per pensar un minut

Jordi Deulofeu
Departament de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències
Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.deulofeu@uab.cat

Vull començar el meu article d'avui donant la benvinguda al *Noubiaix* i desitjant que la nova etapa de la revista sigui fructífera i duradora i signifiqui un pas endavant que garanteixi la consolidació de l'única revista en català dedicada íntegrament a l'educació matemàtica. Així mateix, agraeixo al nou equip de direcció de la revista la confiança que m'han demostrat permetent que la meva ja antiga secció, iniciada en el *Biaix* 18 (2001), segueixi formant part d'aquesta nova etapa. Penso que, per molt que canviïn les coses, en una revista d'aquestes característiques, ha de continuar havent-hi articles relacionats amb la resolució de problemes, els jocs i les recreacions matemàtiques, que tenen com a primera intenció la de fer passar una bona estona al lector a través del repte que suposa la proposta d'un problema o d'una endevinalla i, com a segona, la de proporcionar idees i recursos per a l'ensenyament de les matemàtiques a diferents nivells.

Seguint la idea dels meus articles anteriors, iniciada en el número 24, i tenint en compte que el *Noubiaix* manté la numeració i s'inicia amb el número 30 —un nombre prou rodó— , abans de proposar els problemes d'avui, començaré fent una petita referència a aquest nombre. D'entrada haig de dir que el 30 no és un nombre dels que podríem anomenar "espectaculars" en el sentit de remetre'ns a una idea o propietat matemàtica especialment important, ni tampoc a una gran quantitat de petites propietats.

Tanmateix, podem citar algunes curiositats en què apareix aquest nombre: 30 és el nombre d'arestes tant del dodecàedre com de l'icosàedre que, com a duals que són, tenen el mateix nombre d'arestes, mentre s'intercanvien els altres elements: 12 (cares del dodecàedre i vèrtex de l'icosàedre) i 20 (vèrtex del dodecàedre i cares de l'icosàedre). Seguint amb la geometria, val la pena recordar que hi ha només dos triangles pitagòrics tals que el seu perímetre és igual a la seva àrea: els de costats 5-12-13 i 6-8-10, i el nombre que expressa aquestes mesures és en el primer cas 30 i en el segon, 24.

En el camp de la teoria de nombres, 30 és el nombre més gran tal que tots aquells nombres menors que ell i que són primers amb ell són també primers; els altres són: 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24. D'altra banda, si definim com a *primordial* de p, on p és un nombre primer, com el nombre que s'obté en multiplicar tots els primers menors o iguals a p, resulta que 30 és el primordial de 5, és a dir, el tercer primordial: $p(2) = 2$, $p(3) = 2 \cdot 3 = 6$, $p(5) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $p(7) = 210$, $p(11) = 2310$, etc. Noteu que aquesta definició és la restricció als nombres primers del concepte de factorial d'un nombre natural.

Finalment, deixant de banda que 30 és el nombre de dies d'un mes (en realitat només quatre dels mesos del nostre calendari tenen 30 dies, però en l'antic calendari egipci tots els mesos tenien 30 dies), per als aficionats als jocs i als problemes combinatoris, direm que 30 és l'àrea del menor tauler rectangular en el qual un cavall d'escacs pot fer un recorregut que passi per totes les caselles i acabi on ha començat (s'entén que la unitat de superfície és la casella).

Deixant ja les presentacions, començaré la proposta de problemes d'avui amb dues situacions relacionades amb els nombres naturals. Totes dues semblen d'entrada prou senzilles, i de fet ho són, però si les analitzem una mica a fons veurem que aquesta simplicitat no està renyida amb l'interès matemàtic de les mateixes i el fet que totes dues permeten interessants generalitzacions que ja no són tan senzilles.

Problema 1. Ens donen sis dígits —per exemple: 4, 5, 6, 7, 8, 9— , i amb aquests formem parelles de nombres de tres xifres, utilitzant-los tots una sola vegada. Com formarem els dos nombres per tal que la seva diferència sigui màxima? I si volem que la diferència sigui mínima?

Formulat així, el problema és senzill i els dos apartats tenen solució única. De fet, la meva companya del departament, Lourdes Figueiras, que és qui me'l va proposar, l'havia trobat en un llibre de text de primària (Ed. Vicens Vives, 6è curs) i va observar les resolucions dels alumnes del cicle superior de primària. La primera part (diferència màxima) no sembla tenir gaires secrets, però la segona (diferència mínima) és força més interessant: la generalització a sis dígits qualssevol és ja d'una certa complexitat i mostra que, en certs casos, la solució pot no ser única. Sabríeu trobar-ne quins? També la introducció del 0 ens pot portar a discutir la validesa de certes solucions en casos particulars. Quines? A partir d'aquí, podem plantejar altres qüestions, com per exemple: Per a quines xifres, la diferència serà la menor possible? Què passa si canviem de sistema de numeració?

No cal dir que la situació que planteja el problema em sembla una excel·lent activitat per treballar a classe, amb alumnes del cicle superior de primària i del primer cicle d'ESO, ja que porta a una interessant reflexió sobre el sistema de numeració decimal i pot ser treballada a nivells de complexitat molt diferents, segons quines siguin les qüestions que formulem i segons quin sigui el nivell de generalització.

Problema 2. Considereu els dígits de l'1 al 9, i amb aquests formeu els nombres que vulgueu (emprant cada dígit una vegada i només una); sumeu els nombres obtinguts. Per exemple: 217 + 34 + 56 + 8 + 9 = 324. Quins nombres heu de formar per tal que el resultat de la suma sigui 100?

Potser algú de vosaltres ja coneixia el problema: el proposa Pólya en el seu cèlebre *How to solve it*, però jo, tot i haver rellegit aquest llibre més d'una vegada, no l'havia fet mai. Potser l'havia vist i m'havia semblat poc interessant: evidentment, un error (i més tractant-se de Pólya). En Lluís Bibiloni me'l va proposar mentre cercàvem problemes de nombres i de reflexió sobre el sistema de numeració decimal, que fessin "pensar" als nostres estudiants del màster de secundària.

Com tots els bons problemes, admet diverses preguntes, entre aquestes: El problema té solució única, té més d'una solució o no en té cap? Què passa si en suprimiu una de les xifres?, i si en repetiu una? Quina és la suma mínima que en podeu obtenir?, i la màxima?

Seguiré l'article d'avui amb un parell de problemes de geometria que m'ha suggerit en Xavier Valls; tots dos es poden resoldre per mètodes elementals.

Problema 3. Demostreu que l'àrea d'un dodecàgon regular és igual a tres vegades l'àrea d'un quadrat que té per costat el radi de la circumferència circumscrita al dodecàgon.

Si treballeu en aquest problema, veureu que no té massa dificultat, però el resultat és bonic i com a conseqüència se n'obté que π ha de ser més gran que 3.

Problema 4. Donats tres punts en el pla, trobeu-ne un quart tal que la suma de distàncies d'aquest als tres primers sigui mínima.

Ben segur que molts de vosaltres coneixeu aquest problema, ja que el punt que cerquem és l'anomenat *punt de Fermat*. Però sempre és bo revisitar els clàssics i tractar de trobar una nova manera de resoldre el problema.

Acabaré la secció d'avui aprofitant que darrerament he estat treballant en un llibre sobre jocs (Deulofeu, 2010), amb la proposta d'un petit joc d'estratègia per a dos jugadors. Seguiré anomenant-lo problema ja que l'objectiu del seu estudi no és el propi d'un joc (guanyar a un adversari), sinó determinar per a quin dels dos jugadors hi ha una estratègia que li permeti guanyar sempre, faci el que faci l'altre jugador. En aquest sentit, quan hem trobat l'estratègia, el joc deixa de ser realment un joc per passar a ser un problema resolt.

Problema 5. Joc d'estratègia per a dos jugadors. Poseu 15 fitxes alineades sobre la taula. Al seu torn, cada jugador retira una o dues fitxes, però si en vol treure dues només pot fer-ho si les fitxes són veïnes (no es poden agafar dues fitxes si entre aquestes n'hi ha alguna altra o bé si hi ha un o més espais buits deixats per fitxes prèviament retirades). El jugador que treu la darrera fitxa és el guanyador. Per a quin jugador (el primer o el segon) hi ha una estratègia guanyadora? L'estratègia es pot generalitzar a un nombre qualsevol de fitxes? Què passa si es poden treure més de dues fitxes en una jugada sempre que siguin veïnes?

A tots aquells que us agraden aquests jocs i en coneixeu els més habituals, no us costarà gens veure la relació entre aquest joc i l'anomenat *Margarida*; aquest darrer és igual al proposat —mateixes regles i mateix objectiu— , però inicialment les fitxes estan disposades en una circumferència (si voleu, en els pètals d'una margarida, i d'aquí ve el nom del joc). Podríeu raonar per què el canvi en la disposició inicial fa que en lloc de guanyar un jugador ho faci l'altre?

Com sempre, desitjo que passeu una bona estona pensant en els problemes i els jocs proposats avui, i fins la propera.

Referències

Deulofeu, J. (2010). *Prisioneros con dilemas y estrategias dominantes*. Col·lecció El mundo es matemático. Barcelona: RBA.

Pólya, G. (1957). *How to solve it*. Nova Jersey: Princeton University Press.