

construint matemàtiques

Construïm geometria!

Anton Aubanell

Per intentar objectivar la realitat educativa, fins al punt que això sigui possible i sense menystenir la importància dels estudis de casos, sembla fonamental la recerca d'eines que ho facilitin. La quantificació en la descripció dels fenòmens naturals i socials ha estat un avenç gens fàcil i, en termes relatius, força recent. La mesura (en un sentit ampli) d'una realitat és el primer pas per poder conèixer-la i, si cal, modificar-la. És cert que els instruments i les unitats de mesura condicionen sovint el resultat de l'amidament (en un pla diferent, però ben proper a l'aula, no voldria deixar de recomanar el vídeo *La longitud depèn de la unitat amb què es mesura* que els estudiants de l'institut Martí l'Humà de Montblanc, sota la direcció del professor Ramon Bergadà, varen presentar al vídeoMat 2014) i això encara és més notable quan es tracta de mesurar aspectes complexos com és el cas de la competència de l'alumnat. Tanmateix una avaluació objectiva s'ha de fonamentar necessàriament en dades quantitatives, en mesures. L'avaluació és un art complicat, però imprescindible.

El mes d'abril passat, el Departament d'Ensenyament va fer públics els resultats de les proves d'avaluació de l'educació secundària obligatòria corresponents a l'any 2015, aplicades a l'alumnat de quart d'ESO. Entre les competències avaluades en aquestes proves, hi ha la competència matemàtica, que s'articula en quatre blocs: numeració i càlcul; espai, forma i mesura; canvi i relacions, i estadística. Tant per al global de la matèria com per a cadascun dels quatre blocs s'aporten dos tipus de dades:

- Les puntuacions mitjanes sobre 100 dels resultats obtinguts.
- Els percentatges d'alumnes agrupats en quatre trams segons les puntuacions obtingudes: nivell baix, nivell mitjà-baix, nivell mitjà-alt i nivell alt. El nivell baix mostra el percentatge d'alumnes que no assoleixen la competència.

La taula 1 presenta els resultats obtinguts tot assenyalant les dades corresponents al bloc geomètric (espai, forma i mesura) que criden especialment l'atenció:

Bloc avaluat	Percentatge d'alumnat amb nivell d'assoliment...				Mitjana
	...baix	...mitjà-baix	...mitjà-alt	...alt	
Global	15,7	24,6	30,9	28,8	68,7
Numeració i càlcul	15,3	22,1	38,1	24,5	72,5
Espai, forma i mesura	41,3	26,3	17,9	14,5	52,2
Canvi i relacions	18,0	23,3	32,3	26,4	66,6
Estadística	12,5	25,8	35,5	26,2	75,8

Taula 1

Aquests resultats posen en evidència, d'una manera molt clara, una dificultat important en el bloc d'espai, forma i mesura. La mitjana de 52,2 punts és, de molt, la més baixa dels quatre blocs avaluats, el 41,3% d'alumnat mostra un nivell d'assoliment baix (un percentatge molt per sobre del 15,7% d'alumnat que presenta un nivell d'assoliment baix en el global de la matèria) i tan sols el 14,5% d'alumnat mostra un nivell d'assoliment alt (més de 14 punts percentuals per sota del 28,8% que mostra un nivell d'assoliment alt en el global de la matèria).

Malauradament, aquestes dades segueixen (i accentuen) la mateixa tendència que ja s'observava en els resultats de les proves d'avaluació dels anys 2014 i 2013 i deixen també una traça clarament observable en els de les proves PISA 2012 i 2003 que varen avaluar prioritàriament l'àmbit matemàtic. Es pot ampliar aquesta informació estadística en els documents del web del Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu.

La rotunditat i la persistència d'aquestes dades difícilment poden ser atribuïdes a biaixos incidentals. L'evidència quantitativa i el seu manteniment en el temps deixen pocs dubtes sobre el fet que ens trobem davant d'una dificultat important en l'ensenyament de la geometria a secundària que necessàriament ens ha de portar a fer una reflexió sobre les causes i les possibles línies de millora. En aquest sentit, el Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu del Departament d'Ensenyament ha publicat el document «Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria»,¹¹ que s'amplia, pel que fa a les propostes concretes, en l'espai web <http://www.xtec.cat/web/curriculum/eso/orientacionsgeometria>. Qui signa aquesta secció ha tingut l'oportunitat de treballar en aquests documents que tenen la voluntat de plantejar una reflexió oberta i compromesa sobre la presència i el tractament de la geometria en la nostra educació secundària i de poder ser útil al professorat en les seves classes. Cal assenyalar que les observacions que contenen aquests documents, així com moltes de les propostes que s'hi presenten, permeten lectures adaptades a l'etapa de primària. El treball té dues parts:

- Una primera part en la qual es fa una anàlisi de possibles causes i es plantegen possibles línies de solució.

11. Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu, Departament d'Ensenyament (2015), Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria, *Quaderns d'Avaluació*, 31, abril, disponible a http://csda.gencat.cat/ca/arees_d_actuacio/publicacions/quaderns_avaluacio/Quaderns-davaluacio-31.

- Una segona part en la qual es desenvolupen aquestes línies de solució mitjançant reflexions específiques i, sobretot, proposant activitats concretes per portar a l'aula. Es proposen seixanta activitats, trenta de les quals estan descrites amb molt detall.

A continuació intentarem fer una síntesi d'aquest document tot posant una atenció especial en les propostes pràctiques.

Entre les causes de la dificultat que s'observa en geometria, s'assenyala un desequilibri en la implementació pràctica del currículum. El temps escolar és un bé preuat i limitat. Quan dediquem un temps desproporcionat a una part de la matèria, necessàriament n'estem sacrificant una altra. Sovint s'ha donat molt més temps a la numeració i al càlcul (aritmètic i algebraic) que a la geometria i l'estadística. Més enllà de la pràctica d'aula, aquest és un fet observable en no pocs llibres de text que deixen aquests blocs en una posició de segon ordre amb poc espai i al final. Un grup de mestres i professorat de Girona titulava «Estadística, tema 13» un taller d'estadística i probabilitat adreçat a docents. Probablement, la geometria s'ha ressentit més que l'estadística d'aquests desequilibris. Potser començar per diversos blocs curriculars els diferents cursos de l'ESO podria evitar-ho, tal com es proposa en el nou currículum de matemàtiques del Departament d'Ensenyament.

Sovint, la manca de temps ha provocat que el professorat hagués de fer un enfocament de la geometria molt centrat en el reconeixement de formes i l'aplicació de fórmules per al càlcul de longituds, àrees i volums. Potser una presentació més experimental de la geometria plantejant situacions més obertes que comportin exploració, amb materials i amb programes de geometria dinàmica, percepció espacial i raonament visual, moviment, orientació, ubicació, construcció, connexió... resultaria més motivadora i aportaria més benefici educatiu. En aquest sentit, el document que comentem fa propostes en dues vessants: respecte al treball dins dels blocs geomètrics (mesura i espai i forma) i respecte a la presència de la geometria dins dels blocs no estrictament geomètrics (numeració i càlcul, canvi i relacions i estadística i atzar).

Pel que fa al treball dins dels blocs geomètrics, es proposa avançar en quatre direccions:

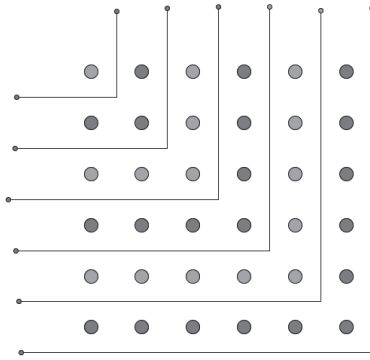
- **Impulsar la presència en les classes d'activitats que permetin viure, en primera persona, l'experiència de construir coneixement geomètric.** Entre aquestes activitats, poden ser especialment útils les que comporten quatre etapes sobre les quals no insistirem perquè ja han estat objecte d'un altre comentari en aquesta secció: experimentació, descoberta, conceptualització i formalització o demostració (si cal!). Una metodologia d'aquest tipus és un marc idoni per treballar, per exemple, la proporcionalitat geomètrica (teorema de Tales), la suma d'angles d'un triangle, les propietats mètriques de triangles rectangles (teoremes de Pitàgores, de l'altura i del catet), el teorema de Viviani...
- **Emprar més material manipulable en l'ensenyament de la geometria.** Per subratllar la importància d'aquesta mena de recurs, manllevem les paraules de Pere Puig Adam al pròleg del seu llibre *Geometria intuïtiva* (Madrid, 1928): «Aquí et presentem, estimat lector, els qui han de ser els teus companys de treball: unes tisores, un cabdell, un regle, un parell d'escaires, un piló molt gran de fulls de paper. Ni un sol dia has de començar la lliçó de geometria sense tenir al costat aquests teus bons companys, ni acabar d'estudiar-la sense deixar la teva taula materialment plena de retalls i de papers amb

figures...». Actualment, disposem d'una esplèndida oferta de materials que poden ser molt útils: des dels clàssics geoplans, tangrams, models de fusta o de plàstic (alguns per omplir d'aigua)... fins als coneguts Lokon, Polydron, Creator..., o els més moderns Zometool, Geomag, Polydron magnètic... Tanmateix els millors materials sempre seran els que cada mestre es vagi construint o convidi a construir els seus alumnes. El professorat de tecnologia pot ser un magnífic aliat en aquesta tasca tot generant sinergies entre les dues matèries.

- **Donar més presència al GeoGebra o a altres programes de geometria dinàmica.** Tenim la fortuna de comptar amb una Associació Catalana del GeoGebra molt activa que està treballant de ferm per aconseguir més presència d'aquesta eina en les classes de matemàtiques en general i de geometria en particular. Les facilitats que ofereix per a fer construccions de figures geomètriques i exploracions dinàmiques són una invitació inajornable a repensar a fons no tan sols la metodologia, sinó també els continguts que es treballen a classe de geometria. Aquí és obligat citar una joia de les construccions gràfiques amb GeoGebra: Euclid: The Game. Es tracta d'una mena de joc que planteja successives construccions gràfiques amb regla i compàs. S'inicia l'aventura amb un menú d'eines molt petit que es va augmentant a mesura que es van passant nivells, fent les construccions reptes que es proposen. Així, de mica en mica, es va construint l'edifici de la geometria euclidiana... com si res! Tot un tresor: <http://euclidthegame.com/>
- **Cercar un major suport dels contextos.** La geometria ens envolta i cal aprofitar totes les oportunitats possibles per descobrir-la i explorar-la: un objecte material (des d'un llapis fins a un envàs, des d'una llauna de beguda fins a un mosaic), un espai de l'escola (des d'un arbre del pati fins a les línies del camp de bàsquet, des d'un plànol fins a un passadís), l'entorn quotidià de l'alumnat (la col·lecció permanent del vídeoMat, http://www.videomat.cat/?page_id=435, conté abundants exemples d'activitats escolars d'aquesta mena)... Els concursos de fotografia matemàtica també són una invitació a la mirada matemàtica i, en molts casos, a descobrir geometria.

Malgrat que hi ha uns blocs curriculars de caire més geomètric, es pot fer geometria quan es treballa qualsevol dels altres blocs. La matemàtica té un cos de coneixement únic que a vegades es compartimenta artificialment. Cada cop, entre el professorat de matemàtiques, és més compartit el criteri que hauríem de cercar el major nombre possible de connexions internes (sigui treballant projectes transversals, sigui fent referències creuades, sigui programant en espiral...). La integració d'activitats de caire geomètric quan es treballen els blocs de numeració i càlcul, de canvi i relacions i d'estadística i atzar obre suggeridores oportunitats d'enllaç que, d'una banda, estenen la presència de la geometria i, de l'altra, aporten la potència didàctica de la interpretació gràfica i la visualització. Al document que comentem hi ha moltes propostes en aquest sentit, com les que s'assenyalen a continuació:

- Els nombres figurats i les seves propietats són un punt de trobada entre la numeració i el càlcul i la geometria. Les demostracions geomètriques de propietats aritmètiques són tan elegants com didàcticament potents. En la figura 1 sobren paraules:



$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Figura 1

- Descobrir i expressar algebraicament els patrons de construcció de figures geomètriques és una activitat molt bonica per treballar el llenguatge simbòlic i per introduir les successions i les relacions funcionals. Dos exemples:

— *Patrons en figures policúbiques:* donada una sèrie de figures policúbiques com les de la figura 2, esbrinar el nombre de cubets que les formen en funció d'un paràmetre com, en aquest cas, l'alçada de la torre.

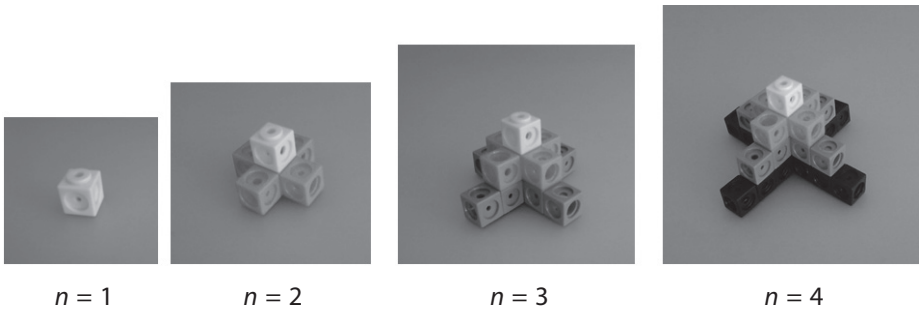


Figura 2

— *Patrons en estructures:* donada una estructura de «tubs i connectors» com les de la figura 3, trobar l'expressió del nombre de tubs i la del nombre de connectors en funció del nombre de tubs de la base.

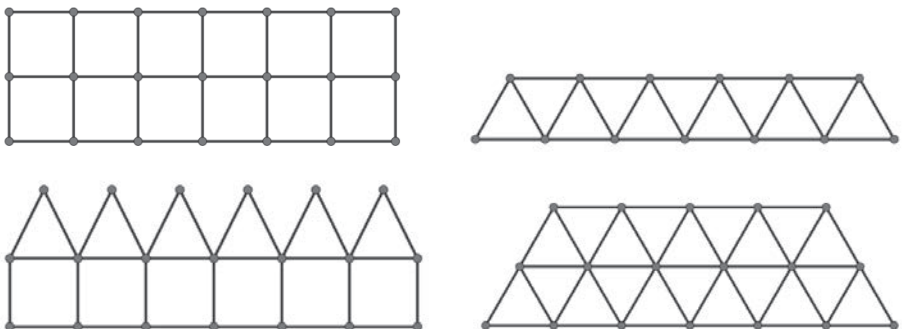


Figura 3

- Deducir, amb criteris geomètrics, la probabilitat que una moneda llançada sobre determinades trames (figura 4) toqui o no una línia.

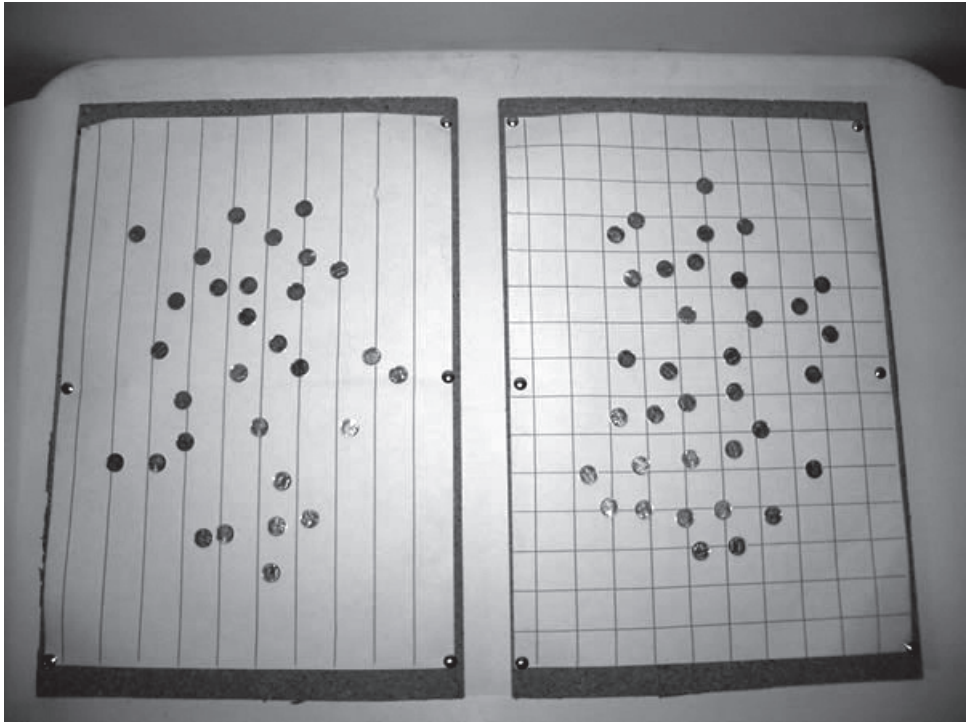


Figura 4

Cadascuna de les activitats que s'han esmentat tant per treballar més experimentalment els blocs d'espai i forma i de mesura com per integrar geometria en els altres blocs curriculars està descrita (algunes molt àmpliament) en l'espai web de la XTEC que ja ha estat referenciat: <http://www.xtec.cat/web/curriculum/eso/orientacionsgeometria>.

Malgrat que el treball que es comenta està especialment adreçat a l'etapa de secundària, les idees generals que s'exposen i les possibles línies de millora que s'apunten són aplicables a l'educació primària. Així mateix, moltes de les propostes concretes que es fan permeten lectures ben adients per a aquesta etapa; sempre és la mirada del mestre la que adapta el recurs, perquè, afortunadament, les fronteres entre etapes són més difuses del que a vegades es dibuixa.

Els resultats que comentàvem a l'inici d'aquest escrit i la pròpia pràctica professional ens plantegen un repte seriós al qual cal respondre repensant a fons la presència de la geometria (tant pel que fa als continguts com a la metodologia) en totes les etapes educatives, donant-li un caràcter més experimental i funcional i integrant-la en tots els blocs curriculars. Això, d'un costat, permetria construir coneixement directament aplicable a la realitat més propera a l'alumne i, de l'altre, contribuiria a desenvolupar qualitats molt genuïnes del pensament matemàtic com la percepció espacial o el raonament visual en fer deduccions sobre figures geomètriques.

No es tracta d'un repte fàcil. Calen canvis i els canvis sempre provoquen incerteses. Però hi ha molta feina feta des de l'esforç i la creativitat de molts mestres i professors: les activitats de l'ARC (Aplicació de Recursos al Currículum) en són una mostra. Tant de bo que el document i les propostes que hem comentat puguin contribuir a aquest esforç per fer possible una millora de l'aprenentatge d'idees i d'habilitats geomètriques per part dels alumnes i, en definitiva, un desenvolupament més sòlid de la seva competència matemàtica.

Voldria agrair al Departament d'Ensenyament que hagi impulsat la realització i la difusió d'aquest treball i voldria agrair també la col·laboració de la Iolanda Guevara, en Sergi Muria i en Lluís Mora en la revisió d'aquests materials que desitjàriem que poguessin ser útils a mestres i professorat en la seva tasca de construir matemàtiques!

