

Reflexions obertes d'un neòfit en Didàctica de la Matemàtica

Josep Pla i Carrera

Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística
Facultat de Matemàtiques, Universitat de Barcelona

Resum

La idea principal d'aquestes línies és reflexionar sobre la importància de la *història de la matemàtica* en la formació dels docents d'ensenyament preuniversitari i en l'adquisició d'una cultura totalment irrenunciable en aquesta formació.

Abstract

The main idea of these lines is to reflect on the importance of the history of mathematics in teacher training of pre-university education and also in the culture's acquisition culture completely essential in this training.

En aquest complicat edifici construït pels mestres de la ciència matemàtica, no n'hi ha prou amb afirmar la solidesa de cada part de l'edifici i admirar la feina del constructor; hem de comprendre'n també el pla arquitectònic.

Ara bé, per comprendre el pla s'han de veure de cop totes les parts, i només la intuïció ens proporciona els mitjans per copsar, de cop, la totalitat.

HENRI POINCARÉ¹

En aquesta nova etapa de la revista *Nou Biaix* —abans *Biaix*— m'ha semblat oportú fer una reflexió personal del *valor docent de la història de la matemàtica* que, al meu entendre, és indiscutible i indefugible. I ho vull fer defensant alhora el gran *valor cultural* d'aquest coneixement entès com a formació.

Entenc per «valor cultural» el *pòsit* que queda quan d'alguna manera el foc més viu s'ha apavaigat. Recordem les paraules de Johann Heinrich Pestalozzi:

1. Vegeu Poincaré (1900, p. 125).

La cultura té el poder d'unir els homes com a individus, independents i lliures, a través de la llei i de l'art. Les civilitzacions, desproveïdes de cultura, els uneixen, amb la coerció, en una massa sense cap consideració per la independència, la llibertat, la llei i l'art.²

Aquest valor cultural —complementari del valor professional— és un dels grans oblidats a casa nostra i en la nostra llengua —el català— quan es tracta de la ciència i de la tecnologia. A més, en la matemàtica, a diferència de les ciències positives, els resultats establerts en el passat gairebé mai no esdevenen obsolets. Ben al contrari, són un terreny adobat per a la docència i per a l'aprenentatge perquè aporten idees, problemes, conjectures, demostracions, suggeriments, possibilitats de generalitzacions, etc., de nou encuny. La matemàtica és, d'alguna manera, una disciplina històrica —una disciplina amb història— viva en el sentit que mai no esdevé caduca. Aquesta vivesa, juntament amb el procés històric, proporciona moltes eines d'un enorme valor didàctic i —com veurem— són una font indiscutible per enriquir-nos.

Però aquests fets s'han oblidat, massa sovint, tant en el bagatge cultural català com en els currículums i programes docents de tots els graus i categories. Sortosament, molts docents —i, en particular, els que «saben» matemàtica perquè l'han apres amb seriositat— han aconseguit pal·liar l'efecte de les polítiques formatives i educatives de la matemàtica tan erràtiques i errònies.³

1. Dels docents matemàtics

En aquest context, doncs, vull posar en relleu, amb consideracions adients, la *necessitat* que els *docents de matemàtica* de tots els nivells —però d'una manera molt particular en els nivells d'ESO i Batxillerat que precedeixen els estudis universitaris— *tenen* o haurien de tenir del *coneixement de la història de la matemàtica* i d'alguns del seus textos més paradigmàtics.

El fet central i nuclear per ser un bon docent d'una matèria —sigui la que sigui— és *estar ben format en allò que s'ha d'ensenyar*, és a dir, conèixer-ne una part important i de forma sòlida. És completament impossible —per més esforços addicionals de formació en la línia metodològica i pedagògica que després es facin— ensenyar allò que hom no sap i que no estima, perquè ho ensenyarà *sense passió*, que és el tret més important dels ingredients que fan que un docent esdevingui un mestre, en el sentit més noble del terme.⁴ Els esforços que es facin per suplir la mancança de coneixements resultaran tan sols pal·liatius —i, en molts casos, inútils o poc fructuosos i, en conseqüència, molt cars.⁵ Són esforços per apuntalar quelcom que s'ha construït en un terreny ben pantanós i gens segur. Si no s'accepta aquesta premissa —com ja he dit, totalment personal—, l'anàlisi que faig en

2. Citat per Jung (1945, volum 16, paràgraf 227, n. 10).

3. És realment incomprendible des d'un punt de vista acadèmic —novament les qüestions polítiques s'imposen per damunt de les qüestions acadèmiques— que els que cursen els màsters específics —de les àrees de biologia, filosofia, física, geologia, història, història de l'art, llengua, matemàtica, química, etc.— no tinguin cap possibilitat d'accedir a la docència pública de l'ESO i del Batxillerat. Els cal fer el mateix «màster formatiu» que qualsevol altre graduat el grau de base del qual no sigui l'específic de la matèria que ha d'ensenyar. I hi ha qui després se sorprèn d'un cert «fracàs escolar». Els dos ingredients bàsics del docent són el coneixement de la matèria que explica —essencial per ser docent— i la passió que aquest coneixement li desperta —essencial per ser professor o *magister*—. Parlo de la passió que, de jove, l'ha dut precisament a triar aquell grau específic a fi d'aconseguir-ne els coneixements necessaris.

4. Consulteu-ne l'accepció 2.1 del *Diccionari de la llengua catalana* (edició del 2007, pàg. 1102): «Persona que, d'una ciència, d'un art, etc., en sap per a ensenyar-ne, per a ésser pres com a model».

5. El polític haurien de tenir sempre molt clara la qüestió relativa a la dualitat cost/benefici. I, en particular, encara que sembli paradoxal, en les èpoques de bonança, perquè les decisions es poden prendre amb molta més tranquil·litat sense els xantatges provinents de la situació de precarietat que es dona en els moments de crisi econòmica. Curiosament aquesta és una lliçó que els nostres polítics, en particular, i la societat, en general, no ha après i molt em sembla que no vol aprendre.

aquest article pot ser discutible i, fins i tot, arbitrària. Això no obstant pot servir, almenys, per repensar la validesa, o no, de la premissa. Faré, doncs, una anàlisi de la importància i de la conveniència de conèixer —juntament amb els continguts més tècnics— la història de la matemàtica i, per tant, implícitament defensaré la necessitat d'incloure-la en els currículums formatius dels nostres docents de matemàtica.

2. Anàlisi d'aspectes metodològics i conceptuals lligats a la història de la matemàtica: una reflexió general

Cal tenir present, i és una raó sobre la qual cal reflexionar i aprofundir, que en la civilització occidental, l'antiguitat de les reflexions sobre la matemàtica —que es remunta a l'època de l'Acadèmia de Plató— i el fet que matemàtics d'una gran vàlua —Jules Henri Poincaré, David Hilbert, Jacques Salomon Hadamard, George Pólya, Paul Erdős, Paul Richard Halmos, etc.—⁶ hagin dedicat una part no gens menyspreable del seu temps a la presentació, l'anàlisi i l'aprofundiment epistemològic i heurístic d'aquesta disciplina.

L'existència d'excel·lents textos d'història de la matemàtica i els esforços realitzats per les societats i les institucions de docents que hi estan relacionades d'arreu en la difusió de la història de la matemàtica com una font de riquesa formativa i conceptual és un altre aspecte que no podem obviar.

I finalment, l'interès per disposar de reculls de textos originals «rellevants» d'història de la matemàtica per poder-los llegir, comprendre, interpretar i situar en el context i llenguatge del moment en què foren produïts n'és encara una tercera.

Són tres raons, doncs, que suggereixen i exigeixen una anàlisi més detallada i pregona de la qüestió.

La necessitat de l'anàlisi l'efectuarem, doncs, tot desenvolupant mitja dotzena d'ítems que cal exemplificar amb casos concrets —els exemples concrets, qüestions de logística numèrica, vinculades a l'escriptura i als algorismes de càlcul d'altres civilitzacions; de geometria, vinculades a *l'Elements*; d'àlgebra, amb la matemàtica mesopotàmica, xinesa, àrab i renaixentista; de trigonometria, lligada a qüestions d'astronomia grega i índia; de càlcul, vinculades a problemes senzills de física dels segles *xvi* i *xvii*; de geometria cartesina, vinculades a l'obra de René Descartes i Pierre de Fermat, etc., s'han d'adequar als interessos i continguts del moment del procés formatiu en el qual es presenten. El fet d'esmentar aquests ítems —que poden ser uns altres— té la intenció d'explicitar de forma més clara i entenedora les idees que proposo i defenso. Moltes de les qüestions han estat exposades i defensades amb molta habilitat per estudiosos de la història de la matemàtica que n'han analitzat amb rigor els lligams amb l'ensenyament i amb la comprensió global de la matemàtica, com ara Avital (1995), Calinger (1996), Katz (2000), Grattan-Guinness (2004) i Grattan-Guinness (2009), per esmentar autors ben actuals. El professor no ho hauria d'oblidar mai —quelcom que succeeix amb massa freqüència— i les hauria de tenir sempre ben presents per tal de poder prendre, quan ho cregués convenient, la decisió d'aproximar-hi l'alumne.⁷

6. I, malgrat del que n'opinava, Hardy. Vegeu Hardy (1940, edició catalana, pàg. 13-72).

7. Una riquesa molt important d'aquesta aproximació és que no cal que estigui ni totalment regulada ni reglada. L'elecció queda a l'arbitri del mestre. De fet, adequar el programa a les capacitats i especificitats concretes dels alumnes i a les situacions reals de l'aula, en l'ús de la «llibertat docent» —quelcom que actualment també tendim a limitar excessivament—, és precisament *una* —si no la més important— *de les funcions* de l'autèntic mestratge.

2.1. La història com a referent del grau de dificultat intel·lectual

No hi ha dubte que el procés d'evolució de la matemàtica —engloba en aquest nom, com es fa avui, totes les branques— ha estat força interessant i, malgrat la unitat de resultats, a voltes, en cultures diverses, es presenta també de forma diversa en la metodologia.

L'evolució conceptual és una evolució que va dels conceptes més *elementals* —en el sentit de més intuïtius— cap a conceptes més abstractes i evolucionats intel·lectualment. Un bon coneixement de la història de la matemàtica permet, doncs, al docent —quan és un bon professor—⁸ fer una presentació de certes qüestions d'una manera metodològica —i, per tant, més entenedora— força més apropiada al nivell de l'alumne que el docent té al davant.⁹ Pensem que un mateix resultat es pot —i *s'ha de*— veure en estadis formatius força allunyats en el temps. De fet, en l'acte docent dels nostres dies aquestes presentacions es fan en el si d'un context que no sempre és el més natural des del punt de vista intuïtiu, ni d'aquell on van aparèixer inicialment de forma natural.

2.2. La presentació dels conceptes matemàtics a partir d'un problema concret

S'ha parlat moltíssim, en els cercles especialitzats en *didàctica de la matemàtica*, del mètode del «solving problems» de George Pólya. Tanmateix, però, no m'estic pas referint a aquest aspecte de presentació del fet matemàtic —de fet, prou conegut i divulgat [vegeu la secció §2.4]— encara que naturalment ambdues situacions estan molt travades. Em refereixo a la necessitat de recórrer, de tant en tant però tan sovint com calgui, a algun problema concret idoni que ajudi a suggerir els conceptes, les metodologies, les tècniques, els algorismes i àdhuc les teories matemàtiques que tenim entre mans i que volem transmetre.

Això forma part del treball personal de preparació de l'acte formatiu que és la classe entesa, no com una unitat diària, sinò com un *projecte* d'ensenyament i d'aprenentatge global estès en el temps formatiu.¹⁰

M'atreviria a dir que un docent esdevé un «mestre» —en el sentit més digne del terme, explicitat a la nota 4— quan aconsegueix que la presentació d'allò que ensenya estigui ben falcada en *problemes* concrets, interessants i entenedors, suggeridors i capaços d'obrir la porta als resultats generals.

2.3. Globalment l'aprenentatge de la matemàtica és un conte

Independentment del tros que toqui a cada docent, a cada franja d'edat, a cada etapa del procés educatiu, al final del procés formatiu l'alumne hauria de ser capaç de refer parts importants de la matemàtica com un conte en el qual hi ha un o diversos personatges protagonistes que tenen unes aventures que, per a uns, seran apassionants i, per a d'altres, no tindran cap mena d'interès —com

8. Uso el terme «professor» com a sinònim de «mestre».

9. D'aquí la necessitat de deixar a les seves mans —com deia abans— la tria concreta dels exemples que cal emprar en cada situació concreta del procés docent.

10. Vull emfasitzar el fet que el procés docent no comença avui i acaba avui —i molt menys encara a la meua aula i amb la meua lliçó concreta o amb el meu curs— sinó que és quelcom que s'esdevé en el temps i, en el cas de la matemàtica, es produeix per mitjà d'un desenvolupament en espiral. Ho he defensat a bastament a Pla i Carrera (2006).

passa també amb les novel·les, les pel·lícules, els còmics, etc. Això tanmateix no fa pas que el conte no existeixi i tingui el seu argument.¹¹

Ara bé, per poder explicar-ne un capítol o una de les aventures, cal tenir un coneixement del conte en la seva totalitat.¹² Aquí —a banda d'una formació sòlida en matemàtica, quelcom que, com ja he dit abans, dono per descomptat en tot docent de la matemàtica tant si ja està format i es troba en actiu com si encara està en procés de formació— hi ajuda moltíssim una bona formació en la història de la matemàtica, entesa com l'evolució conceptual en si mateixa.¹³

Val a dir que, entesa d'aquesta manera, esdevé també ofici de matemàtic —i de matemàtic global, encara que la globalitat sigui només d'una part de l'univers matemàtic. Sense una formació i coneixements matemàtics profunds i arrelats és impossible oferir-ne una visió històrica coherent, evolutiva i generalitzadora en el sentit que va del particular al que és més general i, si convé, crítica. Cal tenir les idees molt ben assentades per poder entendre com van néixer els problemes i els conceptes matemàtics, què els va motivar, per què van evolucionar d'aquesta manera en un moment del procés de desenvolupament, i d'aquesta altra, en un altre, etc.

2.4. Els problemes, la plausibilitat i la conjectura

A la secció §2.2, parlava de la conveniència d'usar problemes per tal d'introduir un concepte. Ara, en canvi, m'agradaria parlar —en la línia de Pólya— de la necessitat d'usar els problemes a fi d'aconseguir un coneixement real i personalitzat de la matemàtica. La matemàtica, com les arts, no en té prou amb la teoria; precisa de la pràctica, una pràctica personal, individual, íntima; cal «fer dits», «esborrany», «copiar dels mestres», etc. I això s'aconsegueix resolent problemes o, en qualsevol cas, plantejant-se problemes i mirant de resoldre'ls.

Aquesta pràctica —que he qualificat de *necessària*— té una deriva importantíssima i metodològicament vital. Permet distingir l'*anàlisi* de la *síntesi*, enteses en el sentit clàssic grec del terme i reformulades a finals del segle XVI i consolidades al XVII.¹⁴ I, dins l'anàlisi, la constatació de la plausibilitat.

M'atreveria a dir que una anàlisi matemàtica no és una anàlisi autèntica si deixa de banda la qüestió de la plausibilitat.¹⁵

11. Vegeu Pla i Carrera (2009).

12. Recordo —record fugisser— l'experiència de la novel·la policíaca individual-col·lectiva, *The floating amiral* (1931), dels autors G. K. Chesterton, Canon Victor L. Whitechurch, G. D. H. M. Cole, Henry Wade, Agatha Christie, John Rhode, Milward Kennedy, Dorothy L. Sayers, Ronald A. Knox, Freeman Wills Crofts, Edgar Jepson, Clemence Dane i Anthony Berkeley. Es donaven per endavant dos capítols inicials d'una trama policíaca. Llavors un tercer autor escrivia un tercer capítol i seguia la novel·la fins al final. Els tres primers capítols passaven a un quart autor que procedia de forma anàloga. El que fa curiosa l'experiència és que cada autor, a partir del que rep com a previ, confegeix una novel·la diferent. Això no tindria sentit —o potser sí?— en el fet educatiu de la formació matemàtica.

13. En aquest sentit val la pena consultar, per exemple, Schubring 2005. Però els textos que resulten realment paradigmàtics són els de Marcus de Sautoy (Sautoy, 2004, 2008).

14. Un qüestió que ens remet a la geometria grega, en particular, a Pappos, i alhora a l'àlgebra de Viète i Descartes.

15. Una manera de començar a comprendre un resultat matemàtic és convèncer-se que és plausible que sigui precisament aquell i no un altre. És plausible que «les tres alçades d'un triangle *arbitrari* es tallen sempre en un punt»; que «els nombres $2^k + 1$ siguin primers quan k pren els valors $0, 1, 2, 3, \dots$ »; que «les arrels x_1, x_2 de l'equació de segon grau $X^2 - bX + c = 0$, satisfacin $x_1 + x_2 = b$, $x_1 \cdot x_2 = c$?», etc. Novament necessitem un autèntic mestre i d'un coneixement molt acurat dels conceptes i dels problemes.

Però el plantejament i l'anàlisi de la plausibilitat permeten encara un altra qüestió —tan natural en la història de la matemàtica i tan oblidada en la docència: la *conjectura*. Pensar un possible resultat —propri o aliè— i conjecturar-ne la possible validesa. Com en som de mals mestres en aquest aspecte! Qui, de nosaltres, planteja la necessitat de fer conjectures i de respondre-les?

La història de la matemàtica és una font inesgotable d'aquestes tres eines i tècniques. Tot docent s'hi hauria d'haver apropat durant el procés d'aprenentatge fins a arribar a considerar-les quelcom natural en les seves presentacions a l'aula.¹⁶

2.5. Conèixer les crisis epistemològiques

Ara bé, a voltes, hi ha hagut *trencaments de la plausibilitat*: els exemples són in comptables (geometries no euclidianes, existència de l'infinit actual, existència matemàtica contra calculabilitat, trencament aparent del concepte de dimensió, aproximació al concepte de funció, determinisme i caos, etc.).¹⁷

Entendre la naturalesa i profunditat d'aquesta mena de trencaments és l'objectiu del que s'anomena, de forma genèrica, la *fonamentació de la matemàtica*, que és una lectura filosòfica —de fet, ontològica, epistemològica i heurística, fonamentalment— de la pròpia història de la matemàtica. En constitueix un exemple paradigmàtic el controvertit text de Kline (1980) i, més tècnic, l'esmentat de Schubring (2005).

16. Avui dia en què el valor intel·lectual intrínsec del procés formatiu de la matemàtica se substitueix cada cop més pels valors lúdic i d'aplicabilitat, és bo de recordar que el procés històric de creació de la matemàtica proporciona totes tres vessants: la intel·lectual, la lúdica i la modelitzadora i ho fa lligant-les entre si amb tota naturalitat. Vegeu Pla i Carrera (2007). No n'hauríem d'oblidar cap!

17. Cal tenir present que la taxonomia o classificació en tota mena d'exposició argumentativa és quelcom que ve obligat per un intent de precisió i claredat. Però, en la majoria dels casos — i, en particular, pel que fa referència a les qüestions metodològiques de la matemàtica— és un artifici expositiu. Tot està barrejat perquè són cares d'un mateix diamant, o reflexos d'una mateixa cara i, de fet, són indistinguibles. S'escau, potser, recordar el *conte budista* —una adaptació lliure d'un conte que vaig llegir una vegada en un d'aquests llibres sobre el coneixement de la mentalitat budista i del qual no en recordo les dades bibliogràfiques:

Un deixeble li pregunta al mestre:

— Mestre, què és un cigró?

El mestre, decidit, li respon:

— Un cigró és una gramínia...

Però el vailet el talla incisivament a l'inici mateix de la resposta i li diu:

— Mestre!, no vull saber la classificació o caracterització botànica que n'han fet els naturalistes. Simplement vull saber què és un cigró.

— Bé —diu el mestre—, un cigró és un compost orgànic...

Però el noi, tossut, sense deixar-lo acabar, li diu de bell nou:

— No vull pas saber-ne la composició química. Vull saber què és un cigró.

El mestre, cansat de respondre d'acord amb els seus múltiples coneixements parcials sense aconseguir, però, de satisfer la curiositat febril i profunda del deixeble, agafa un cigró i, tot mostrant-li-ho, li diu:

— Això és un cigró.

Aleshores el marrec diu amb estranyesa:

— Si, de fet, no saps què és un cigró, com saps que aquest objecte que m'estàs ensenyant és un cigró?

El mestre, en un intent desesperat per salvaguardar la seva autoritat, li diu:

— Sé que hi ha acord entre el signe vocàlic 'cigró' i l'objecte que t'estic mostrant ara mateix.

El vailet no se'n sap avenir i pregunta de bell nou:

— Bé, mestre, però el que jo et demano és precisament: «Què és aquest objecte al qual apliquem el signe vocàlic de 'cigró'?»

I així, després d'intentar de respondre una pregunta genèrica amb tantes respostes *concretes*, resulta que mestre i deixeble es troben altre cop al començament de la qüestió sense haver avançat gaire en el coneixement intrínsec.

2.6. Els algorismes i la introducció a la informàtica

La història de la matemàtica és també la història del desenvolupament d'algorismes de càlcul de tota mena i, en particular, d'*algorismes recurrents*. Molts d'aquests algorismes els aprenem de ben menuts, quelcom que, al meu entendre, caldria mantenir encara que avui es disposi de ginyes de càlcul immediat.¹⁸

El coneixement històric d'aquests algorismes ens proporcionen models per poder realitzar *programes* —i, de retruc, *models*— i així començar a aprendre l'ús de les calculadores tot fabricant estratègies i programes que els executin.

Aquest és també un camp de trobada —però molt més recent— entre l'ensenyament de la matemàtica i l'aprenentatge dels algorismes: la seva classificació i evolució, quelcom que no ha passat desapercbut com palesen, per exemple, el text coral de Chabert (1994) i Kao (2008).

2.7. La lectura dels textos clàssics

Ningú no discuteix que és formatiu llegir fragments de literatura dels autors i no recórrer sempre a aquells que els expliquen o els critiquen —sense que això signifiqui que no puguin ajudar a una millor comprensió.¹⁹ Però prèviament cal haver estat protagonista en l'acte d'apropament al text.

També apropem els estudiants a l'art a través de les obres concretes, quelcom que caldria estendre amb molta més convicció, decisió i fermesa a la música, parenta pobra del procés cultural bàsic.

Ara bé, quan es tracta de ciència i, en particular, de matemàtica, sembla talment que aquesta activitat perd tot el seu bagatge formatiu. Es tendeix a creure que la lectura d'un text clàssic pot arribar a dificultar la comprensió d'allò que cal aprendre, com si l'autor clàssic no fos capaç de transmetre l'acte iniciàtic de creació o d'exposar l'evolució conceptual.²⁰

És una discussió d'un gran abast que s'escapa de l'àmbit d'aquestes notes de reflexió metodològica. Ara bé, el que no s'escapa, en absolut, a aquesta reflexió col·lectiva és que els docents en ciència, en general, i en matemàtica, en particular, haurien d'haver-se apropiat als textos més rellevants dels prohoms de la seva disciplina. Això forma part consubstancial de la formació que s'ha de transmetre en un curs d'història de la matemàtica ben confegit. Apropar-se als mestres —als clàssics— i, després, amb l'ajuda i la col·laboració del professor d'història i dels professors de les disciplines específiques, analitzar textos concrets, adequats a cada moment formatiu, perquè aquest acte cultural —quan esdevé un acte formatiu— ajuda a comprendre'n el context, el llenguatge, la motivació, la novetat, les dificultats, l'evolució conceptual, l'evolució... en resum, el procés creatiu.

18. Caldria una revisió acurada del diàleg que s'hauria d'establir —i mantenir— entre «algorisme manual» i «ús de les eines de càlcul informàtiques».

19. Sempre recordaré amb molt d'afecte el curs sobre literatura catalana de Maria Aurèlia Capmany al qual vaig tenir l'encert d'assistir, a la Universitat Catalana d'Estiu de Prada, al Conflent, on jo mateix feia de professor, un agost d'ara fa ja quaranta anys.

20. En moltes ocasions he repetit que una diferència entre el que anomenem «les humanitats» i «les ciències» és la manera com, les unes i les altres, tracten els clàssics respectius. És clar que, avui, en la ciència positiva, l'avenç és molt ràpid —gairebé vertiginós— i l'única manera de mantenir-se al dia és la lectura i comprensió dels resultats més recents. Però això no ha d'impedir conèixer els clàssics, autèntica font de cultura.

2.8. La matemàtica és un llenguatge

A més, com ja deia abans de passada, apropar-nos als clàssics ens permet apropar-nos al llenguatge matemàtic. Potser val la pena recordar, un cop més, el text paradigmàtic de Galileo Galilei:

La filosofia està escrita en aquest llibre tan gran que tenim obert davant dels ulls, l'univers. No és possible d'entendre'l si abans no s'aprèn a entendre el llenguatge, a conèixer-ne els caràcters amb què s'ha escrit. Està escrit en llenguatge matemàtic i els seus caràcters són triangles, cercles i d'altres figures geomètriques. Sense ells és del tot impossible entendre'n una sola paraula. Sense ells ens trobaríem voltant vanament en un laberint fosc.²¹

I el professor Michael Atiyah, en el discurs que pronuncià el dia 25 d'abril de 2008 en l'acte en el qual fou investit doctor honoris causa de la FME de la UPC, digué:

Què són les matemàtiques?

[...] La meua resposta és que les matemàtiques són un llenguatge, un mitjà específic de comunicació que es pot comparar profitosament amb els llenguatges naturals, com ara l'anglès o el català. Són *constructes culturals* que han evolucionat durant milers d'anys i que forneixen el marc de la civilització.

[...] A més de comparar l'evolució històrica de les matemàtiques i del llenguatge natural, també podem comparar-ne les funcions, descrivint-ne els diversos usos.

[...] Així, el llenguatge té un ús pràctic per als afers diaris, un ús literari per transmetre idees més abstractes i un ús poètic per expressar les emocions. Hi ha una divisió similar en la matemàtica entre utilitat, que mena a la matemàtica aplicada, i la matemàtica pura, més enfocada a idees abstractes.²²

Aquesta part essencial de la matemàtica —un dels llenguatges elaborats pel pensament humà— també ha de formar part essencial de l'autèntic aprenentatge —en l'específic i en el cultural— i, per tant, de l'ensenyament.²³

I encara hi ha una altra qüestió molt interessant —com hi és en totes les expressions humanes: pintura, escultura, música, literatura, etc.—, i és que cada cultura —i, dins de cadascuna, cada autor— té un estil propi personal, com va posar de manifest en un llibre excel·lent —la lectura del qual recomano— ja fa uns quants anys el matemàtic i filòsof castellà Javier de Lorenzo.²⁴

3. De l'interès suscitat per la història de la matemàtica

Ara tractaré de reflexionar més acuradament sobre els ítems que he assenyalat amb la confiança que siguin d'utilitat per a una bona comprensió de les idees matemàtiques i la seva evolució. Espero que sintetitzin de forma clara i positiva —aquest és l'esperit amb el qual he escrit aquest text— els conceptes epistemològics que hauríem de trobar en els currículums de l'ensenyament de la matemàtica i en els de formació dels docents de matemàtica. En definitiva, es tracta de formar professors

21. Vegeu Galilei (1623, edició castellana, p. 61).

22. Vegeu <http://www.upc.edu/saladeprensa/al-dia/mes-noticies/el-matematic-michael-atiyahinvestit-doctor/441>. En recomano la lectura. L'èmfasi és meu.

23. He intentat recollir el llenguatge matemàtic, la seva evolució, a Pla i Carrera (2006).

24. Vegeu Lorenzo (1971).

moderns de matemàtica. I tot això amb l'esperança de coincidir amb les idees expressades amb molt d'encert per un nombre important de pensadors que m'han precedit en aquesta mena de reflexions.

3.1. A la recerca d'esperits crítics

En definitiva, el text —amb totes les reflexions que conté— vol ser útil i adequat per al currículum formatiu dels docents de la matemàtica: ric en idees, conceptes, teories, mètodes, etc., des d'una perspectiva global —que vagi del passat al present, de la intuïció a la formalització i generalització més rigoroses, dels algorismes a la computació, etc.—, però mantenint sempre un cert punt d'esperit crític o, si es prefereix, no excessivament dogmàtic.

Estic convençut que, en una tasca com la docent en la qual s'imposa a l'alumne allò que li cal aprendre i per tant allò que li hem d'ensenyar i que, en conseqüència, es presenta als ulls del qui aprèn com quelcom inamovible, és indispensable que el qui ensenya conegui les crisis que el concepte ha sofert, les dificultats que ha tingut per imposar-se, les raons per les quals ha assolit l'èxit, etc. Si el professor les coneix, la seva actitud docent serà més lúcida, més crítica i, de retruc, més formativa i educativa en un sentit ampli de la paraula.

És a dir, en síntesi, cal que el docent tingui un esperit obert, com el que proporciona el coneixement històric dels processos de creació, d'assentament, de consolidació, de crisi i d'evolució.

3.2. De l'interès històric per la història de la matemàtica

Pot sorprendre que Eudem de Rodes, deixeble d'Aristòtil, elaborés textos d'història de la matemàtica de les èpoques que l'havien precedit. Si pensem que la matemàtica grega neix al segle VI aC amb les figures paradigmàtiques de Tales de Milet i Pitàgores de Samos, és molt suggeridor que uns dos-cents anys més tard del naixement del que avui s'anomena la *matemàtica grega*, un deixeble del Liceu aristotèlic dediqui els seus esforços a escriure una *història de l'aritmètica*, una *història de la geometria* i una *història de l'astronomia*, i totes en, almenys, dos llibres. Per desgràcia aquests textos d'història de la matemàtica del període grec s'han perdut en la pols i l'oblit del temps passat.

La preocupació per les qüestions històriques de la matemàtica és, doncs, quelcom que trobem ja a la Grècia clàssica. Força segles més tard, Pappos d'Alexandria elabora la *Sinagogé* (Συναγωγή μαθηματικῆ) o *Col·lecció matemàtica* (~340) (Μαθηματικῶν συναγωγῶν), un text la informació del qual no solament apropa el lector a l'evolució conceptual de la matemàtica grega, sinó que proporciona una enorme informació sobre llibres perduts, dels quals en fa una ressenya succinta.

També Procle en el *Comentari al llibre primer dels Elements d'Euclides* (Εἰς το πρῶον τῶν Εὐκλείδου Στοιχείων βιβλίον), a banda de fer una anàlisi molt detallada dels elements centrals de la teoria euclidiana, proporciona una gran quantitat de detalls d'índole històrica.

Aquest darrer text fou indispensable, a partir del segle XVI, quan l'orde dels jesuïtes i, en particular, Christophore Clavius, va intentar repensar la *geometria euclidiana* al si de la discussió filosòfica entre aristotèlics i platònics amb relació a com calia entendre —interpretar— la ciència a la llum de la *Sagrades Escriptures* i dels ensenyaments de l'Església de Roma. D'alguna manera aquesta reflexió portaria, amb el pas del temps i gràcies a les dificultats que l'anàlisi comportava i a les idees que suggeria, la necessitat de l'existència d'altres geometries i, en particular, de la *geometria hiperbòlica*.

El llibre de Pappos esdevingué, també al segle XVI, un text d'un gran valor *metodològic* i *docent*. Permeté a matemàtics notables dels segles XVI i XVII, com ara Marino Ghetaldi, François Viète i Pierre de Fermat, aprendre matemàtica tot mirant de refer els llibres perduts, esmentats per Pappos.

3.3. Prohoms de la matemàtica interessats per la història de la matemàtica

És remarcable l'interès que la història de la matemàtica ha desvetllat en matemàtics molt rellevants. Alguns noms són:

1. Michel Chasles. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837), un autèntic clàssic en la qüestió.
2. Guglielmo Libri, que, entre 1838 i 1841, publicà quatre volums d'*Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la rénaissanace des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle*.
3. Eric Temple Bell. *Men of Mathematics* (1937), *The Development of Mathematics* (1940). Són dues obres entre divulgatives i formatives i, en qualsevol cas, força amenes.
4. Bartel Leendert van der Waerden. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations* (1983) i *A History of Algebra* (1985). La preocupació per la història de la matemàtica no fou pas una afició de les darreries de la seva vida. Ja l'any 1947, havia escrit un treball realment notable sobre l'escola pitagòrica, *Die Arithmetik der Pythagoreer*.
5. André Weil. *Number Theory: an approach through history: from Hammurapi to Legendre* (1984). Als setze anys va llegir en sànscrit, la llengua original, el text matemàtic indi *Bhagavad Gita*.
6. Julio Rey Pastor, que, amb José Babini, va escriure *Historia de la Matemática* (1951).
7. Fins i tot, Nicolas Bourbaki —quelcom que realment pot sorprendre— va considerar que calia elaborar, amb la seva visió peculiar de la matemàtica, una història: *Éléments d'histoire des mathématiques*.

3.4. Alguns textos d'història de la matemàtica

Per acabar aquestes reflexions voldria indicar que la història de la matemàtica ha tingut sempre textos notables, d'entre els quals podríem esmentar:

1. Jean Étienne Montucla. *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle*, publicat a París per Jombert l'any 1754.
— *Histoire des mathématiques*, una petita obra mestra. París, 1754. Reeditat per Blanchard, París, 1968.
2. M. Maximilien Marie. *Histoire des sciences mathématiques et physiques*. Gauthier-Villars. París, 1883-1888.
3. Moritz Cantor. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Teubner. Berlín, 1913-1922, una obra de referència.
4. Dirk Jan Struik. *A Concise History of Mathematics*. Dover Publications, Inc. Nova York, 1948. Una síntesi breu però excel·lent.
5. Carl Benjamin Boyer. *A History of Mathematics*. Wiley. Nova York, 1968.
6. Morris Kline. *Mathematical thought from ancient to modern Times*. Oxford University Press. Nova York, 1972.
7. Howard Whitley Eves. *An Introduction to the history of mathematics*. Saunders College Publishing. Filadèlfia, 1953. Reeditat el 1964 i el 1983, i el 1990 amb connexions culturals de Jamie H. Eves.
8. Ivor Grattan-Guinness. *The Fontana History of the Mathematical Sciences: the Rainbow of Mathematics*. Fontana Press. Hammersmith, 1997.

9. Roger Cooke. *The History of Mathematics. A Brief Course*. John Wiley & Sons, Inc. Nova York, 1997.
10. David M. Burton. *The History of Mathematics: an Introduction*. Primera edició, 1989. Cinquena edició. McGraw-Hill. Boston (Massachusetts), 2003.
11. Victor J. Katz. *A History of Mathematics: an Introduction*. Primera edició, 1993. Segona edició, corregida. Addison-Wesley. Reading (Massachusetts), 1998.
12. Ronald Calinger. *A Contextual History of Mathematics: an Introduction*. Prentice Hall. Nova Jersey, 1999.
13. Jeff Suzuki. *A History of Mathematics*. Prentice Hall. Nova Jersey, 2002.

Ometo voluntàriament tota referència a històries particulars de la matemàtica, ja siguin per temes o per civilitzacions. Són copioses i n'hi ha de veritablement excel·lents.

Però el que no voldria fer és acabar aquesta reflexió sense posar de manifest encara alguns altres fets generals. No hi ha gairebé cap llengua desenvolupada que no disposi d'una o més revistes dedicades a la història de la matemàtica. Hi ha gran quantitat de revistes dedicades a l'art d'ensenyar matemàtica i la majoria dediquen una part important a les qüestions històriques. Penso, entre d'altres, en *Mathematics Teachers* del National Council of Teachers of Mathematics —una institució que l'any 1969 publicà l'actualment clàssic (Col·lectiu, 1969)—,²⁵ en *Mathematics Magazine* i en *The College Mathematics Journal* de la MAA. Aquesta institució dedica un gran esforç per tal que els llibres de la col·lecció *New Mathematical Library* siguin formatius i que la formació reposi tant com pugui en l'anàlisi històrica. Tampoc podem oblidar els esforços que, en aquest camp, fan els IREM francesos i el degotall de textos *El·lipses*, els textos de l'APMEP i els llibres de les editorials Belin i Pole, amb les col·leccions *Pour la science* i *Tangente*, respectivament.

Més a la vora nostra, hem d'esmentar la *Gaceta* de la RSEM, que conté una secció dedicada precisament a la història de la matemàtica i una altra a qüestions metodològiques i didàctiques de la matemàtica amb articles excel·lents, i el *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, en català, que té cura de mantenir obertes aquestes línies del pensament matemàtic. D'altres revistes dedicades a qüestions de metodologia i didàctica de la matemàtica que no podem oblidar són: *L'Escaire*, dissortadament desapareguda, *Suma* i *Biaix*, ara en la nova etapa de *Nou Biaix*, amb la voluntat d'aplegar esforços i ser útil a mestres i llicenciats que es dediquen a la docència de la matemàtica.

Tanmateix, els intents de proporcionar col·leccions de llibres han estat múltiples però no sempre han tingut l'èxit que en calia esperar. Pensem, per exemple, en l'intent de la col·lecció *La tortuga de Aquiles*, que no assolí la dotzena de títols, malgrat la qualitat del textos triats, ni tampoc els de l'editorial Labor. Això no obstant, no podem oblidar algunes de les pàgines magnífiques i inoblidables de Miguel de Guzmán, d'entre les quals voldria posar en relleu les de Guzmán (1995), ni tampoc l'esforç de l'Editorial Nivola, que ha aconseguit mantenir viva l'edició de *La matemàtica en sus personajes* que compta, hores d'ara, amb més de trenta títols, quelcom realment lloable malgrat la gran irregularitat en la qualitat dels continguts dels textos.

Cal indicar també l'esforç realitzat per especialistes d'història de la matemàtica anglesa per disposar de *Source Books* de Matemàtiques: Smith (1959), Midonick (1964), Struik (1969), Calinger (1995) i Katz (2007). I l'*Open University* ofereix una assignatura d'història de la matemàtica que disposa de vídeos i d'un text (Fauvel and Gray, 1987) en la línia dels *Source Books*.

25. Aquesta tasca excel·lent ha estat represa per Victor J. Katz i Karen Dee Michalowicz, en qualitat d'editors de *Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics*.

4. Conclusió succincta

Tinc el convenciment ferm —ha anat creixent amb els anys i l'experiència— que no s'aconsegueix una autèntica formació —l'objectiu del procés formatiu— si no s'aconsegueix que els alumnes assoleixin un autèntic bagatge cultural. És per aquesta raó que em sembla adequat acabar aquest text amb una frase de Carl Gustav Jakob Jacobi, que estimo molt.

Un filòsof com ell [com Joseph Fourier] hauria hagut de saber que l'únic objectiu de la ciència és l'honor de l'esperit humà, i que aquest nom aixopluga tant una qüestió sobre els nombres com una qüestió sobre el sistema del món.²⁶

I amb les reflexions sintètiques de Jorge Wagensberg:

[148] La vida és un estat rar de la matèria inert.

[149] La intel·ligència és un estat rar de la matèria viva.

[150] La cultura és un estat rar de la matèria intel·ligent.

[151] La civilització és un estat rar de la matèria culta.²⁷

Referències

- Avital, M. (1995). History of Mathematics Can Help Improve Instruction and Learning. In F. Swetz (Ed.), *Learn from the Masters!*, p. 3-12. Washington, D.C.: MAA.
- Bell, E. T. (1937). *Men of Mathematics*. Nova York: Simon & Schuster. Traducció francesa d'Ami Gandillon, *Les Grands Mathématiciens*. París: Payot, 1950.
- (1940). *The Development of Mathematics*. Nova York: McGraw-Hill Co. Traducció castellana de R. Ortiz, *Historia de las matemáticas*. Mèxic: Fondo de Cultura Económica, 1949.
- Bourbaki, N. (1960). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris: Hermann. Traducció castellana de Jesús Hernández, *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial, 1976.
- Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons. Revisat per Uta C. Merzbach en 1989. Traducció castellana de la primera edició de Mario Martínez Pérez, *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial, 1986.
- Burton, D. M. (1989). *The History of Mathematics. An Introduction*. Nova York: The McGraw-Hill Companies, Inc. Reeditat profusament: el 1991, 1995, 1997, 2003 i 2007.
- Calinger, R. (1995). *Classics of Mathematics*. Nova Jersey: Prentice Hall. Ronald Calinger n'és l'editor.
- (1996). *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*. Washington, D.C.: MAA. Ronald Calinger n'és l'editor.
- (1999). *A Contextual History of Mathematics: An Introduction*. Nova Jersey: Prentice Hall.
- Cantor, M. (1880-1907). *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Berlín: Teubner.

26. Vegeu <http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/Quotations/Jacobi.htm>

27. Vegeu Wagensberg (2002, p. 52).

Chabert, J. L. (1994). *Histoire d'Algorithmes, du Caillou à la puce*. París: Belin. Els autors són: Chabert, Jean Luc; Barbin, Evelyne; Guillemot, Michel; Michel-Pajus, Anne; Borowczyk, Jacques; Djébar, Ahmed; i Martzloff, Claude. N'existeix una traducció anglesa de Chris Weeks, *A History of Algorithms, From the Pebble to the Microchip*. Berlín: Springer-Verlag, 1999.

Chasles, M. (1837). *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Brusel·les: M. Hayez.

Col·lectiu (1969). *Historical Topics for the Mathematics Classroom*. Nova York: National Council of Teachers of Mathematics.

Cooke, R. (1997). *The History of Mathematics. A Brief Course*. Nova York: John Wiley & Sons, Inc.

Drake, S. (1957). *Discoveries and opinions of Galileo*. Nova York: Doubleday Anchor Books. Traducció anglesa amb una introducció i notes de Stillman Drake.

Eves, H. (1953). *An Introduction to the History of Mathematics*. Filadèlfia: Saunders College Publishing. Reeditat el 1964 i el 1983. L'edició del 1990 conté connexions culturals degudes a Jamie H. Eves.

Fauvel, J. and J. Gray (1987). *The History of Mathematics. A reader*. Londres: MacMillan and Open University.

Galilei, G. (1623). *Il Saggiatore* (1623). Roma: Accademia dei Lincei. Traducció castellana, pròleg, comentari i notes de José Manuel Revuelta, *El ensayador*. Buenos Aires: Aguilar, 1981; anglesa (Drake 1957).

Grattann-Guinness, s. I. (1997). *The Fontana History of the Mathematical Sciences: the Rainbow of Mathematics*. Hammersmith: Fontana Press.

— (2004). *History of the Mathematical Sciences*. Nova Delhi: Hindustan, Book Agency.

— (2009). *Routes of learning: highways, pathways, and byways in the history of mathematic*. Baltimore, Md.: Johns Hopkins University Press.

Guzmán, M. d. (1995). *Aventuras matemáticas*. Madrid: Pirámide.

Hardy, G. H. (1940). *A Mathematician's Apology*. Cambridge: Cambridge University Press. Traducció castellana de Jesús Fernández, *Apología de un matemático*, Nivola: Madrid, 1999; i catalana de Mònica Merín i Sales, *Apologia d'un matemàtic*, amb una introducció de Josep Pla i Carrera. Santa Coloma de Queralt: Obrador Edèndum, 2008.

Jung (1945). «Psychotherapy today». In G. Adler (ed.), *Collected Works, 20 volums*. Princeton: Princeton University Press.

Kao, M. Y. (2008). *Enciclopedia of Algorithms*. Illinois: Northwestern University Press. Ming-Yang Kao n'és l'editor.

Katz, V. J. (1993). *A History of Mathematics. An Introduction*. Nova York: Harper-Collins College Publishers. Reimprès en una segona edició, corregida. Reading, Massachusetts: Addison Wesley Logman Inc., 1998.

— (2000). *Using History to Teaching Mathematics: An International Perspective*. Washington, D.C.: MAA. Victor J. Katz n'és l'editor.

— (2007). *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A Source Book*. Princeton, Nova Jersey: Princeton University Press. Els autors són: Annette Imhausen, Eleanor Robson, Joseph W. Dauben, Kim Plofker, J. Lennart Berggren.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford: Oxford University Press. Traducció castellana de Carlos Fernández i Alejandro Garciadiego, sota la coordinació de Jesús Hernández, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, en tres volums. Madrid: Alianza Editorial, 1992.

— (1980). *Mathematics. A Loss of Certainty*. Oxford: Oxford University Press. Traducció castellana, d'Andrés Ruiz Merino, *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. Madrid: Siglo XXI, 1985.

Libri, G. (1838/1841). *Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la rénaissanace des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle*, 4 volums. París: J. Renouart.

Lorenzo, J. D. (1971). *Introducción al estilo matemático*. Madrid: Tecnos.

Marie, M. M. (1883-1888). *Histoire des sciences mathématiques et physiques*. París: Gauthier-Villars.

Midonick, H. (1964). *The Treasury of Mathematics*. Harmondsworth, Middlesex: Penguin Books.

Montucla, J. E. (1754a). *Histoire des mathématiques*. París: Jombert. Reeditat a París: Blanchard: 1968.

— (1754b). *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle*. París: Jombert.

Pla i Carrera, J. (2006). *Introducció a la metodologia de la matemàtica*. Barcelona: UBe.

— (2007). «Dels problemes de Hilbert als problemes del mil·lenni». In J. Quer (ed.), *Els set problemes del mil·lenni*, p. 127-168. Sabadell: Caixa de Sabadell.

— (2009). *Paraules d'agraïment per la concessió de la distinció Magister cum laude de la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC*. Barcelona: Publicacions de la UPC.

Poincaré, H. (1900). Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques. In *Comptes Rendus II Congrès International des Mathématiciens*, p. 115-130, París: Gauthier-Villars.

Rey Pastor, J. i J. Babini (1951). *Historia de la Matemática*. Argentina: Espasa-Calpe. Reeditat a Barcelona: Gedisa (1984).

Schubring, G. (2005). *Conflict between generalization, rigor, and intuition: number concepts underlying the development of analysis in 17-19th century France and Germany*. Nova York: Springer.

Smith, D. E. (1959). *A Source Book in Mathematics*. Nova York: Dover Publications, Inc.

Struik, D. J. (1967). *A Concise History of Mathematics*. Nova York: Dover Publications, Inc. Reeditat a Nova York: Dover Publications, Inc., 1967.

— (1969). *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Suzuki, J. (2002). *A History of Mathematics*. Nova York: Prentice-Hall.

Waerden, B. L. v. d. (1983). *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlín: Springer-Verlag.

— (1985). *A History of Algebra*. Berlín: Springer-Verlag.

Wagensberg, J. (2002). *Si la naturaleza es la respuesta, ¿cuál era la pregunta?* Barcelona: Tusquets, Col. Metatemas.

— (2003). *Si la naturalesa és la resposta, quina era la pregunta?* Traducció catalana de Màrius Serra. Barcelona: Tusquets.

Weil, A. (1984). *Number Theory. An approach through history. From Hammurapi to Legendre*. Boston: Brikhäuser.

