Bones activitats per a la transició entre primària i secundària

David Barba Uriach
Facultat d'Educació. Universitat Autònoma de Barcelona
davidbarbauriach@gmail.com
Cecilia Calvo Pesce
Escola Sadako
ccalvopesce@gmail.com

Resum

En aquest article proposem tres activitats que creiem que poden servir de model de treball a l'aula per ajudar els alumnes en el seu aprenentatge de les matemàtiques durant la transició entre aquestes dues etapes de l'ensenyament obligatori. Aquestes activitats promouen la resolució de problemes, la cerca de patrons i regularitats i el treball sistemàtic com a valors fonamentals per a aprendre matemàtiques.

Abstract

In this article we suggest three activities that we believe could serve as a model for mathematics classes for pupils making the transition between the two key stages of compulsory education. The activities promote problem solving, the recognition of patterns and order and systematic work as the basis for learning mathematics.

Introducció

Creiem que, per ajudar els alumnes en el seu aprenentatge de les matemàtiques durant la transició entre el cicle superior de primària i el primer cicle de l'ESO, no es tracta tant de posar l'atenció en aquest contingut o en aquell altre com de donar als alumnes d'aquestes dues etapes oportunitats de desenvolupar processos que els apropin a un veritable treball matemàtic a l'aula. Aquestes oportunitats s'han de brindar en tot moment, des de la introducció dels conceptes fins a l'avaluació, però creiem que són principalment importants en les moltes estones dedicades a la pràctica de mecàniques. El motiu pel qual destaquem aquest moment de les classes de matemàtiques és la preocupant afirmació de Jesús Goñi (2000): «No es nada exagerado afirmar que más del 75% del tiempo escolar se reduce al entrenamiento de los alumnos en la aplicación mecánica de los algoritmos».

Tres característiques fonamentals del tipus de feina que proposem durant les estones de classe dedicada a la pràctica de mecàniques són:

- *La resolució de problemes com a ambient*. En Van den Heuvel-Panhuizen (2001) trobem la noció de «pràctica productiva» que creiem que recull l'essència del que volem dir: la necessària pràctica de mecàniques que han de dur a terme els alumnes per automatitzar-les i poder aplicar-les en situacions de veritable interès matemàtic es pot fer d'una manera reproductiva (com la que hem vist milers de cops en llibres de text o en quaderns d'exercitació clàssics) o envoltada d'una finalitat més enllà de la mera pràctica.
- *La cerca de patrons i regularitats*. En reiterades oportunitats, en Burgués i Sarramona (2013) es destaca la importància que els alumnes actuïn a l'aula com a veritables detectius matemàtics: identifiquin patrons, facin conjectures i les rebatin o justifiquin.
- *El costum de treballar d'una manera sistemàtica*. Aquesta manera de treballar intrínsecament lligada a la feina del matemàtic, però útil per a la resolució de qualsevol tipus de problema al qual hem de fer front, ha de ser apresa (Woodham, 2013) i hi ha moltes activitats que podem proposar en les nostres classes que tenen aquest treball sistemàtic com a objectiu explícit.

Per exemplificar el tipus de treball al qual fem referència, comentarem tres activitats que poden ser proposades tant a finals de primària com a principi de l'ESO en les quals es promou. Però, abans d'entrar en la descripció d'aquests exemples, cal dir que l'ajuda als alumnes en la transició no pot acabar en la tria d'unes bones tasques, sinó que hem de considerar l'actitud del mestre (sigui de primària o de secundària) durant la seva proposta. Es necessita un professor que convidi els seus alumnes a treballar d'una manera plena, que els animi amb preguntes adequades, que sigui capaç de modificar el seu pla de classe quan una intervenció d'un alumne ho fa recomanable i que els organitzi en el moment de comunicar i discutir les troballes. El gran problema d'aquesta demanda cap al docent és que, mentre que la tria de l'activitat entra dintre de la planificació, l'atenció de la contingència després que l'activitat és proposada no pot ser planificada i requereix un professor flexible i ben preparat (Rowland, 2006).

Activitat 1. Cadena de divisors

Si comparem aquestes tres tasques: digues si 7 és divisor de 28, digues alguns divisors de 36, digues tots els divisors de 60, veiem que, mentre que per executar la primera tasca solament cal entendre la definició de divisor, per a la segona posem en joc l'ús de propietats (per exemple: tots els nombres són divisibles entre 1, si a és un divisor de b llavors b/a és també un divisor de b, etc.) i per a l'última necessitem donar un pas endavant en el tipus de treball que posem en joc (com ens ho farem per a no deixar-nos cap divisor?). Aquesta sofisticació en la demanda de cada tasca és molt important plantejar-la gradualment i creiem oportú proposar-la als alumnes amb freqüència i des que són petits. Aquesta exercitació, en el cas de trobar tots els divisors d'un nombre, s'acostuma a fer d'una manera *reproductiva* (es dóna a l'alumne una sèrie de nombres i es demana que trobi tots els seus divisors), però hi ha altres possibilitats de fer-ho.

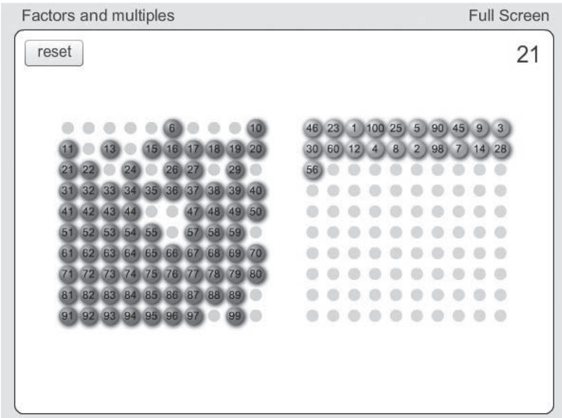
Pensem què podria passar si proposem a un grup d'alumnes la pregunta següent: «Quin és el nombre de dues xifres que té més divisors?». Aquesta activitat implica calcular els divisors de noranta nombres; per tant, convida a plantejar un treball de col·laboració en què cada subgrup d'alumnes s'encarregui d'uns quants (cadascú fa la mateixa feina que en la proposta reproductiva, però ara aquesta feina té una finalitat: forma part d'una investigació proposada a tota la classe). La dinàmica creada permet generar preguntes o plantejar reptes, com per exemple: «El grup de la Joana ha trobat un nombre amb 8 divisors: el 24, què li passarà al nombre 48? en tindrà més? per què?». I després d'aquesta discussió es pot proposar: «Com podem fer servir el descobriment que un nombre té sempre menys divisors que el seu doble per a la tasca de trobar el nombre de dues xifres amb més divisors? Cal que fem l'estudi dels divisors de 34 si ja sabem que el 68 en tindrà més?».

Una de les motivacions que podem oferir als alumnes per a millorar les seves estratègies de cerca exhaustiva de divisors d'un nombre és el joc Factors and Multiples Game, tret de la fantàstica pàgina del Projecte NRICH (http://nrich.maths.org/5468).

Descripció de l'activitat

Donem a dos jugadors una llista dels nombres de l'1 al 100; el primer jugador ratlla un nombre a la seva elecció de la primera llista i comença amb aquest nombre una segona llista; alternativament, cada jugador va ratllant un nombre de la primera llista i l'afegeix al final de la segona, de tal manera que el nombre afegit és divisor de l'anterior o l'anterior és un dels seus divisors. Perd aquell jugador que es queda sense jugada possible.

La imatge 1 mostra una partida acabada jugada sobre el «tauler» que ens ofereix la versió del NRICH abans esmentada.

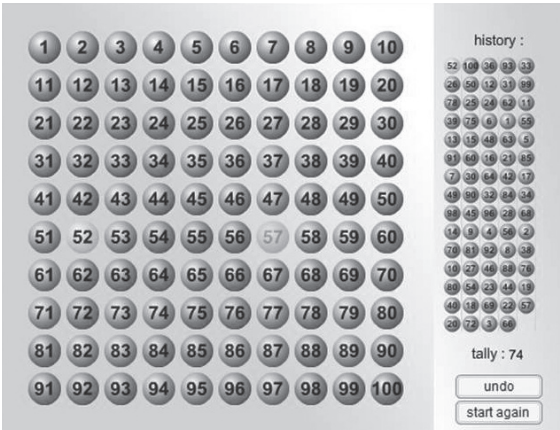


Imatge 1

Comentaris

Reflexionant sobre el joc, poden plantejar-se preguntes com: «Què passa si comencem per 1?». Hauríem d'arribar a la conclusió que no seria una bona idea, ja que si l'altre jugador tria un nombre primer més gran que 50 perdríem. «Com podem utilitzar aquesta reflexió per trobar una estratègia guanyadora?». Si comencéssim nosaltres amb un nombre primer superior a 50, obligaríem l'altre jugador a ratllar l'1 i així podríem guanyar.

Però en la nostra experiència, aquest joc té molta més gràcia si el plantegem com un solitari en què l'objectiu és intentar que la segona llista sigui com més llarga millor. Per posar en pràctica aquesta versió del joc, ens ha resultat interessant l'ús d'una segona aplicació del NRICH (http://nrich.maths.org/content/id/5468/100square.swf) que permet seguir la «història» del joc distingint per colors: el primer nombre triat el pinta de groc i cadascun dels següents els pinta de verd si són divisors de l'anterior o de vermell si en són múltiples. A la imatge 2 es pot veure una cadena llarguíssima (setanta-quatre nombres!) aconseguida sobre aquest segon «tauler».



Imatge 2

Val la pena esmentar que una altra versió d'aquest joc (http://www.transum.org/Software/sw/Starter_of_the_day/Starter_May7.asp, que apareix a la imatge 3) ens ha donat molt bons resultats a classe. El fet que la primera llista sigui de 24 nombres permet als alumnes entendre molt millor la dinàmica del joc i explicar per què 20 és el màxim llarg d'una cadena en la qual queden exclosos nombres com 13, 17, 19 o 23.

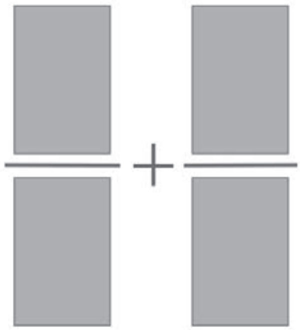
Imatge 3

Activitat 2. Suma de fraccions

Un dels continguts que està present en el pas de primària a secundària són les fraccions i, en aquest àmbit, la pràctica associada a la realització d'operacions, en les quals cal adquirir un bon domini. Aquesta preocupació porta alguns mestres a plantejar als seus alumnes pàgines senceres d'exercitació d'operacions. Però nosaltres creiem que aquesta necessària pràctica es pot portar a terme en la forma productiva que esmentaven a l'activitat 1 i tal com ho proposa Don Steward al seu blog Median en una activitat que anomena «Four digits, two fractions» (http://donsteward.blogspot.com.es/2011/04/four-digits-two-fractions.html).

Descripció de l'activitat

Donem a un alumne quatre targetes en cadascuna de les quals apareix un nombre: 2, 3, 4 i 5. Demanem a l'alumne que les col·loqui en l'esquema de la imatge 4 formant dues fraccions i que doni el resultat de la suma en forma de fracció irreductible.



Imatge 4

Com pots disposar les targetes per obtenir com a suma:

- Una fracció de denominador 10?
- El resultat més gran (o el més petit) possible?
- Una fracció que no sigui impròpia?
- El resultat més proper possible a 3 (o a 2)?

Fes un petit informe que expliqui com ho has pensat.

Una manera d'atacar aquest problema és fer una llista de les dotze distribucions possibles de les targetes, sumar-les i triar els resultats que compleixin les condicions de les tres preguntes (la commutativitat de la suma fa innecessari analitzar les altres dotze possibilitats en què les dues fraccions intercanvien el seu lloc en la suma).

Però segur que a classe tindrem alumnes que no voldran fer aquest tipus de treball i preferiran fer menys sumes a canvi d'una reflexió prèvia a la col·locació de les targetes.

En aquest cas, la resposta a la primera pregunta involucra molts components:

- Quines fraccions han de triar perquè el resultat tingui denominador 10? La primera idea que poden tenir els alumnes és limitar-se als casos en què una de les fraccions ha de tenir denominador 2 i l'altra 5, però també podria passar que una tingués denominador 4, l'altre 5 i que el resultat tingués denominador 10 després d'una simplificació.
- Després de triats els possibles denominadors, han de posar en joc un procés de treball exhaustiu: si les fraccions de partida tenen denominadors 2 i 5, poden fer $3/2 + 4/5$ o $4/2 + 3/5$, però caldrà fer les sumes per comprovar que compleixen amb els requeriments de la pregunta (això els farà descartar una de les dues possibilitats, ja que el resultat simplificat té denominador 5). Si les fraccions de partida tenen denominadors 4 i 5, també tenen dues possibles sumes $3/4 + 2/5$ i $3/5 + 2/4$, però només una els dóna un resultat de denominador 10.

Per trobar la suma més gran, el primer que han de pensar és que les dues fraccions han de ser impròpies (si alguna no ho fos, intercanviant el numerador i el denominador es podria obtenir un resultat més gran), però això els deixarà encara tres sumes per analitzar: $5/2 + 4/3 = 23/6$, $5/3 + 4/2 = 11/3$ i $5/4 + 3/2 = 11/4$. Per saber quin és el major dels tres resultats podran expressar-los com fraccions del mateix denominador, podran expressar els tres resultats en notació mixta o trobar la seva expressió decimal. El raonament seria anàleg per trobar la suma mínima i, en trobar que $11/10$ és el resultat mínim, queda resposta la tercera pregunta: si el menor resultat possible és major que 1 tots ho seran i, per tant, és impossible col·locar les targetes de manera que el resultat no sigui una fracció impròpia.

En la cerca de la suma més propera a 3 interessaria anar descartant algunes distribucions de les targetes (per exemple: si han sumat $3/2 + 4/5 = 23/10$, que és menor que 3, no cal que sumin $2/3 + 4/5$, ja que serà un nombre menor i, per tant, més allunyat del 3), però en aquesta pregunta el procés de descart no representa realment una manera d'evitar fer moltes sumes i els alumnes acaben complint amb l'objectiu de pràctica amb el que havíem proposat l'activitat. Quan tinguin les sumes candidates a tenir el resultat més proper a 3, tornaran a necessitar comparar fraccions i descobriran que hi ha dos resultats que estan igualment propers: $3\,1/4$ i $2\,3/4$, si treballen amb notació mixta, o 2,75 i 3,25, si ho fan amb notació decimal. Aquesta comparació és molt més rica quan trobem les dues fraccions que més s'aproximen al 2, ja que són $23/12$ (per defecte) i $13/6$ (per excés). La notació mixta permet veure amb una facilitat relativa que les distàncies al 2 són d'$1/12$ i $1/6$ i, per tant, la segona és més propera. Però treballar amb expressions decimals pot posar en algun compromís alguns alumnes, ja que hauran de comparar les distàncies al 2 de dos nombres decimals periòdics: 1,9166... i 2,166...

Comentaris

Una de les característiques principals del plantejament d'activitats de pràctica productiva és el canvi radical en el «contracte didàctic». Quan proposem als alumnes una pàgina d'operacions, les realitzen, les entreguen i, posteriorment, es corregeixen; algunes poden estar bé, d'altres no, però el fet de fer-ne alguna de malament no és realment determinant, ja que pot haver sigut una distracció, i l'objectiu era practicar la mecànica i això s'ha fet. En canvi, en incorporar com a objectiu la resolució d'un problema, fer bé les operacions és una part imprescindible per donar la resposta correcta. Això porta al fet que els alumnes, treballant en petits grups, «vigilin» o comparin els resultats que van obtenint amb els seus companys.

En descriure l'activitat, hem esmentat la possibilitat que els alumnes considerin com a estratègia plantejar totes les sumes possibles i calcular-les. Davant d'aquesta opció de treball, ens hem trobat que, en un inici, els alumnes acostumen a començar fent sumes a l'atzar, sense sentir la necessitat de fer un treball sistemàtic que els doni la seguretat que han trobat totes les sumes possibles i que no n'han repetit cap (en un treball sistemàtic podrien, per exemple, fixar la posició d'una de les targetes i moure les altres exhaurint totes les possibilitats abans de moure la primera targeta). Els mestres, amb les nostres intervencions, els hem de fer conscients dels beneficis de tenir una estratègia davant d'aquesta mena de situacions.

2 / 4	+	3 / 5	=	1,1	=	11 / 10	més petita
2 / 5	+	3 / 4	=	1,15	=	23 / 20	
2 / 3	+	4 / 5	=	1,466667	=	22 / 15	
2 / 5	+	4 / 3	=	1,733333	=	26 / 15	
2 / 3	+	5 / 4	=	1,916667	=	23 / 12	més propera a 2
2 / 4	+	5 / 3	=	2,166667	=	13 / 6	
3 / 2	+	4 / 5	=	2,3	=	23 / 10	
4 / 2	+	3 / 5	=	2,6	=	13 / 5	
3 / 2	+	5 / 4	=	2,75	=	11 / 4	més propera a 3
5 / 2	+	3 / 4	=	3,25	=	13 / 4	més propera a 3
4 / 2	+	5 / 3	=	3,666667	=	11 / 3	
5 / 2	+	4 / 3	=	3,833333	=	23 / 6	més gran

Imatge 5

També hem comentat la possibilitat que alguns alumnes trobin pertinent utilitzar l'expressió decimal d'una fracció per respondre algunes de les preguntes plantejades. En aquests cas, podem valorar si ens interessa allunyar-nos de l'objectiu inicial de pràctica de sumes a canvi de connectar fraccions i decimals i reflexionar sobre els beneficis d'aquestes connexions per facilitar la resolució d'un problema.

Una ampliació a aquesta activitat és la de plantejar el mateix problema amb restes (o multiplicacions o divisions) i, en aquest sentit, l'única pregunta que ofereix una situació qualitativament diferent respecte a la suma és la de trobar el resultat més gran i més petit, ja que ara no es tracta de maximitzar els sumands, sinó de trobar les fraccions més allunyades possibles.

La demanda d'un petit informe sobre la resolució del problema es basa en el nostre convenciment que tan important com trobar la solució és saber-la explicar o justificar.

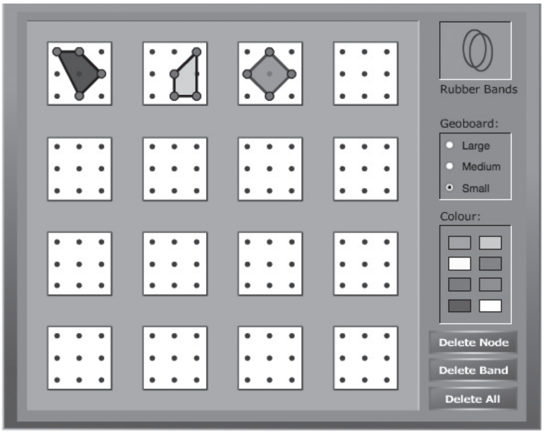
Activitat 3. Quadrilàters en un geoplà de 3 × 3

De les moltes propostes que podem fer amb un geoplà (segurament el més famós dels materials manipulatius relacionats amb el treball amb geometria plana i, sortosament, força present en les nostres escoles), hem triat aquesta en concret per la seva història. La primera referència que tenim d'aquesta activitat és l'article escrit per Maria Rigon Grandesso, de l'escola elemental de Cartigliano, aparegut a la revista *L'insegnamento della Matemàtica e delle scienze integrate*, vol. 2, núm. 3, i traduït per Francesc Esteva per a la revista *L'Escaire*, la primera revista de didàctica de les matemàtiques publicada en català, ara fa trenta-cinc anys (https://sites.google.com/site/espaijordiesteve2/lescaire.pdf).

Descripció de l'activitat

Es demana als alumnes que trobin tots els quadrilàters possibles que es poden obtenir en un geoplà de 9 punts.

A la imatge 6 tenim alguns exemples d'aquests quadrilàters i una manera de desenvolupar aquesta tasca: fent servir geoplans digitals (en aquest cas, els geoplans són els que proposa el projecte «Count Me in Too» a http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/countmein/children_geoboard.html, però se'n poden trobar molts d'altres, tal com es veu a http://appletspuntmat.blogspot.com.es/2013/09/geoplans.html). Però aquesta tasca es pot fer sobre geoplans materials (en aquests cas, les diferents solucions que van trobant els alumnes es poden recollir mitjançant fotografies) o sobre geoplans que poden dibuixar els alumnes en un paper quadriculat o que podem lliurar impresos.



Imatge 6

Creiem que és una bona activitat perquè els alumnes treballin en grups i puguin donar-se suport entre ells no sols a l'hora de cercar moltes solucions, sinó en assegurar-se que no en repeteixen cap. Perquè aquest treball exhaustiu que demanem als alumnes pugui tenir lloc, hauríem d'administrar amb cura informacions tals com dir-los quantes solucions diferents hi ha abans que ells s'enfrontin a la pregunta «els he trobat tots?» (per exemple, si donem un full amb geoplans impresos perquè hi representin les solucions, convé que hi hagi més de setze geoplans per no donar pistes d'una manera prematura). Però trobar tots els quadrilàters no és fàcil; per tant, arribarà el moment que haurem d'intervenir donant informació dosificada: «us falta un trapezi», «no n'heu trobat cap de còncau?», «esteu segurs que heu trobat tots els paral·lelograms possibles?», etc. D'aquesta manera, l'ús dels noms de les figures té un sentit i l'alumne experimenta el benefici de la classificació de quadrilàters com a eina de comunicació.

Trobar totes les solucions possibles ens dóna l'oportunitat de convidar-los a treballar d'una manera sistemàtica. Hi haurà alumnes que segurament ho tindran en compte, però d'altres necessitaran les nostres preguntes per adonar-se que anar revisant les seves solucions per tipus de quadrilàters: quadrats, rectangles, paral·lelograms, trapezis, etc. és una bona estratègia, molt pròpia de les matemàtiques. D'altra banda, quan posem en dubte l'afirmació d'un alumne que diu que només hi ha dos quadrats entre les solucions, l'estem animant a no restringir les seves solucions a les posicions més típiques d'aquestes figures (per exemple, els quadrats poden no tenir els seus costats paral·lels a les bandes del geoplà).

Una altra manera que el mestre intervingui en la recerca de totes les solucions és proposant a un grup que ha trobat un quadrilàter d'aquells que més costa trobar que passi a la pissarra i el representi per als seus companys (si es disposa d'una pissarra digital es poden fer servir les aplicacions sobre geoplans digitals abans esmentades). La resta de grups buscaran entre els que ja han trobat si aquest «ja el tenen» o si és un de nou. Aquesta feina és molt interessant, ja que la posició del de la pissarra no té per què ser la mateixa que la que han dibuixat en el seu grup i justificar per què dos quadrilàters són iguals, malgrat la seva posició, ens acosta al món de les simetries i els girs i promou un ús de vocabulari i propietats geomètriques que moltes vegades aprenen d'una manera descontextualitzada de la seva finalitat comunicativa (per exemple, poden refutar la igualtat entre dos quadrilàters dient que el primer té un angle recte i el segon no o que en un els costats oposats són iguals i en l'altre no, etc.).

Comentaris

Podríem pensar que no ha canviat res en trenta-cinc anys, però no és així. L'activitat que proposava l'any 1979 és la mateixa que fem actualment, però el procés de presentació és molt diferent. Si doneu un cop d'ull a l'article de Rigon (teniu l'enllaç més amunt), veureu que l'activitat que presentem és l'onzena (de tretze de proposades), està estructurada seguint la filosofia de descobriment dirigit pròpia de l'època (és a dir, va proposant tasques amb les quals va avançant a petits passos cap al coneixement general que vol que adquireixin els seus alumnes) i el procés està molt pautat, fins i tot el nombre de geoplans que apareixen sota cada pregunta indica les solucions possibles: primer trobar els quatre polígons no convexos, després els tres quadrats, després les altres tres figures que tenen els costats paral·lels 2 a 2, etc.

En la mentalitat actual, l'activitat de trobar tots els quadrilàters possibles continua sent perfectament vàlida, però la presentem en un ambient de resolució de problemes en el qual desapareix qualsevol camí pautat.

Cloenda

Amb els exemples descrits i comentats, hem intentat transmetre algunes idees que creiem bàsiques per ajudar els alumnes en el seu aprenentatge de les matemàtiques durant la transició entre primària i secundària.

- La importància de dissenyar activitats molt flexibles que permetin que, davant d'un mateix enunciat que plantegem a tots els alumnes que tenim a l'aula, siguin ells els qui determinin el grau d'aprofundiment de la tasca que els plantegem. Aquest aprofundiment, atesa la diversitat de l'alumnat, dependrà més de les possibilitats de cada alumne que del curs en què està.

- La importància d'unificar una manera de fer matemàtiques a les aules, ja siguin de primària o secundària, més centrada en el tipus de pràctiques que en els continguts matemàtics al voltant dels quals giren aquestes pràctiques. Creiem que el que hauria de diferenciar el treball d'un mateix alumne en una etapa i en l'altra no és el contingut matemàtic dels problemes que li proposem, sinó el seu progrés en l'actitud amb què afronta aquests problemes: augment de la seva disposició per fer conjectures, dels elements de què disposa per justificar-les i de l'eficiència en el pensament exhaustiu que li permet treballar sistemàticament.

Referències

Burgués C. i Sarramona, J. (coord.) (2013a). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació primària*. Barcelona: Generalitat de Catalunya.

— (2013b). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria*. Barcelona: Generalitat de Catalunya.

Goñi, J.M. (coord.) (2000). *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Graó.

Rowland, T. (2006). The Knowledge Quartet: A tool for developing mathematics teaching. Conferència plenària de la Fourth Mediterranean Conference on Mathematics Education, Palerm, Sicília, http://www.maths-ed.org.uk/skima/Rowland%20Palermo%20paper.pdf [2015, 2 de maig]

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.) (2001). *Children learn mathematics*. Utrecht: Freudenthal Institute.

Woodham, L. (2013). Encouraging Primary Children to Work Systematically. NRICH Project: Universitat de Cambridge, a http://nrich.maths.org/9776 [2015, 2 de maig]