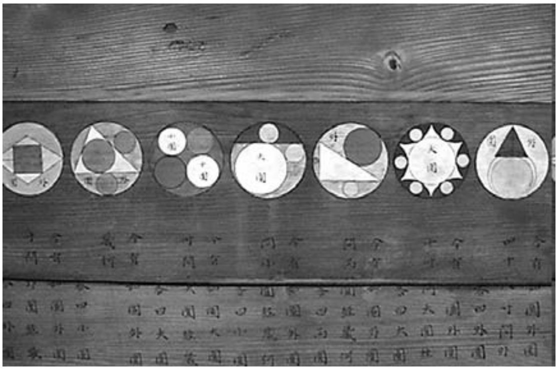
Sangakus. Contemplació i raó

Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
Institut Pons d'Icart

1. Introducció

Vaig saber de l'existència dels *sangakus* l'any 2005, a través d'un suplement de la revista *Tangente* dedicat a la cultura japonesa.[1] Entre diverses qüestions, parlava breument de la matemàtica japonesa, —*wasan*— , del període Edo (1603-1867) i d'una de les seves manifestacions, els *sangakus*.[2]



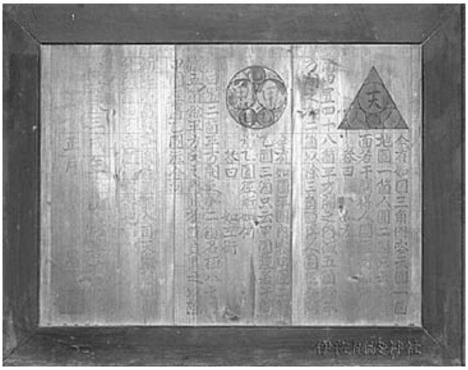


Figura 1. Fragment de *sangaku* a la prefectura de Nagasaki i *sangaku* a la prefectura d'Ehime.

Aquests consistien en tauletes de fusta que s'oferien en els temples budistes i santuaris sintoistes japonesos entre el segle XVII i la dècada dels 70 en el segle XIX. Segons Fukagawa-Rothman (2008), la més antiga conservada és de l'any 1683, i es troba a la prefectura de Tochigi. Tanmateix, en un diari del viatge de Yamaguchi Kanzan (1781-1850) pel Japó, es registren problemes de vuitanta-set *sangakus* que troba en el seu recorregut, un d'aquests datat l'any 1668. Actualment, es conserven al voltant de nou-centes tauletes i en els textos hi ha registres de més de mil set-centes que han desaparegut.

1. Vegeu Boursin *et al*. (2005).

2. *Wasan* és traduït com a *san* "matemàtica" i *wa* "japonesa". Murata (2001) matisa i tradueix *san* com a "càlcul" o "aritmètica" i el compara amb el terme "matemàtica" de connotacions diferents, perquè es deriva del terme grec *mathema* o *mathemata* ($\mu\alpha\theta\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha$) que s'atribuïa a tot allò que era tema d'estudi en la cultura occidental. De la mateixa manera tradueix *gaku* "aprenentatge" o "ciència". Així *sangaku*, que és traduït habitualment com a "tauleta matemàtica" — vegeu Fukagawa-Rothman (1998) i Horiuchi (2005)— , significaria literalment "aprenentage o ciència del càlcul".

Es penjaven de les parets i ràfecs de les teulades, i contenien problemes matemàtics, majoritàriament geomètrics, en què es presentaven composicions atractives, per la seva bellesa formal i plàstica, de cercles, polígons, el·lipses i, també en alguns casos, figures tridimensionals juntament amb els enunciats. Algunes contenien les solucions i molt poques, el procediment per arribar-hi. També hi constava el nom i el poble de l'autor i del mestre amb qui havien estudiat.

Quant a la seva presentació, imatges com les de la figura 1, provoquen d'antuvi un apreciable i suggestiu impacte visual amb independència del contingut de l'enunciat que l'acompanya, la qual cosa els ha donat el rang d'objectes artístics. La racionalització d'aquest impacte em confirma, tal com resumeixo en l'esquema de la figura 2, que la contemplació de les imatges dels *sangakus* produeix una percepció que en molts casos es tradueix en un sentiment de profund nivell estètic.[3] Aquest sentiment porta a la intuïció d'una harmonia entre les parts de la imatge, d'una realitat que s'escapa, de vegades aparentment clara, de vegades oculta en una col·lecció desordenada d'objectes. Aquesta intuïció pot ser reconduïda per activar un moviment de la raó dirigit a explicar-la, el qual pot utilitzar diversos llenguatges per fer-se present i assolir poder comunicatiu. Entre els matemàtics japonesos creadors d'aquestes imatges, el llenguatge preferit fou el de l'àlgebra amb afirmacions construïdes a partir d'algunes propietats geomètriques euclidianes de les figures implicades.

contemplació ⟶ percepció estètica ⟶ intuïció d'harmonia ⟶ moviment de la raó ⟶ explicació de l'harmonia

Figura 2. Etapes experimentades en l'observació dels *sangakus*.

2. El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*

És un lloc comú entre la majoria d'historiadors que, per endinsar-se en la comprensió de les diferents metodologies emprades en el desenvolupament de les matemàtiques per diferents civilitzacions o en diferents períodes, cal, a més de conèixer els desenvolupaments propis de la matèria, estudiar la cultura corresponent en les seves vessants diverses.[4] D'aquesta manera els costums, les condicions socials i materials, i la influència del pensament filosòfic poden guiar la comprensió sobre l'elecció dels problemes, les idees, el seu tractament i les tècniques emprades.

En aquest marc ens preguntem sobre les causes del costum de penjar *sangakus*. D'una banda, des de molts segles enrere, els fidels sintoistes feien ofrenes als déus (*kami*) en els santuaris. Creien que als *kami* els agradaven els cavalls i aquells que no n'oferien un de viu presentaven un dibuix sobre una tauleta d'un cavall pintat. Així no és estrany que es fessin altres ofrenes pintades sobre tauletes i entre aquestes els *sangakus* podien ser ofrenes de fidels devots.

Però era simple i únicament devoció o hi intervenien altres interessos? Crec que la qüestió és de naturalesa similar a la que ens podem plantejar respecte dels exvots que trobem en algunes capelles i esglésies de les nostres contrades (figura 4).

3. Una aproximació al concepte de contemplació en el camp de l'art des de la nostra cultura, el podem trobar a Mundó (2004), p. 12.

> *Contemplació vol dir aturar-se a considerar una obra d'art, mirar-la, escoltar-la amb calma i durant l'estona que calgui, a fi de descobrir-ne la bellesa formal i penetrar en el seu contingut profund.*

En què afegiria que aquesta mirada hauria de ser d'una qualitat que portés l'ànima a un estat silenciós i buit perquè la cosa observada en "ser escoltada" pogués actuar sense passar per cap filtre instal·lat en ella.

4. Vegeu Pla (2009), p. 53, i el prefaci de Robson (2008).

Figura 3. Tauletes a les prefectures de Kyoto i Fukuoka, amb dos s*angakus* al centre de la fotografia de l'esquerra.

Figura 4. Exvots d'embarcacions a l'església de Sant Magí al Portal del Carro de Tarragona.

Hi ha hagut persones molt devotes que han penjat un vaixell o algun altre objecte amb agraïment per una bona temporada de pesca, la superació d'una tempesta o la curació d'una malaltia. Alhora, hi ha l'orgull, que no té res a veure amb la devoció, que origina el reconeixement públic de la fabricació d'un exvot de gran qualitat artística. També —per què no?— , hi ha la intenció per part de l'artesà de donar-se a conèixer amb finalitats mercantils. Alguna cosa semblant pot haver passat al Japó.

És rellevant, amb vista a una interpretació d'aquest costum, el comentari del *Sanpo buttankai* ("No temeu de rectificar"; 1673), molt valorat pels historiadors, que trobem a Horiuchi (1998), p. 136,

> *Deu ser una moda? És cada cop més freqüent que s'inscriguin problemes de matemàtiques (sobre tauletes) per exposar-los aquí o allà en els santuaris. Tractant-se de tauletes votives, hom espera trobar-hi fórmules d'invocació. Quan no n'hi ha, ens preguntem què és el que pretenen realment sinó cantar lloances al propi geni.*

En el mateix article, Horiuchi fa referència a la competència entre escoles. Després d'una anàlisi de les condicions històriques en què es produeixen els *sangakus*, conclou, respecte de la concepció d'activitat d'entreteniment que s'atribueix a la seva creació, que[5]

> *La moda de les tauletes, en la qual s'ha vist durant molt de temps la prova que aquesta ciència (*wasan*) era desenvolupada com un pur entreteniment, s'inscrivia en un context històric*

5. Vegeu Horiuchi (1998), p. 145. També cita l'article Fukagawa-Rothman (1998), com un "exemple perfecte" de la manera que els observadors naïfs interpreten les tauletes.

precís marcat per la creixent difusió de la disciplina en el món rural, la professionalització dels mestres de la capital i, finalment, la forta competència entre les escoles. En aquest context, les tauletes juguen el paper d'instruments de comunicació i de publicitat còmodes d'ús, econòmics, eficaços i més espectaculars que els tractats.

Finalment, com un element més d'aquesta anàlisi, apunto que en el meu cas particular una porta d'entrada al tipus de sensibilitat japonesa me la va proporcionar la imatge inicial de l'article de la revista del meu primer contacte amb els *sangakus*. Allí es reproduïa l'estampa pictòrica de la figura 5, que després tornaria a trobar moltes vegades quan cercava informació sobre la cultura i la història del Japó en el període Edo. En aquesta pintura, es troben traces per a l'estudi del tipus de sensibilitat del caràcter japonès, de la mateixa manera que les trobem en la resta de les arts tradicionals com la cal·ligrafia, la cerimònia del te, l'elaboració de haikus, el teatre, l'arranjament floral i de jardins, i que també es manifesta en la vessant artística de les presentacions dels *sangakus*.

Figura 5. *Sota la gran onada de Kanawaga*. De la sèrie d'estampes *Trenta-sis vistes del mont Fuji*. Katsushika Hokusai (1760-1849).

Davant l'obra, tenim una percepció de desenllaç obert que hem de completar a partir de la contemplació, la qual genera un moviment intern amb consciència de no permanència i fugacitat de les coses i els fenòmens. El quadre no parla del destí dels pescadors sota la tempesta, ni del simbolisme del mont Fuji al fons, si el posa al mateix nivell que les onades —color, llum, traçada, perill d'explosió i arrabassament— , o si representa el pol oposat d'aquestes —estabilitat, seguretat, solidesa. Tampoc s'entreveu l'estat d'ànim dels pescadors, només hi ha la presència ordenada enfrontant el mar advers. Se senten protegits pel mont Fuji? Se senten amenaçats per l'onada? Se senten formant part de tota l'acció fora del temps i immersos en aquesta sense cap més plantejament? El detall de l'escuma de la gran onada és només un recurs plàstic del pintor o infon alguna característica a l'acció? L'observador es converteix en protagonista i s'obre una porta a la meditació.

Referint-se a aquesta sensibilitat, escriu Octavio Paz,[6]

Ni antes ni ahora el Japón ha sido para nosotros una escuela de doctrinas, sistemas o filosofías sino una sensibilidad. Lo contrario de la India: no nos ha enseñado a pensar sino a sentir. Cierto, en este caso no debemos reducir la palabra sentir *al sentimiento o a la sensación; tampoco la segunda acepción del vocablo (*dictamen, parecer*) conviene enteramente a lo que quiero expresar. Es algo que está entre el sentimiento y la idea. Los japoneses usan la palabra* kokoro: *corazón. Pero ya en su tiempo José Juan Tablada advertía que era una tradición engañosa: "*kokoro *es más, es el corazón y la mente, la sensación y el pensamiento y las mismas entrañas, como si a los japoneses no les bastara sentir sólo con el corazón". Las vacilaciones que experimentamos al intentar reducir este término, la forma en que los dos sentidos, el afectivo y el intelectual, se funden en él sin fundirse completamente, como si estuviese en perpetuo vaivén entre uno y otro, constituye precisamente el sentido (los sentidos) de* sentir**.**

D'altra banda, aquesta sensibilitat és del tot coherent amb els sistemes filosòfics i religiosos adoptats pels japonesos: el budisme en la seva vessant zen que busca el despertar a la realitat última par-

6. Vegeu la introducció d'Octavio Paz a *Matsuo* (1694), p. 10.

tint de la consciència de no permanència i caducitat, utilitzant el binomi meditació-acció per educar l'atenció, i el sintoisme o "via dels déus" constituïts per elements naturals, nocions abstractes i les ànimes dels morts, de manera que totes les parcel·les de la vida esdevindrien sagrades. Aquests sistemes, amb independència de les disposicions governamentals de cada període històric i malgrat alguns enfrontaments, lluny de ser antagònics foren sovint viscuts pels japonesos en qualitat de dues cares d'una mateixa religió en què els budes i els bodhisattvas i les divinitats del sintoisme eren emanacions d'una mateixa realitat i es constituïen en guies protectors cap al despertar.[7]

Figura 6. Catedral de Santa Maria, Tarragona. Església d'Orsanmichelle, Florència. Seminari, Tarragona.

Aquesta sensibilitat no és la de la tradició occidental, però es pot experimentar aïllant alguns elements. En aquest aspecte, a l'època en què vaig descobrir els *sangakus* em trobava treballant sobre dissenys d'arcs, rosasses i ornamentacions d'edificis medievals[8] (figura 6).

Una cosa és veure una obra acabada, compacta i tancada com pot ser una catedral o una demostració rigorosa i sense fissures d'un teorema matemàtic, i una altra, aïllar i observar un element com els de la figura 6 o una imatge d'un *sangaku* que no forma part d'un entramat més gran que el tanca i fins i tot l'ofega. En el primer cas, el tancament i la perfecció de l'obra ens manté a distància; en el segon cas, se'ns invita a participar, a passar de la contemplació a l'acció. Així, la primera impressió que produeixen aquests elements origina alguna cosa similar al moviment comentat entre sensació i pensament, que al meu entendre guarda paral·lelismes amb l'esquema de la figura 2 i ens apropa al caràcter japonès.

3. Introducció a la matemàtica japonesa *wasan*[9]

El desenvolupament del *wasan* coincidí amb l'època de govern dels Tokugawa, coneguda com a període Edo (1603-1868), en què el Japó restà unificat i en pau, i el poder real estava en mans del governador que instal·là el seu govern a Edo (Tòquio). Els nobles guerrers (*samurais*) hagueren de buscar noves formes de subsistir. Alguns es convertiren en mestres itinerants o d'escoles rurals (*juku*). Aquesta època coincidí amb un període de tancament i aïllament del país (*sakoku*). En la dècada del 1630, el cristianisme quedà eradicat i el 1639 els últims portuguesos foren expulsats. L'únic contacte amb Occident fou, sota grans restriccions, amb els comerciants holandesos. Aquests feien els seus intercanvis confinats en l'illa artificial de Deshima, de 200 per 70 metres, al port de Nagasaki.

7. Vegeu Robson (2007). Per a una visió de la filosofia i religió oriental en la seva vessant mística és interessant, des del nostre punt de vista de pensament occidental hereu de la tradició grega, l'aportació de Capra (1975).

8. Aquests treballs es feien en un estil similar en alguns aspectes als de Ticó (2004) i Sykes (1912), a poder ser directament sobre el terreny o bé des de l'observació de fotografies.

9. Per a una introducció, vegeu els capítols 1-3 de Fukagawa-Rothman (2008). Trobem una aportació clàssica a Smith-Mikami (1914) i un estudi aprofundit i crític amb l'anterior a Horiuchi (1994).

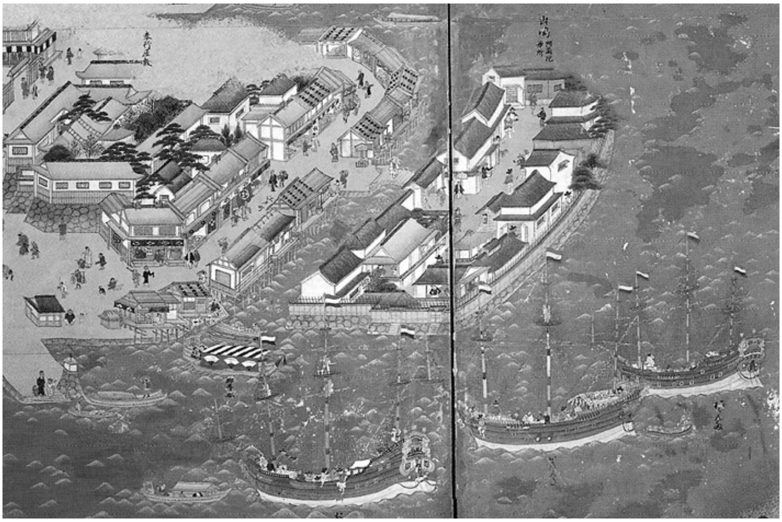


Figura 7. Fragment de paravent (*byobu*) que presenta l'illa de Deshima al port de Nagasaki.

Aquest estat de coses, junt amb la sensibilitat japonesa, influí de manera decisiva en l'aparició gradual d'una manera de fer matemàtiques pròpia (*wasan*). Aquesta presenta dues vessants no antagòniques[10]:

- Artística. Es manifesta en l'elaboració de *sangakus* de presentació molt acurada i en què el component estètic resideix tant en la plàstica com en el procediment (*jutsu*) de resolució —quan hi és— , molt concís i de gran claredat però que pot amagar una anàlisi del problema i un seguit de càlculs per aconseguir-lo de gran complexitat. N'hi havia que presentaven força complexitat i es podien resoldre gràcies a la gran activitat desenvolupada en la vessant científica. L'adjectiu *artístic* li escau no tan sols per motius estètics sinó pel tipus d'organització de les escoles, similar al model *iemoto* que seguien les escoles d'arts tradicionals japoneses.[11]
- Científica o de recerca. La trobem en el contingut dels tractats escrits per l'elit de la capital Edo, en què es desenvolupen recerques del més alt nivell[12]. Aquestes adopten i assimilen, durant bona part del segle XVII, la tradició xinesa per després trencar-hi i desenvolupar formes pròpies de recerca, principalment de la mà de Seki Takakazu (1640?-1708) i el seu deixeble Takebe Katahiro (1664-1739).

En el camp de l'àlgebra, la tradició xinesa és més una eina per resoldre problemes que no una matèria que s'estudiï per ella mateixa. Fins i tot quan s'estudia amb independència dels problemes, es fa sota la perspectiva de millorar les tècniques amb vista a la seva resolució. En canvi, en la tradició japonesa hi ha un esforç de generalització, de fer-ne una presentació abstracta i de crear una estructura dels processos de resolució. Un exemple de les conseqüències d'aquesta orientació més abstracta és la introducció d'una àlgebra *escrita*. Aquesta està inspirada en la representació xinesa que utilitza

10. Vegeu Horiuchi (1998), p. 135.

11. En la *Guia d'escoles iemoto* (XVIII-XIX) se citen, entre d'altres, dues escoles de cerimònia del te, tres escoles de flauta, dues escoles d'arranjament de flors i set escoles de matemàtiques. El *iemoto* és el cap de l'escola, exerceix una autoritat absoluta sobre els membres de l'escola, fixa els continguts del seu art i atorga les llicències als aprenents per poder impartir els seus ensenyaments que sovint només comparteixen amb els membres de l'escola. Generalment el títol és hereditari seguint la línia filial, encara que també es dóna el procediment d'adopció per poder atorgar el títol a una persona de fora de l'àmbit familiar. Un tret que diferencia les escoles de matemàtiques de la resta és el fet de no ser hereditària. Vegeu Ogawa (2001), p. 145, i Bodiford (2002), núm. 5 de l'edició de 2007.

12. A més de les referències del principi de la secció, vegeu Horiuchi (1989).

la manipulació de reglets sobre una taula, per representar nombres, operacions i equacions, però incorporen novetats com la de que les dades poden ser numèriques o literals. Així, en poder ser literals els coeficients de les equacions, poden ampliar les seves recerques i estudiar, per exemple, les condicions d'existència de solucions d'una equació o la compatibilitat de les dades d'un problema.

En geometria, gràcies a les recerques en el domini de l'àlgebra, aconsegueixen alguns resultats que avancen els descobriments occidentals, lluny de l'ús de les eines de la geometria analítica i projectiva introduïdes per Descartes-Fermat i Desargues, i de les del càlcul diferencial i integral en les recerques d'àrees, volums, màxims i mínims determinats per expressions polinòmiques com la que es pot obtenir en el problema 9 de la secció 7. Per establir les equacions algèbriques que determinaran les solucions dels problemes geomètrics, utilitzen principalment les regles de la "base-perpendicular-hipotenusa" (teorema de Pitàgores), "doble hipotenusa-perpendicular" (càlcul de l'altura d'un triangle en funció dels costats, a partir dels dos triangles rectangles que determina), i la semblança de triangles rectangles. També són de gran enginy i originalitat les seves recerques sobre el cercle.

Que la matemàtica japonesa no és hereva de la tradició occidental es justifica en una part per la política d'aïllament del país, però també pel caràcter japonès que no mostra interès a muntar un gran edifici teòric que expliqui els resultats obtinguts en les seves recerques a l'estil de la tradició iniciada en el segle VI aC a Grècia. Segons Takebe,[13]

> *Les matemàtiques consisteixen en l'establiment de regles, l'aclariment del principi dels procediments i el càlcul dels nombres. Quant a aquesta tasca, es dirà que és "conforme" si el principi és aclarit, si el procediment és explicat i si els nombres són calculats amb l'ajut d'aquest procediment. Es dirà que és "contrària" si el procediment és avaluat per mitjà dels nombres i si el principi és cercat amb l'ajut del procediment.* (*Tetsujutsu sankei*[14], 1722).

La recerca "per mitjà del principi" resideix en el geni i la intuïció nascudes de l'atenció, la qual porta a una visió directa de la font de comprensió del problema o procediment estudiat. Segons Takebe, un representant privilegiat és el mètode del *tianyuan* que, a partir del principi de la introducció de l'element desconegut i de l'establiment d'una equació a partir de les condicions del problema, permet, amb un procediment que només implica multiplicacions i sumes aplicades d'una manera recurrent, obtenir la solució d'una classe molt gran de problemes[15].

La recerca "per mitjà dels nombres" consisteix en l'elaboració de temptejos de càlcul sobre valors numèrics concrets per tal d'orientar els matemàtics sobre el resultat quan el "principi" és de difícil accés. No hi ha una visió directa de la font del problema o procediment, sinó que s'hi arriba per una marxa inversa a l'anterior. Un exemple el proporcionen els procediments per al càlcul de la longitud de l'arc i del cercle[16].

En cap moment es parla de deducció lògica a partir d'uns primers principis o de demostració tal com l'entenem en la nostra tradició. Més aviat es parla de descobriment per via intuïtiva paral·lela a l'ús del pensament que, moltes vegades, raona inductivament. Aquí tornem a aquell moviment entre pensament i sensació de què parlàvem al principi, propi del caràcter japonès i que assimila part de l'activitat matemàtica a un art.

13. Vegeu Horiuchi (1994) p. 305 i seg.

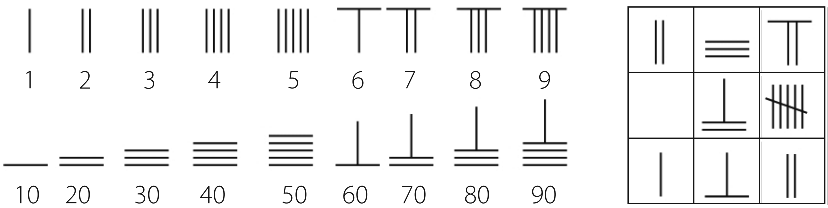
14. Segons es discuteix a Horiuchi (1994), p. 273 i 303, es traduiria: "El clàssic del procediment per acumulació o connexió" (d'exemples o casos particulars estudiats).

15. Vegeu més endavant la secció 5.2, p. 8.

16. Per a aquest últim, vegeu Ogawa (2001), p. 141-143, i Horiuchi (1994), p. 279-302.

4. Els reglets de càlcul

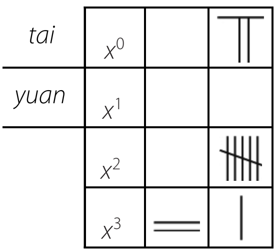
Sabem —pels textos escrits més que per les tauletes— que, per resoldre els problemes dels *sangakus*, es recorria a l'aplicació del teorema de Pitàgores i de la semblança de triangles amb llenguatge algèbric, i a la posterior resolució de les equacions resultants. Es representaven els nombres i les equacions amb reglets. En el cas japonès, es presentaven sobre un tauler quadriculat i tenien una versió escrita que permetia introduir coeficients literals. Els nombres es presentaven com es mostra a la figura 8. Les unitats d'ordre imparell, tal com es veu, al costat superior esquerre; i les d'ordre parell, al costat inferior esquerre. Els nombres negatius i positius es presentaven amb reglets de colors negre i vermell respectivament, i en la representació escrita es podia trobar un reglet inclinat sobre la representació de les unitats si el nombre era negatiu. Pel zero es deixava un espai buit i, en la representació escrita, es podia trobar representat per un petit cercle. Les operacions aritmètiques es feien manipulant els reglets[17].



2	3	7
–	7	5
1	6	2

Figura 8. Al costat superior esquerre, les unitats, centenes, desenes de miler, etc. Al costat inferior esquerre, les desenes, milers, centenes de miler, etc. A la dreta, una diferència.

Per al tractament d'equacions, es tria una línia horitzontal de referència que representa l'element desconegut (*yuan*) o la línia que representa l'element constant (*tai*). Llavors les línies immediatament inferiors representen les segones, terceres, quartes potències, etc., com es mostra en l'esquema adjunt,



equival a $21x^3 - 5x^2 + 7 = 0$, o també al polinomi $21x^3 - 5x^2 + 7$.

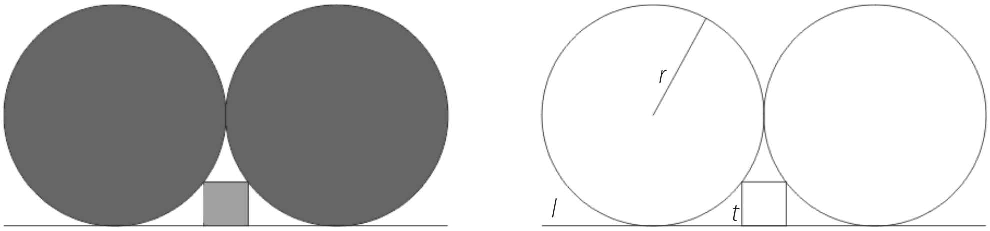
5. Estudi d'un *sangaku*

Presentem un problema de dificultat baixa[18], des de punts de vista diversos que posen de manifest la diferència dels estils i interessos entre el *wasan*, el model euclidià i el model de resolució per radicals.

Enunciat. *Dos cercles de radi r són tangents a la línia l. Tal com es mostra a la figura, un quadrat de costat t toca ambdós cercles. Trobeu t en funció de r*.

17. Vegeu Martzloff (1987), p. 185-210, Pla (2009), p. 99-103, i Smith-Mikami (1914), p. 18-29 de 2004.

18. Vegeu Fukagawa-Rothman (2008), p. 95. Agafarem els enunciats tal com allí es presenten. Aquests no recullen tota la informació de les figures implicades sinó que fan referència a la imatge que presenten.



Localització: Santuari Katayamahiko de Murahisagun Okayama (1873).

5.1. Resolució 1. Anàlisi i resolució algèbrica per radicals a l'estil de secundària

Si tracem les línies auxiliars de la figura 9, podem aplicar el teorema de Pitàgores, i s'obté[19],

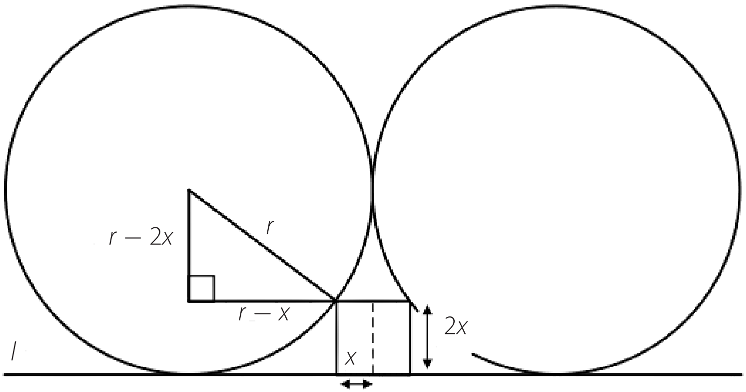


Figura 9. Línies auxiliars per a l'anàlisi.

$$r^2 = (r-2x)^2 + (r-x)^2 \;\Leftrightarrow\; 5x^2 - 6rx + r^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{6r \pm \sqrt{36r^2 - 20r^2}}{10} = \begin{cases} r \\ r/5 \end{cases}$$

Finalment, en $2x < r$, el costat del quadrat és $2x = \dfrac{2r}{5}$.

5.2. Resolució 2. Anàlisi i resolució algèbrica a l'estil *wasan*

L'àlgebra *wasan* per a l'extracció d'arrels utilitza el mètode xinès del *tianyuan*[20] amb les incorporacions de les recerques pròpies del *wasan*. Per a la resolució del nostre problema —en què, per presentar algunes de les parts del càlcul de manera més entenedora, estudiarem el cas particular de radi igual a 160 unitats— , un esbós del procediment aniria més o menys així[21].

19. Aquest és el camí que es proposa al lector a Fukagawa-Rothman (2008), p. 123, sense explicació dels mètodes de resolució d'equacions en la tradició *wasan*.

20. *Tian* "cel", *yuan* "origen". En japonès *tengen jutsu* o mètode de l'element celestial.

21. No es perd generalitat perquè la proporcionalitat entre el costat i el radi es mantenen. Per a una presentació del *tianyuan*, vegeu Horiuchi (1994), p. 91-116.

1) Elecció de l'element desconegut o incògnita i presentació dels elements resultants de l'anàlisi del problema mitjançant els reglets de càlcul. En el nostre problema, si considerem el triangle rectangle de la figura 9, els elements de l'anàlisi són,

		(1)	(2)			(3)		
Tai	x^0	0	1	6	0	1	6	0
yuan	x^1	1		—	2		—	1

(1) Meitat del costat del quadrat: x
(2) Catet: $160 - 2x$
(3) Catet: $160 - 2x$

2) Manipulació algèbrica dels elements presentats amb vista a ser relacionats en una equació mitjançant l'aplicació d'alguns dels teoremes citats anteriorment, per a la qual cosa disposen de les regles de suma, multiplicació i potències de les configuracions algèbriques de reglets (polinomis) que en resulten. L'equació queda representada per la diferència de dues expressions algèbriques que han de ser iguals. Així, les operacions per obtenir l'equació mitjançant el teorema de Pitàgores serien:

	1	6	0		1	6	0	160^2	2	5	6	0	0	$(160 - 2x)^2$
yuan		—	2	×		—	2	$2 \cdot (-2) \cdot 160$		—	6	4	0	$= 25600 - 640x + 4x^2$
								$(-2)^2$					4	

	1	6	0		1	6	0	160^2	2	5	6	0	0	$(160 - x)^2$
yuan		—	1	×		—	1	$2 \cdot (-1) \cdot 160$		—	3	2	0	$= 25600 - 320x + x^2$
								$(-1)^2$					1	

Llavors, pel teorema de Pitàgores i dividint per 5, obtenim $x^2 - 192x + 5120 = 0$. Efectivament:

2	5	6	0	0		2	5	6	0	0		2	5	6	0	0		2	5	6	0	0		5	1	2	0
	—	6	4	0	+		—	3	2	0	—						⇒		—	9	6	0	⇒	—	1	9	2
				4						1												5					1

3) Resolució de l'equació per un mètode similar al de Ruffini-Horner d'aproximacions successives. Si x_0 i $x_0 + x_1$ són les dues primeres aproximacions a l'arrel de $ax^2 + bx + c$, es pot deduir d'una anàlisi de les dues identitats següents una manera d'actuar que, entre d'altres coses, evita el càlcul de potències:

(1) $ax_0^2 + bx_0 + c = (ax_0 + b)x_0 + c$

(2) $a(x_0 + x_1)^2 + b(x_0 + x_1) + c = \big(ax_1 + (2ax_0 + b)\big)\, x_1 + (ax_0^2 + bx_0 + c)$

Així, per (1) i (2) sabem que $x_0 + x_1$ serà una bona aproximació si apliquem d'una manera adequada la regla de Ruffini tal com la coneixem —sense pensar en divisió de polinomis ni descomposicions factorials— , amb vista a aconseguir que la successió c, (1) i (2) tendeixi a zero. Això és el que feien des de, com a mínim, el segle XIII els matemàtics xinesos.[22] Concretament,

22. Vegeu Martzloff (1987), p. 231-247 de 1997, Pla (2009), p. 187-196, i Smith-Mikami (1914), p. 50-56 de 2004.

	$1\ [a]$	$-192\ \left[b\right]$	$5120\ [c]$
$30\ [x_0]$		$30\ [ax_0]$	$-4860\ \left[(ax_0+b)x_0\right]$
	$1\ [a]$	$-162\ \left[ax_0+b\right]$	$260\ \left[(ax_0+b)x_0+c\right]$
$30\ [x_0]$		$30\ [ax_0]$	
	$1\ [a]$	$-132\ \left[2ax_0+b\right]$	
	$1\ [a]$	$-132\ \left[2ax_0+b\right]$	$260\ \left[ax_0^2+bx_0+c\right]$
$2\ [x_1]$		$2\ [ax_1]$	$-260\ \left[\left(ax_1+(2ax_0+b)\right)x_1\right]$
	$1\ [a]$	$-130\ \left[ax_1+(2ax_0+b)\right]$	$0\ \left[\left(ax_1+(2ax_0+b)\right)x_1+\left(ax_0^2+bx_0+c\right)\right]$

Conseqüentment, l'arrel és $x = x_0 + x_1 = 32$ i el costat val $2x = 64$, és a dir, $\frac{2}{5}$ del radi.

5.3. Resolució 3. Anàlisi i resolució geomètrica a l'estil de la tradició euclidiana grega clàssica en el marc del teorema de Pitàgores

Una de les possibilitats de plantejament de la qüestió per part dels geòmetres grecs hagués sigut sota la forma d'un problema de construcció d'abast més general, del qual obtindríem la construcció concreta i fins i tot la relació del costat en funció del radi com un subproducte. Primerament, se'ns demanaria construir el quadrat inscrit entre els dos cercles tangents de la configuració donada i la seva recta tangent externa. Amb l'ús del mètode de l'anàlisi[23], —en el marc dels teoremes I.47 (teorema de Pitàgores) i II.7 (quadrat d'una diferència) dels *Elements* d'Euclides— , podrien transformar el problema en un d'enunciat geomètric més general. Aquesta anàlisi, que es fonamentarà en els teoremes I.47, II.1, II.4 i II.7 dels *Elements* i alguns de paral·lelisme i congruència del primer llibre, podria anar més o menys així si en simplifiquem el llenguatge[24]:

Suposem el problema resolt, és a dir, que hem construït el quadrat de costat *YL* i *Z* és el punt mitjà del costat adjacent. Tot seguit caldria descriure totes les línies traçades a la figura 10. Llavors, si observem les relacions de les figures implicades, tenim,

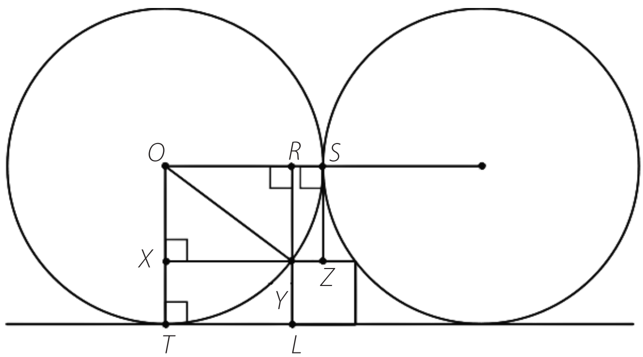


Figura 10. Línies de l'anàlisi.

23. Vegeu el llibre 7 de Papos (III) i el capítol 3 de Nolla (2006).

24. Quan escrivim AB^2 i $AB \cdot CD$ s'hauria de llegir "el quadrat construït sobre *AB*" i "el rectangle de costats *AB* i *CD*". Quan escrivim que dos segments o dos polígons són iguals vol dir que tenen respectivament igual longitud o àrea. Finalment, si escrivim $n \cdot s$, en què s és un segment o una superfície i $n \in Q$, ens referim a un segment o superfície que guarda amb s una relació n de longitud o àrea.

a) $OX^2 + XY^2 = OY^2$ [I.47]

b) $OX^2 + 2 \cdot OT \cdot XT = OT^2 + XT^2$ [II.7]

c) $XY^2 + 2 \cdot XZ \cdot YZ = XZ^2 + YZ^2$ [II.7]

d) $XZ = OS = OT = OY,\ RS = YZ$ [Per construcció i el llibre I]

e) $XT = YL = 2 \cdot YZ \ \Rightarrow\ XT^2 = 4 \cdot YZ^2$ [II.4]

f) $2 \cdot OT \cdot XT = 2 \cdot OY \cdot 2 \cdot YZ = 4 \cdot OY \cdot YZ$ [II.1]

g) $2 \cdot XZ \cdot YZ = 2 \cdot OY \cdot YZ$ [(d)]

h) Si sumem les àrees implicades en (b) i (c) tenim

$$OX^2 + XY^2 + 6 \cdot OY \cdot YZ = 2 \cdot OY^2 + 4 \cdot YZ^2 + YZ^2$$

i) Llavors $OY^2 + 6 \cdot OY \cdot YZ = 2 \cdot OY^2 + 5 \cdot YZ^2$

j) Llavors $6 \cdot OY \cdot YZ = OY^2 + 5 \cdot YZ^2 \ \Rightarrow\ \boxed{YZ \cdot \left(\frac{6}{5}OY - YZ\right) = \frac{1}{5}OY^2}$ [II.1]

D'aquesta manera, si anomenem

$$AB = \frac{6}{5}OY\ \ [= a],\ PG = \frac{1}{5}OY^2\ \ \left[= b^2\right],\ AD = YZ^2\ \ \left[= x^2\right]\ \text{ i } BD = YZ\left(\frac{6}{5}OY - YZ\right)\ \ [= x(a - x)],$$

el problema s'hauria reduït en el seu llenguatge al següent:

- Donats un segment *AB* i un quadrat *PG* de costat *PQ*, apliqueu sobre *AB*, amb defecte d'un quadrat *AD*, un rectangle *BD* d'àrea igual a la del quadrat *PG*.

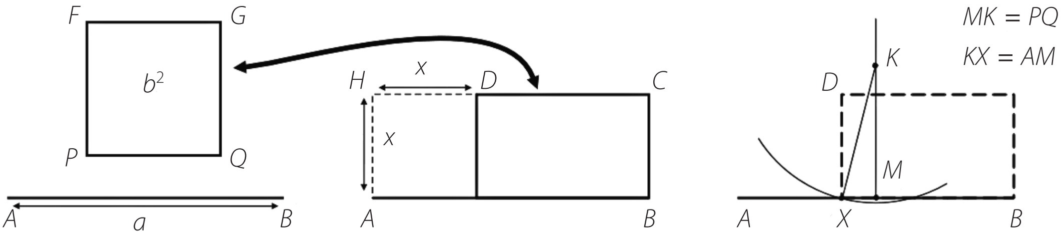


Figura 11. Enunciat i construcció.

Aquest enunciat, en el nostre llenguatge i si *r* és el radi de la circumferència, és equivalent a la resolució de l'equació amb incògnita *x*,

$$x(a - x) = b^2, \quad \text{en què} \quad a = \frac{6r}{5},\ b^2 = \frac{r^2}{5}\ \text{ i } x = \text{semicostat del quadrat a construir.}$$

En aquest punt, l'anàlisi seguiria i, un cop acabada, la presentació clàssica que farien de la solució del problema seria la d'ocultar aquesta anàlisi, donar la construcció i la demostració de la seva validesa[25]. Si simplifiquem el llenguatge, la construcció i la solució podrien anar així[26]:

25. No es presenta la continuació de l'anàlisi però podeu consultar-la, junt amb la d'altres construccions similars, a Nolla (2006), cap. 2, p. 88-102.

26. Per a la demostració, transformem el llenguatge d'Euclides en el llenguatge que Pla (2009; p. 258-281), anomena *geometria del tangram*. En aquesta es tracta de demostrar que dues figures diferents, en el nostre cas un rectangle i un gnòmon (diferència de quadrats amb un angle superposat), tenen la mateixa superfície a partir de la seva composició amb unes figures

Construcció: Considerem [figura 12 dreta],

- El punt mitjà M d'AB i el punt K sobre la mediatriu d'AB amb $MK = PQ$.
- Un dels punts X d'intersecció de la circumferència (K,AM) amb AB.

Llavors el rectangle buscat té costats BX i $XD = XA$.

Demostració: En la figura 12 podem veure que l'àrea del rectangle BD construït és igual a la del quadrat sobre PQ donat.

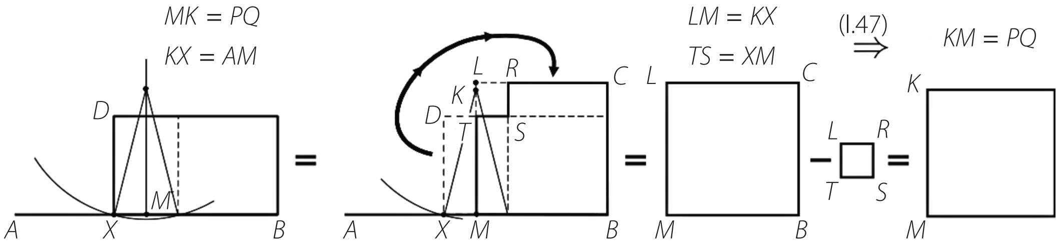


Figura 12. Àrea del rectangle BD = àrea del quadrat sobre PQ.

Els passos de la demostració són les transformacions amb conservació d'àrees de:

- El rectangle en un gnòmon.
- El gnòmon en la diferència de dos quadrats.
- La diferència de dos quadrats en un quadrat sobre $KM = PQ$, pel teorema I.47 dels *Elements*.

Finalment, el subproducte en forma d'expressió del costat del quadrat $2x = 2\,AX$ en funció del radi r, que és el que interessava als matemàtics japonesos, l'obtindrien immediatament de considerar peces q quadrades bàsiques de costat $u = r/5$. Així s'obté (recordem que $AB = a = 6r/5$, $PG = b^2 = r^2/5$):

$$AB = 6u \Rightarrow MB = 3u \Rightarrow LB = 9q \quad \text{i, en ser} \quad PG = 5q, \quad \text{es conclou que}$$

$$LS = 9q - 5q = 4q \Rightarrow MX = 2u \Rightarrow AX = MB - MX = 1u \Rightarrow 2x = 2u = 2r/5$$

5.4. Resolució 4. Anàlisi i resolució geomètrica a l'estil de la tradició euclidiana grega clàssica en el marc de la teoria de la semblança

Tot i que la resolució anterior serveix per comparar les formes de tractament algèbric i els interessos de les dues tradicions, és interessant presentar una anàlisi en el marc de la teoria de la semblança que em sembla més elegant.

- Suposem el problema resolt i siguin A el punt mitjà de la base del quadrat, BC el diàmetre perpendicular a la recta i T el vèrtex del quadrat que toca a la circumferència.
- Els triangles $\Delta\, APT$ i $\Delta\, ABC$ són rectangles $PT/PA = 2 = BC/BA$.

bàsiques. En principi, les figures bàsiques són les mateixes en les dues composicions, però es pot generalitzar el tractament amb figures bàsiques diferents. Els teoremes del final del llibre I i els del llibre II dels *Elements* són susceptibles de ser presentats en aquest llenguatge.

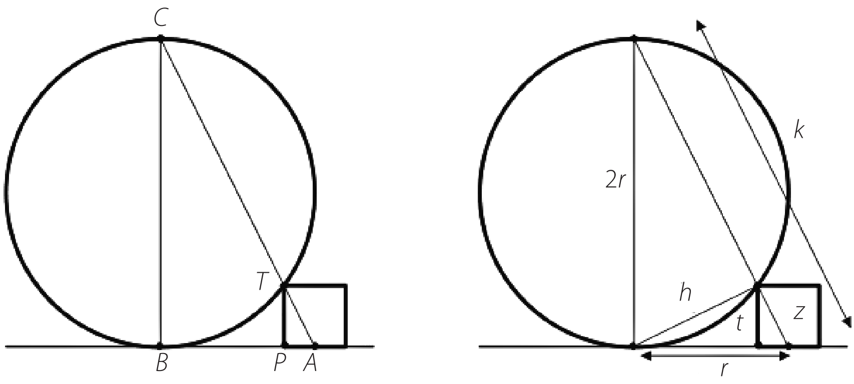


Figura 13. Anàlisi amb semblança.

- Per tant, els triangles $\Delta\,APT$ i $\Delta\,ABC$ són semblants (criteri $C - A - C$ de semblança), i tenen l'angle $\geqslant\ PAT\ = \geqslant\ BAC$.
- Conseqüentment, els punts A, T i C estan alineats i l'anàlisi s'ha acabat perquè sabem construir el segment AC i el punt T que determina el quadrat.

Obtindrem la relació entre el radi i el costat del quadrat a partir de la semblança dels triangles de l'anàlisi anterior i observant la part dreta de la figura 13.

$$\frac{r}{t} = \frac{k}{h} = \frac{k - z + z}{h} = \frac{k - z}{h} + \frac{z}{h} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

6. *Sangakus* com a recursos d'aula

A la secció 5 hem mostrat tractaments en els aspectes algèbric i geomètric dels problemes continguts en els *sangakus*. Això es tradueix en el fet que es poden utilitzar en les activitats amb alumnes de manera que es reflecteixi la complementarietat dels llenguatges de l'àlgebra i la geometria, i en diferents etapes de desenvolupament del pensament i coneixement. Si agafem com a referència el model de Van Hiele[27], es poden crear recursos i presentacions per a l'alumnat que es trobi majoritàriament implicat en els seus tres primers nivells: visualització o reconeixement, anàlisi, ordenació o classificació[28]. La idea inicial és de reproduir amb l'alumnat les diferents etapes presentades en l'esquema de la figura 2 amb vista a percebre la matemàtica com un fenomen cultural, una via d'enriquiment personal i, finalment, constatar la validesa dels seus llenguatges en el pla racional i assolir-ne els rudiments. Les etapes es poden cobrir de la manera següent:

- Davant de la impossibilitat de realitzar el treball sobre el terreny es fa una introducció de l'entorn on es troba el problema amb vista a crear un estat perceptiu favorable. A continuació, es presenta la imatge del *sangaku* que es vol estudiar sense cap tipus més d'informació. (Contemplació-percepció estètica-intuïció d'harmonia).
- Després d'uns minuts, es convida els alumnes a fer-ne una representació acurada a mà alçada i es debat sobre les dificultats que sorgeixen amb vista a una representació satisfactòria i les propietats geomètriques observades. (Intuïció d'harmonia-moviment de la raó).

27. Per a una presentació del model, vegeu Fouz-Donosti (2005).
28. Amb alumnes molt experimentats ens podríem implicar en la introducció en el nivell de deducció formal.

- Es planteja el problema per resoldre que pot ser el mateix que proposa l'enunciat del *sangaku* o qualsevol altre que hagi sorgit com el de fer-ne una representació amb regle i compàs. Aquí es pot optar per elaborar un document per a l'alumne que el guiï en l'anàlisi del problema. Finalment es fa un recull dels mètodes i les propietats utilitzades en l'estudi. També, en funció dels objectius perseguits i del tipus d'alumnat, es pot aprofundir en el seu estudi abstracte. (Moviment de la raó-explicació de l'harmonia).

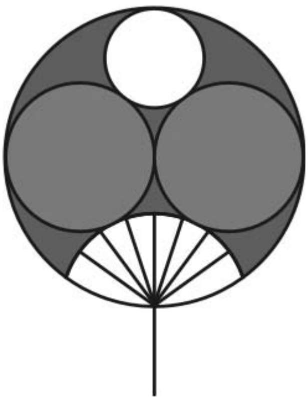
Quant al document-guia, se'n poden trobar tres a Nolla-Masip (2009), dels quals una versió del primer va ser experimentada amb alumnes de tercer d'ESO amb resultats encoratjadors. Cadascun dels tres documents es presenta amb l'estructura següent:

a) Activitat guiada per a l'alumnat.
b) Full del professor per a l'activitat que inclou el tipus d'alumnat a qui va dirigida, les qüestions curriculars implicades i una proposta d'activitats complementàries. Alguns d'aquests aspectes es desenvolupen en un annex d'eines complementàries per al professorat.
c) Proposta de resolució dels diferents apartats de l'activitat.

D'aquests documents-guia, els dos primers estan dedicats a l'estudi del problema presentat en la secció 5 i el tercer, a l'estudi del problema 2 de la secció 7.

7. Galeria de *sangakus* per a la secundària i el professorat

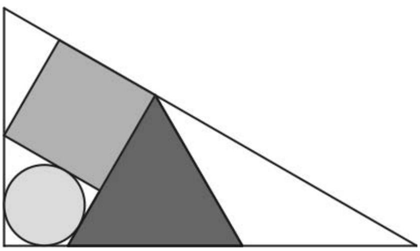
Es presenten dotze enunciats adaptats de *sangakus* de nivell de dificultat divers. A més de resoldre la qüestió proposada, es pretén fer-ne la construcció. Els sis primers són adequats per elaborar recursos a partir del segon cicle d'ESO, i els sis últims, per a l'alumnat de BAT i treballs de recerca.



Enunciat 1. Trobeu la relació entre els radis, r i R, del cercle més petit i el cercle que inclou tot el disseny, si els altres dos cercles inscrits són iguals i els seus centres estan sobre el diàmetre del cercle gran.

Solució: $r = \dfrac{R}{3}$

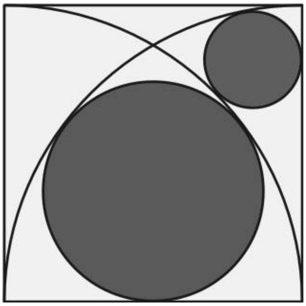
Referència: Ito *et al*. (2003, p. 231)



Enunciat 2. Si les figures inscrites en el triangle rectangle són un triangle equilàter, un quadrat i un cercle tangent en tots els seus contactes, trobeu la relació entre el costat l del triangle equilàter i el catet vertical c.

Solució: $l = \left(\sqrt{3} - 1\right)\, c$

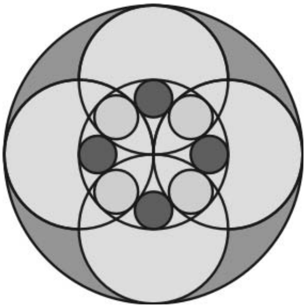
Referència: Fukagawa-Rothman (2008; p. 99) i Nolla-Masip (2009; p. 29-59).



Enunciat 3. Els arcs de les figures són quarts de cercle amb el centre sobre els dos vèrtexs de la base del quadrat de costat a. Trobeu la relació entre el radi R del cercle gran i a, i la del radi r del cercle petit i a.

Solució: $R = \frac{3}{8}\,a, \quad r = \frac{1}{6}\,a$

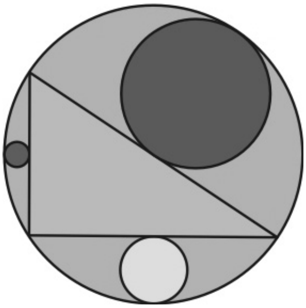
Referència: Fukagawa-Pedoe (1989; p. 41) i Huvent (2008; p. 77-80).



Enunciat 4. Entre els cinc cercles de radi a inscrits en el cercle gran de radi $2a$ hi ha dos tipus de cercles més petits inscrits tangencialment de radis $R > r$. Trobeu la relació entre R i r.

Solució: $R = 2\left(2 - \sqrt{2}\right)\, r$

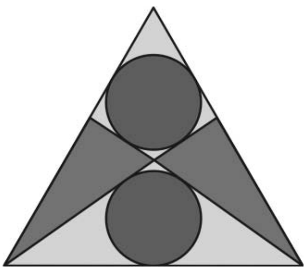
Referència: Ito *et al.* (2003; 291).



Enunciat 5. Trobeu la relació entre els tres radis, —R, r_1 i r_2— , dels cercles inscrits respectivament entre hipotenusa-catet, vertical-catet, horitzontal i la circumferència.

Solució: $R = r_1 + r_2 + \sqrt{2r_1r_2}$

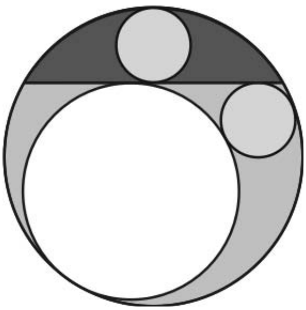
Referència: http://www.sangaku.info/images/Sangaku_Nagasaki



Enunciat 6. Els cercles inscrits entre el triangle equilàter de costat a i els dos segments tenen el mateix radi r. Trobeu la relació entre r i a.

Solució: $r = \dfrac{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\, a}{2}$

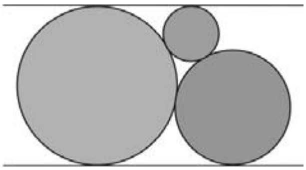
Referència: Fukagawa-Rothman (2008; p. 152).



Enunciat 7. Els dos cercles petits tenen el mateix radi r. Si anomenem a el radi del cercle circumscrit i R el radi de l'altre cercle inscrit, trobeu r en funció de R i de a.

Solució: $r = 2\sqrt{R}\left(\sqrt{a} - \sqrt{R}\right)$

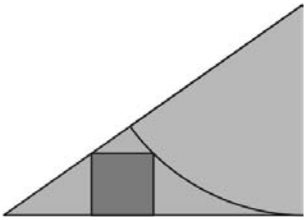
Referència: http://www.sangaku.info/images/Sangaku_Nagasaki



Enunciat 8. Els cercles inscrits entre les paral·leles són tangents. Trobeu la relació entre els radis r_1 del gran, i r_2, r_3 dels petits.

Solució: $r_1^2 = 4r_2r_3$

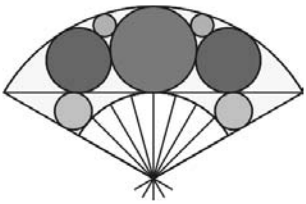
Referència: Fukagawa-Pedoe (1989; p. 4) i Huvent (2003; p. 62-64).



Enunciat 9. En un triangle rectangle de catet horitzontal a fix i catet vertical x variable tracem un sector amb centre al vèrtex superior i radi x, tal com indica la figura. Si inscrivim un quadrat de costat y —que depèn de x— , entre el sector i el triangle, trobeu el màxim valor de y.

Solució: $y = \dfrac{\left(\sqrt{2} - 1\right) a}{2}$

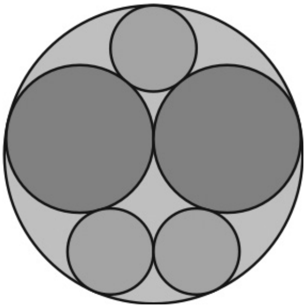
Referència: Fukagawa-Rothman (2008; p. 120).



Enunciat 10. Entre dos sectors de cercle concèntrics tals que el radi del gran és el doble del petit hi ha inscrits els cercles de la figura. Aquesta és simètrica respecte d'un eix vertical que passa pel centre dels sectors. Trobeu la relació entre els radis, $r < R$, dels dos cercles més petits.

Solució: $\dfrac{R}{r} = \dfrac{31}{2} - 8\sqrt{3}$

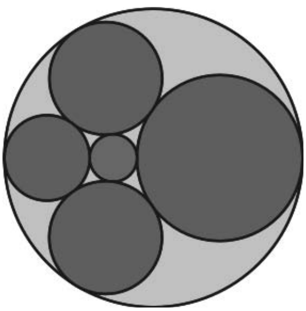
Referència: http://pagesperso-orange.fr/gery.huvent/



Enunciat 11. Tenim cinc cercles inscrits en una circumferència de radi a, amb les tangències que es mostren a la figura. Els tres més petits tenen el mateix radi r, els dos més grans, el mateix radi R. Trobeu la relació entre a i r.

Solució: $a = \left(1 + 2 \cdot \sqrt{\dfrac{4\sqrt{2} + 5}{7}}\right) r$

Referència: http://isaniwa.ddo.jp/homotsu/city/sangaku/html/sangaku07.htm



Enunciat 12. Aquest és un problema inspirat en l'observació d'alguns *sangakus* amb configuracions de cercles tangents com l'anterior. Tenim la configuració de la imatge adjunta en què tres cercles inscrits tenen els centres sobre un diàmetre del cercle exterior. Es demana de construir la figura fixant el més gran dels tres cercles citats.

Referències

Bodiford, W. M. (2002). Soke: Historical Incarnations of a Title and its Entitlements. *Keiko Shokon: Classical Warrior Traditions of Japan*, vol 3, Berkeley Heights: Koryu Books. [Reeditat a http://www.koryu.com/library/wbodiford1.html, 2007.]

Boursin, D. et al. (2005). Spécial Japon. *Tangente*, 107.

Fouz, F. (2003). Sangaku: Geometría en los templos japoneses. *SIGMA*, 22, 173-190.

Capra, F. (2007). *The Tao of Physics*. 1975. Traducció espanyola a càrrec d'Alma A. Martell, *El Tao de la Física*. Málaga: Sirio.

Eecke, P. (1933). *Pappus d'Alexandrie. La Collection Mathématique*. Bruges. [Reeditat per Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, París, 1982].

Euclides (c. 300 aC). *Elements*. [Traducció espanyola a càrrec de María Luisa Puertas amb introducció de Luís Vega (1994), *Elementos*, en tres volums. Madrid: Gredos].

Fouz, F. i Donosti, B. (2004/2005). Modelo de Van Hiele para la didàctica de la geometría. *Un paseo por la geometría*, 67-81.

Fukagawa, H. i Pedoe, D. (1989). *Japanese Temple Geometry. Problems*. Canadà: The Charles Babage Research Centre.

Fukagawa, H. i Rothman, T. (1998). Japanese Temple Geometry. *Scientific American*. [Traducció francesa: Géométrie et religion au Japon. *Pour la Science*, 249].

—(2008). *Sacred Mathematics. Japanese Temple Geometry*. New Jersey: Princeton University Press.

Heath, Sir Th. (1908). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Cambridge: Cambridge University Press. [Reeditat per Dover, Nova York, 1956].

Horiuchi, A. (1989). Sur un point de rupture entre les traditions chinoise et japonaise des mathématiques. *Revue d'histoire des sciences*, vol. 42, 4, 375-390.

—(1994). *Les mathématiques japonaises a l'époque d'Edo*. París: Librairie philosophique J. Vrin.

—(1998). Les mathématiques peuvent-elles n'être que pur divertissement? Une analyse des tablettes votives de mathématiques à l'époque d'Edo. *Extrême-Orient, Extrême-Occident*, 20, 135-156.

—(2005). La géométrie à l'usage des Dieux au Japon? Dossier: Mathématiques exotiques. *Pour la science. Édition française de Scientific American*, abril/juny, 32-37.

Huvent, G. (2008). *Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises*. París: Dunod.

Ito, E. et al. (2003). *Japanese temple mathematical problems in Nagano Pref. Japan*. Nagano: Kyoikus-hokan.

Martzloff, J. (1987). *Histoire des mathématiques chinoises*. París: Masson. [Traducció anglesa a càrrec de Stephen S. Wilson, *A History of Chinese Mathematics*. Berlín: Springer, 1997].

Matsuo, B. (1981). *Oku no hosomichi*. 1694. [Traducció espanyola a càrrec d'Octavio Paz i Eikichi Hayashiya amb introducció d'Octavio Paz, *Sendas de Oku*. Barcelona: Seix Barral].

Mundó, A. M. (2004). *La contemplació de la bellesa en l'art*. Barcelona: Amics de l'art romànic-IEC.

Murata, T. (2001). Indigenous Japanese Mathematics Wasan. *Journal of Japanese Trade and Industry*, vol. 20, 2, 50-55.

Nolla, R. (2006). *Estudis i activitats sobre problemes clau de la Història de la Matemàtica*. Barcelona: SCM-IEC.

Nolla, R. i Masip, R. (2009). *Sangakus. Recursos de geometria*. http://www.xtec.cat/∼rnolla/Sangaku/SangWEB/PDF/Sangak_4.pdf

Ogawa, T. A (2001). Review of the History of Japanese Mathematics. *Revue d'histoire des mathématiques*, 7, 137-155.

Pla, J. (2009). *Liu Hui. Nueve capítulos de la matemática china*. Madrid: Nivola libros y ediciones.

Robert, J. (2007). Quand les dieux descendent des bouddhas: l'osmose entre shintô et bouddhisme au Japon. *Religions & Histoire*, 13, 74-81.

Robson, E. (2008). *Mathematics in Ancient Iraq*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Smith, D. i Mikami, Y. (1914). *A History of Japanese Mathematics*. Chicago: Open Court Pub. Co. [Reeditat per Dover, Nova York, 2004].

Sykes, M. (1912). *Source Book of Problems for Geometry*. Norwood: Norwood Press. [Reeditat per Dale Seymour Publications, Palo Alto, 1997].

Ticó, T. (2004). *Passeig matemàtic per Catalunya*. Lleida: Pagès editors.

Vera, F. (1970). *Científicos griegos*, 2 volums. Madrid: Aguilar.

Presentació de diapositives associada a l'article:

http://www.xtec.net/∼rnolla/Sangaku/Sangakus3b.pdf

Algunes pàgines web d'interès pels seus registres, fotografies i visualitzacions:

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Sangaku.shtml

http://isaniwa.ddo.jp/homotsu/city/sangaku/sangaku_e.html

http://www.sangaku.info/

http://www.wasan.jp/index.html