perspectiva. En els quadres cubistes, desapareix la perspectiva tradicional, tracta les formes de la naturalesa mitjançant figures geomètriques, línies i superfícies. D'aquesta manera s'aconsegueix la perspectiva múltiple: es representen totes les parts d'un objecte en un mateix pla. Deixa d'existir un punt de vista únic, desapareix la sensació de profunditat, s'eliminen els detalls... Una altra característica molt comuna del cubisme és que s'utilitzaven tons apagats, com poden ser els tons grisosos, verds i marrons. Les obres resultants del cubisme són difícils d'entendre per no tenir un referent naturalista, d'aquesta manera, va iniciar una etapa en què, després d'una obra d'art, l'artista havia d'explicar el que representava la seva obra per tal que el públic la pogués entendre.

Un altre autor reconegut, en aquest cas, pels seus gravats, litografies i il•lustracions a tinta és Maurits Cornelis Escher. Artista dels Països Baixos que representava construccions impossibles, exploracions de l'infinit i tessel•les.

Escher, el relaciono en el món de l'art i l'arquitectura del cub, ja que va inventar el cub d'Escher (The Escher's Cube), també conegut com el Cub Impossible. Se l'anomena impossible ja que la perspectiva que hi dóna no lliga amb la forma que representa i sembla impossible de representar-lo en forma 3D, però és possible.

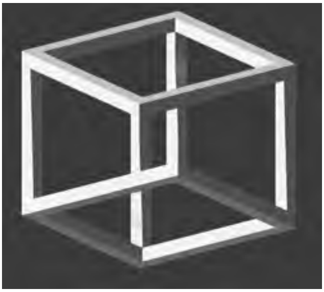
Quan es parla del cub en el món arquitectònic, podem pensar que el cub és un element molt comú, però no tots els arquitectes pensen el mateix, i cada un es relaciona amb unes estructures i unes formes determinades.

A causa de la varietat a l'hora de treballar per part dels arquitectes, em vaig reunir amb un que actualment, està en fase de construcció d'un habitatge en forma de cub, i vaig aprofitar per fer-li una entrevista. Arnau Vergés em va deixar entendre que les matemàtiques estan molt presents en el món de l'arquitectura i són essencials per tal de poder construir una bona vivenda o edifici. Actualment està construint una vivenda que aparentment té forma de cub, però per problemes de normativa no es tracta d'un cub perfecte. Segons l'arquitecte, la vivenda està basada en una poma mossegada vista des del moviment del cubisme, ja que es tracta d'un cub foradat per les arestes.

El cub de Rubik

El Cub de Rubik original de 3x3 és el desafiament més addictiu multidimensional que ha fascinat als fans del puzle d'arreu des que el creador Ernö Rubik el va portar al món el 1980.

Tres dècades més tard, el Cub de Rubik encara és un dels trencaclosques més venuts. Amb 43 quintilions de possibles moviments i únicament una solució. L'algorisme de Déu és la solució que resol el puzle amb el mínim de moviments possibles. Una vuitena part de la població del món ha posat les seves mans en "el Cub".



El Cub de Rubik està format per sis cares amb una disposició de 3x3 cubs petits, en el qual cada cara està pintada d'un color. L'objectiu consisteix a barrejar el cub i finalment obtenir-lo resolt novament amb cada cara d'un color a partir de combinacions.

Ernö Rubik i la història del seu cub:

Ernö Rubik va néixer a Budapest, Hongria, l'any 1944 durant la Segona Guerra Mundial. El seu pare era un enginyer mecànic molt reconegut especialitzat en la construcció d'avionetes. La seva mare estava especialitzada en lletres. Era poetessa i artista.

El 1970, Rubik es va introduir en el món de la docència: ensenyament de plans i construccions, dissenys d'arquitectura interior, plans i projectes de mobles, estudis de forma i geometria descriptiva a l'Escola Superior.

Rubik tenia un gran interès per la geometria, en contret, en l'estudi de formes en 3D en les seves construccions. També es dedicava a trobar les possibles combinacions i materials per a construir formes geomètriques. Aquesta investigació no només es donava a nivell teòric, sinó també a nivell pràctic.

La principal atracció d'Ernö per inventar el Cub no va ser el descobriment del puzle. El que realment va fer moure Ernö per construir el cub va ser la següent pregunta: "Com podrien moure's els cubs independentment l'un de l'altre sense caure?" El cub de Rubik està compost per vint-i-sis cubs petits individuals. Cada cara compta amb nou cubs petits que es poden barrejar i les cares poden quedar superposades. Qualsevol dels tres costats d'una fila, excepte diagonalment, poden moure's a una altra cara. El primer intent de Rubik, utilitzant gomes elàstiques va fallar. La seva solució va ser mantenir els petits cubs units entre ells

aprofitant la forma cúbica del puzle. Va marcar cada cara gran del Cub amb papers adhesius de diferents colors i el va començar a barrejar.

“Va ser meravellós veure com, després d’alguns girs, els colors esdevenien barrejats, aparentment de forma aleatòria. Va ser tremendament satisfactori veure aquella desfilada de colors. Igual que després d’una agradable caminada quan has pogut gaudir de vistes molt boniques i decideixes tornar a casa. Uns minuts més tard, vaig decidir tornar, i posar de nou cada cub petit al seu lloc. I va ser llavors quan em vaig trobar enfrontat amb el Cub. El gran repte, en aquell moment, va ser: Quin és el camí de tornada?” – Ernö Rubik.

Així va ser inventat el Cub com a puzle la primavera del 1974, quan el jove de vint-i-nou anys va descobrir que no era tan fàcil de reordenar els colors en sis cares unicolors. No estava segur de ser capaç de tornar el seu invent a la seva posició original. Creia que, en haver desordenat el Cub de manera aleatòria, mai no seria capaç de reordenar-lo en el que li quedava de vida. Va començar a treballar per trobar una solució, començant alineant els vuit cubs de les cantonades. D’aquesta manera, en menys d’un mes va tenir el puzle solucionat.

El primer Cub Màgic (conegut per nosaltres com el Cub de Rubik) es va vendre en una botiga de joguines de Budapest i, a causa de la seva ràpida venda, es va estendre a gran velocitat arreu del país.

El 5 de Juny del 1982 va tenir lloc el primer campionat internacional del Cub de Rubik a Budapest, on s’hi van presentar 19 cubistes de diferents nacionalitats. Els competidors tenien la possibilitat d’observar el cub durant 15 segons abans de començar-lo a resoldre.

Els tres guanyadors i les seves respectives marques d’aquest campionat van ser:

1. Minh Thai (Estats Units) 22.95 s
2. Razoux Schultz (Noruega) 24.32 s
3. Zoltán Lábas (Hungia) 24.49 s

Patents i variants:

El Març del 1970, Harry D. Nichols va inventar un Puzle de 2x2x2 amb peces que podien moure’s rotativament per grups i en va obtenir una patent canadenca. El cub d’en Nichols estava construït per peces magnètiques. Més tard, l’abril de l’any 1972, Nichols va obtenir una patent dels Estats Units pel seu invent.

El 9 d'abril del 1970, Frank Fox va inventar un puzle esfèric de 3x3x3, i en va obtenir la patent del Regne Unit quatre anys més tard, tot i que va ser abans que Ernö Rubik.

Rubik va inventar el "Cub Màgic" el 1974 i en va obtenir la patent d'Hongria el 1975, però no la patent internacional. Ernö va fer arribar el seu invent a una petita fàbrica de joguines de Budapest. El "Cub Màgic" estava compost per peces de plàstic entreposades, cosa que era menys car de produir que el disseny magnètic de Nichols, per això va tenir més èxit.

Es coneixen un gran nombre de variants del Cub de Rubik, amb no tant èxit, però també reconeguts per la societat. Alguns d'aquests puzles derivats del Cub són els següents:

- Rubik's 360º
- Rubik's Mini Cube (2x2)
- Rubik's Revenge (4x4)
- Rubik's Professors Cube (5x5)
- V-cube 6 (6x6)
- V-cube 7 (7x7)
- Rubik's Mirror
- Rubik's Twist
- Pyraminx, megaminx
- Cuboku
- Rubik's magic
- Rubik's keychain (clauer)
- Rubik's slide
- Rubik's touch
- Rubik's revolution

Campionats oficials:

Els cubistes, són aquelles persones que es dediquen a anar a competicions per tal d'obtenir rècords i bones marques a l'hora de resoldre el Cub de Rubik i les seves variants més comunes.

Hi ha diverses competicions del Cub de Rubik, depenent de la importància dels temps.

- Opens: Campionats que es fan cada any a diferents ciutats d'arreu del món. Els cubistes més seguidors van a diversos d'aquests Opens, per tal d'intentar aconseguir marques més favorables i poder entrar a campionats de major importància.

- Campionats Nacionals: Competicions anuals, que es fan als països més importants mundialment, com poden ser Londres, Estats Units, Xina...

- Campionats Europeus: Competicions que es celebren cada dos anys, on hi participen els cubistes que han tret millors temps en els Campionats Nacionals.

- Campionats Mundials: Competicions que es celebren cada dos anys, i on competeixen els millors cubistes dels Campionats Europeus. Cada competició es celebra en una ciutat diferent, però sempre a les més importants a nivell mundial.

Algorismes de resolució:

Com he dit a l'inici del treball, un dels meus objectius és escriure un manual d'instruccions per a totes aquelles persones que desitgin resoldre el cub.

Per poder escriure aquest manual, és necessari aprendre la notació utilitzada per poder realitzar els moviments correctes explicats al llarg del manual.

Hi ha diversos mètodes a seguir per resoldre el cub, però en el meu treball només hi ha explicats tres mètodes, que són els que considero més importants i habituals:

- Mètode per a principiants
- Mètode per a experts (Fridrich)
- Mètode a cegues (Blindfolded)

Cada un dels respectius mètodes necessiten una notació diferent ja que els graus de complexitat van augmentant i, per tant, els moviments també són més complexos.

Conclusions:

Vaig començar aquest treball amb l'objectiu principal d'elaborar un manual d'instruccions per resoldre el Cub de Rubik. En començar a buscar informació, vaig trobar que hi ha més d'un mètode per resoldre el cub, depenent del nivell d'experiència de cada persona, i la manera de voler-lo resoldre: principiant, experts (fridrich) i a cegues (blindfold). Per això, finalment he explicat els tres mètodes diferents, amb la seva corresponent notació.

Previ a l'elaboració del manual, he hagut de buscar informacions referents al cub elemental, entre d'altres: els seus desplegaments, els nombres reals que s'hi poden trobar, els moviments giratoris i simetries, el tipus d'estructura algebraica que forma i com intervé en l'art i l'arquitectura.

Buscar tots aquests apartats m'ha portat hores de treball, però també m'ha aportat una gran quantitat de coneixements que no tenia i que realment he trobat molt enriquidors.

Alguns dels apartats esmentats anteriorment, contenen un elevat nivell matemàtic, i per això, he necessitat l'ajuda del professor de matemàtiques, Gabriel Plana, que, amb algunes hores extra, m'ha posat al corrent de nous conceptes. També ho he completat amb l'ajuda de llibres i pàgines d'internet. Tot i així, el meu treball és molt pràctic i la major part consta de comprovacions matemàtiques. Això ha portat que, a l'hora de redactar, he hagut de tenir en compte que no tots els lectors del treball tindran un nivell de matemàtiques.

També he tingut l'ajuda de l'arquitecte Arnau Vergés, que m'ha permès veure en quin sentit el cub està implicat en l'arquitectura actual. I la veritat és que he vist que realment és una forma geomètrica molt comuna en les construccions.

Agraïments:

No voldria acabar aquest treball sense esmentar el meu agraïment a totes aquelles persones que m'han ajudat d'una manera o altra.

En primer lloc, al meu assessor del treball i professor de matemàtiques, Gabriel Plana, per totes aquelles hores que ha dedicat a explicar-me conceptes matemàtics que eren imprescindibles per al treball i jo no coneixia; també per tota la paciència que m'ha dedicat, revisant-me el treball i corregint els errors que havia comès.

Seguidament, a la meva família: Als meus pares i al meu germà per tot el suport moral que m'han donat en tot moment, per haver-me ajudat en algun aspecte del treball i especialment a la meva cosina Núria Matabosch, per haver-me ajudat en el redactat d'alguna part del treball.

També vull agrair el temps que m'ha dedicat l'arquitecte Sr. Arnau Vergés, explicant-me els seus projectes, responent-me a les preguntes que li vaig fer i proporcionant-me diversa informació.

Finalment, a les meves amigues pel suport que m'han donat en tot moment, a totes aquelles persones que m'han cedit diferents Cubs de Rubik i que s'han posat a la meva disposició per ajudar-me amb el treball, i a la gent del Club de Rubik a Catalunya.