Anormal y sin corte

Cómo pensar conectivas lógicas vagas

PAULA TEIJEIRO

Universidad de Buenos Aires

Director: Eduardo Alejandro Barrio

Agradecimientos

Agradezco, en primer lugar, a mi director Eduardo Barrio, quien me acompañó, ayudó y fue condición absoluta de posibilidad desde el primer día de mi carrera de licenciada hasta el último día de mi doctorado. Por haber estado siempre disponible, tanto académica como personalmente, por haberme sugerido el camino cuando este no era claro, por haberme empujado a aceptar desafíos que no hubiera tomado por mi cuenta, pero también por haber respetado mis tiempos y modos. Por último, por crear y defender un proyecto y una ética de trabajo colectivos en los que creo profundamente.

En segundo lugar, a mis compañeras del grupo de lógica de Buenos Aires: Federico Pailos, Natalia Buacar, Lavinia Picollo, Diego Tajer, Lucas Rosenblatt, Damián Szmuc, Mariela Rubin, Bruno Da Re, Ramiro Caso, Ignacio Ojea Quintana, Ariel Roffé, Omar Vázquez y Joaquín Toranzo. Las quiero y aprendo de ellas todos los días.

En tercer lugar, a las profesores Eleonora Cresto, y Alberto Moretti, quienes también contribuyeron a mi formación y a quienes admiro y respeto.

En cuarto lugar, a mis ídolos, Saúl Kripke, Hartry Field, Graham Priest, Roy Cook y Dave Ripley, a quienes, gracias al esfuerzo colectivo, tuve el placer de conocer, y que han sido inmensamente generosos con nosotras.

Tanto mi grado como mi doctorado hubieran sido imposibles de no existir la universidad pública y gratuita y el CONICET, así que agradezco a ambas instituciones, por mi formación, y por el financiamiento que he recibido para ella. Por último, agradezco a SADAF por brindarme el mejor ámbito laboral que pudiera esperar.

Contenidos

- Introducción-

1 Tesis a defender

Hacia principios del siglo XX, era aún habitual considerar a la vaguedad como un defecto del lenguaje natural, que debía ser purificado para obtener teorías formales rigurosas. Frege (1903) y Russell (1923) están entre los más famosos abogados en favor de la exterminación de la imprecisión. Con algunas notables excepciones –como Quine (1981)- es difícil encontrar una posición de esta clase en la filosofía más contemporánea. Los teóricos más importantes en la materia -como Field (2008), Keefe (2000) o Priest (2010)- proponen incluso modificar la lógica para incorporarla. Sin embargo, es sorprendente que la reticencia frente a la indeterminación aún no ha desaparecido del ámbito del vocabulario lógico en sí mismo.

La inmensa mayoría de la literatura acerca de la vaguedad se aboca al fenómeno tal como se manifiesta en predicados, mientras que una proporción notablemente menor se ocupa de los nombres. La posibilidad de que haya *conectivas lógicas* vagas no sólo es rechazada de modo universal en los pocos lugares donde es considerada, sino que ello se hace sin siquiera un análisis superficial de la cuestión. Hasta el momento, la cuestión del vocabulario lógico vago permanece fundamentalmente inexplorada.

En el presente trabajo voy no sólo a remediar este olvido, sino que voy a mostrar cómo esta exploración nos permite vincular la vaguedad con otros dos problemas de la filosofía de la lógica. El primero de ellos es la discusión clásica acerca de Tonk, la operación trivializadora propuesta por Prior (1960) para demostrar la inviabilidad del inferencialismo. El segundo es un problema –no casualmente, creo yo- casi tan poco explorado como la vaguedad de las conectivas, que es la *anormalidad*. Brevemente, las conectivas normales son aquellas conectivas no clásicas que son bien comportadas cuando los contextos en los que ocurren lo son.

Dicho esto, la hipótesis que voy a defender es la siguiente:

Ser una conectiva vaga es ser una conectiva anormal, y Tonk puede ser considerada una de ellas.

La incorporación de la vaguedad a la lógica –como algo distinto de la modificación de la lógica para lidiar con una vaguedad que no le es propia- es la última frontera de la indeterminación. Si logramos cruzarla, por un lado tendremos un buen argumento en favor del antiexcepcionalismo, esto es, la idea de que las teorías lógicas forman un continuo con otras teorías, tanto formales como empíricas. Pero además, si resulta ser un fenómeno presente de hecho en el lenguaje natural, habremos aproximado nuestros modelos a aquello que pretenden representar[1].

A continuación voy desglosar las hipótesis secundarias que servirán de apoyo a esta hipótesis principal, siguiendo su localización en las tres partes que componen esta tesis. La formulación de todas ellas requiere de conceptos técnicos, que serán oportunamente introducidos mediantes definiciones explícitas. Aquí me limitaré a dar una breve caracterización informal, a modo de adelanto.

En la parte I me dedicaré a la cuestión de cómo puede aplicarse el concepto a vaguedad a las conectivas, dado que en principio carecen de casos de aplicación y por ende, de casos limítrofes. La inspiración provendrá de la teoría de cuantificadores generalizados, que es un área de la lingüística y la computación que sí trabaja con operadores lógicos (aunque no proposicionales) vagos, como es el caso de "muchos". Respecto de ello, voy a defender las siguientes tres ideas:

(i) Hay cuantificadores vagos, y al menos algunos de ellos merecen llamarse propiamente *lógicos.*
(ii) La vaguedad de los operadores lógicos proviene del hecho de que pueden entenderse como predicados de segundo nivel.
(iii) La vaguedad en conectivas es anormalidad

La primera parte de (i) es una hipótesis relativamente aceptada en el ámbito de la ciencia, pero descuidada dentro de la lógica filosófica. Lo que no es tan evidente, y para lo cual ofreceré argumentos, es la afirmación de que esos cuantificadores sean lógicos. Por otra parte, (ii) nos muestra que la vaguedad lógica no pertenece a una categoría esencialmente distinta, sino que es del mismo tipo que la vaguedad de predicados. Respecto de (iii), el modo de distinguir dentro de los cuantificadores difusos entre los que son vagos y los que no, es a partir del hecho de que puedan arrojar outputs indeterminados al recibir inputs precisos. Esta misma propiedad, en términos de tablas de verdad, se conoce como anormalidad.

[1] La idea de que la lógica formal pretende modelar el lenguaje natural está en Edgington (1997) y Cook (2002), y la desarrollaremos en el capítulo 3.

En la segunda parte voy a mostrar que, a la luz de lo dicho en la parte I, la clásica discusión propuesta por Prior acerca de la conectiva Tonk puede considerarse bajo otra perspectiva. En particular, voy a defender que:

(i) Tonk puede recibir una interpretación correcta y completa en una lógica no transitiva, que la hace una conectiva anormal.

donde una lógica no transitiva es aquella donde puede ocurrir que $A \vdash B$ y $B \vdash C$ pero $A \nvdash C$. De esto se sigue que:

(ii) La lógica no transitiva es el mejor marco teórico para lidiar con conectivas vagas.

Esto quiere decir que mi propuesta, por un lado, se funda en un concepto modelo-teórico, y por el otro, descansa sobre el abandono en alguna medida de la lógica clásica. En particular, lo que fallan son algunas metainferencias, entendidas como relaciones de implicación entre inferencias –razón por la cual llamaré a estas lógicas *submetanferenciales*. El rechazo de metainferencias clásicas y la valorización de la teoría de modelos plantea dos problemas, de los que me ocuparé en la tercera parte.

El primero de estos problemas es la cuestión de si esta valorización implica una crítica al inferencialismo y, de ser así, si mi posición es víctima de la paradoja de Knot. Esta presunta antinomia sería una versión de la más famosa objeción tonkiana, pero dirigida a los "semanticistas", entendidos como quienes se oponen a una teoría del significado inferencial, y defienden en su lugar una semántica basada en la teoría de modelos. Respecto de esto voy a defender que

(i) No existe la paradoja de Knot, sino que es un pseudo-problema fundado en una mala comprensión del concepto valuacional de validez metainferencial.

Esta mala comprensión se basa en particular en caracterizar las metainferencias globalmente –es decir, exigiéndoles que preserven validez-, lo cual es equivalente a caracterizar un sistema de prueba mediante el conjunto de reglas admisibles en lugar de las derivables. Esto va a ser un problema para los casos en los que el lenguaje sea pobre (en un sentido particular que veremos); sin embargo, ello no implica que la noción de metavalidez correcta no sea la global. Lo que voy a sostener es que:

(ii) La noción global de metavalidez es la definición adecuada, aunque la definición local es una herramienta importante cuando el lenguaje no es lo suficientemente expresivo.

en donde una definición local pide además la preservación de los valores de las fórmulas en los modelos (ver, por ejemplo, Dicher & Paoli (2018)).

De toda esta discusión espero que se siga que

(iii) La disputa entre inferencialistas y "semanticistas" es fundamentalmente verbal.

y que si aquí privilegio el enfoque modelo-teórico es porque de hecho no existe una definición del concepto de normalidad en un marco de teoría de la prueba.

El segundo problema del que se ocupa la parte III tiene que ver con la no-clasicidad de la lógica elegida. En particular, de si es posible recuperar las metainferencias clásicas que se pierden a causa de la presencia de vaguedad en el lenguaje –lo que se conoce como *Proyecto de recaptura clásica*. Respecto de eso, voy a mostrar que:

(i) La presencia de conectivas vagas no impide la recaptura clásica, pero la complejiza formalmente, y le quita al menos parte del sentido.

De todo estos puntos que quiero establecer, algunos de ellos se basan en cuestiones filosóficas, mientras que otros tienen un componente formal que debe ser, no simplemente defendido, sino demostrado formalmente. Los siguientes son los resultados formales que voy a probar a lo largo de todo el trabajo:

(i) Voy a ofrecer una interpretación correcta y completa de la conectiva Tonk en términos de valuaciones estricto-tolerantes.
(ii) Voy a ofrecer un cálculo de secuentes de cuatro lados que es correcto y completo respecto Knot.
(iii) Voy a probar que el concepto de metavalidez absolutamente global coincide con el de derivabilidad en lógicas no transitivas o reflexivas.
(iv) Voy a probar que el concepto de validez global coincide con el de validez local, para metainferencias esquemáticas, cuando la lógica es veritativo funcional y completa respecto de las constantes.

2 Preliminares técnicos

2.1 Lenguajes y notación

Respecto de los lenguajes formales, trabajaremos básicamente con lenguajes proposicionales $\mathcal{L}_P$, con una signatura $\Sigma_P=\{\vee, \neg, \wedge, \rightarrow\}$, y sus extensiones $\Sigma_P \cup \{\otimes, \oplus\}$, $\Sigma_P \cup \{\circ\}$. Sin embargo, en algunos casos precisaremos elevar estos lenguajes a un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}_{PO}$ mediante la incorporación de predicados, constantes, variables y cuantificadores del modo usual. En todos los casos, $FOR_{\mathcal{L}}$ es el conjunto de fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$, definidas recursivamente.

Respecto del metalenguaje, voy a usar letras mayúsculas latinas como metavariables de fórmulas, y letras griegas minúsculas como nombres de algunas fórmulas particulares, como λ para el mentiroso, o κ para la oración de Curry. Las letras griegas mayúsculas representarán conjuntos. El signo "&" lo usaremos para significar "y", mientras que $\Rightarrow$ va a significar el condicional. También aparecerá vocabulario propio del lenguaje de la teoría de conjuntos: el símbolo de pertenencia $\in$, el de inclusión $\subseteq$, los de las operaciones de unión $\cup$, intersección $\cap$, diferencia $-$, y el conjunto potencia $P(\Gamma)$.

Un poco menos estándar será el uso de la expresiones $\{\Gamma\}_p$ como el nombre del conjunto $\{p|\ p$ es una subfórmula de alguna $A\in\Gamma\}$ y $\odot\Gamma$ como nombre del conjunto $\{\odot A|\ A\in\Gamma\}$, para cualquier operador unario $\odot$. En el caso en que tengamos la expresión $\odot\{\Gamma\}_p$, debe tomarse $\odot$ como aplicado a $\{\Gamma\}_p$. Por ejemplo, $\neg\{p\wedge q, r\}_p$ sería el conjunto $\{\neg p, \neg q, \neg r\}$.

Los nombres de todas las lógicas empleadas serán indicados con sus iniciales en inglés en negrita, como por ejemplo **CL** –lógica clásica-, **K3** –Strong Kleene- **ST** –Strict-Tolerant. Los cálculos correspondientes serán indicados con la letra S sin serifas.

Independientemente de su país de origen, la inmensa mayoría de la bibliografía que se produce sobre estos temas, al menos a partir del siglo XX, está publicada en inglés. Todas las citas que aparecen en este trabajo han sido traducidas al castellano, y en todos los casos las traducciones son mías –razón por la cual hago esta indicación general en lugar de aclararlo en cada caso.

2.2 Lógica, valuaciones y secuentes

Definición (*Inferencia*) Una inferencia-caso en $\mathcal{L}$ es un par $\langle\Gamma, \Delta\rangle$ de conjuntos de fórmulas de $\mathcal{L}$. Una inferencia-tipo es un conjunto de inferencias-caso.

Definición (*Lógica*) Una lógica (de nivel 1) es un conjunto de inferencias.

Vamos a usar $\Gamma\Rightarrow\Delta$ como un nombre en el metalenguaje que refiere a la inferencia de Γ a Δ. Cuando Γ y Δ son ambos conjuntos con más de un elemento, se conoce al enfoque como *Set-Set*, y cuando alguno de los dos es sólo una fórmula, como *Set-Fórmula* o, menos habitualmente, *Fórmula-Set*.

En principio, no imponemos ninguna restricción –como por ejemplo, clausura bajo transitividad- sobre el conjunto de inferencias para que ellas constituyan una lógica, lo cual es importante para determinados resultados de la tercera parte. Luego, podemos imponer requisitos adicionales para restringir esos conjuntos de dos maneras: mediante conjuntos de modelos, o mediante sistemas de prueba. En sentido laxo, y cuando no genere confusiones, a veces llamaremos "lógica" a esas clases de modelos o sistemas.

En primer lugar, presentamos los conceptos modelo-teóricos:

Definición (*Valuación*) Una valuación para un lenguaje $\mathcal{L}$ es una función ν del conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$ al conjunto de valores de verdad τ.

Las valuaciones son modos de interpretar los lenguajes formales, pero no son los únicos que usaremos. A una interpretación en sentido más general la llamaremos *modelo.* Las lógicas son caracterizadas por los espacios de valuaciones mediante relaciones de consecuencia definidas sobre espacios de valuaciones:

Definición (*Espacio de Valuaciones*) Un espacio de valuaciones es un conjunto de valuaciones.

Definición (*Relación de consecuencia valuacional*) Una relación de consecuencia valuacional $\Gamma\vDash\Delta$ es una relación entre dos conjuntos de fórmulas Γ y Δ, determinada por el valor que reciben sus miembros en los elementos del espacio.

Podemos así generar una lógica diciendo que es el conjunto de todas y sólo las inferencias $\Gamma\Rightarrow\Delta$ tales que $\Gamma\vDash_L\Delta$. A veces escribiremos $\Gamma\Rightarrow\Delta\in\vDash$ en lugar de $\langle\Gamma, \Delta\rangle\in\vDash$.

La segunda manera de determinar una lógica es mediante sistemas de prueba. A lo largo de esta tesis, el sistema de prueba que principalmente tomaremos como referencia serán los cálculos de secuentes (ver Gentzen (1934), Negri (2001)):

Definición (*Secuente*) Un secuente es una expresión del metalenguaje de la forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$, donde Γ y Δ son conjuntos finitos de fórmulas, a los que llamaremos, respectivamente, el prosecuente y el postsecuente.

Dos aclaraciones respecto de los elementos de un secuente. En primer lugar, para algunos propósitos es necesario que tengan algo más de estructura que la que tiene un simple conjunto de fórmulas. Mencionaremos oportunamente el concepto de *multisecuente*, pero dado que no trabajaremos con lógicas subestructurales que requieran de estas especificidades, no nos detendremos en ello. En segundo lugar, siguiendo la tradición, los conjuntos son siempre *finitos*. Dado que las lógicas que usaremos son todas compactas, esto tampoco representa un inconveniente.

Definición (*Metainferencia*) Una metainferencia-caso en $\mathcal{L}$ es un par $\langle \Sigma, \sigma \rangle$, donde Σ es un conjunto de inferencias-caso y σ es una inferencia-caso. Una metainferencia-tipo es un conjunto de metainferencias-caso.

Esta definición de metainferencia, como la de inferencia, es lo más general posible. Por ejemplo, no exige que los elemento de una metainferencia tipo compartan ninguna estructura en común. A veces, a las metainferencias que sí lo hacen se las llama *reglas* (por ejemplo, Dicher y Paoli (2018)). Sin embargo, me parece mejor reservar el término *reglas de inferencia* para referir a metainferencias que no sólo tienen esa propiedad estructural, sino que además se encuentran en el contexto de un cálculo:

Definición (*Cálculo de secuentes*) Un cálculo de secuentes es un conjunto de reglas de inferencia.

Los sistemas de prueba determinan entonces lógicas del siguiente modo:

Definición (*Relación de consecuencia de teoría de la prueba*) Una relación de consecuencia de teoría de la prueba $\Gamma \vdash_S \Delta$ es una relación entre dos conjuntos de fórmulas Γ y Δ, dada por la existencia de una derivación del secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ en el sistema S.

Para poder hablar acerca de sistema de secuentes, es preciso entender los siguientes conceptos:

Definición (*Fórmulas en un cálculo de secuentes*)

- *Formulas laterales*: Fórmulas que aparecen invisibles en las reglas, dentro de los conjuntos que figuran en ellas. Constituyen el *Contexto.*
- *Fórmula principal*: Fórmula que aparece en la conclusión de la regla y no es lateral.
- *Fórmulas auxiliares*: Fórmulas que aparecen en las premisas y no son laterales.

Por un lado, las reglas son todas de introducción, y vienen agrupadas en dos grupos: reglas de introducción a la izquierda y reglas de introducción a la derecha. Por otro lado, los cálculos de secuentes tienen dos tipos de reglas: (i) las estructurales, que se caracterizan porque sus fórmulas principales no involucran ninguna conectiva en particular; y (ii) las operacionales, que son las que definen a cada operador. En cuanto a las relaciones entre ambos grupos, Paoli (2002) resume las posibles interpretaciones del siguiente modo:

(a) Nihilismo (Negri y Von Plato (2001)): Las reglas operacionales fijan el significado de las conectivas, mientras que las estructurales no aportan significado.
(b) Subordinacionismo (Wansing (2000)): Las conectivas tienen un significado operacional y otro global, determinado por las reglas estructurales.
(c) Dualismo (Hacking (1979)): Las reglas estructurales fijan los hechos relativos a la deducibilidad y valen para lenguaje sin conectivas. Las reglas operacionales fijan el significado de las conectivas y son aceptables sólo si no afectan esos hechos en el lenguaje sin conectivas.
(d) Relativismo (Došen (1989)): Las reglas operacionales hacen explícito el significado de operadores de un lenguaje de nivel superior, determinado por reglas estructurales, en un lenguaje de nivel inferior.

En la siguiente subsección presentaré las lógicas básicas a las que haré referencia a lo largo de la tesis, y sobre las cuales se basan en algún sentido las otras que iremos viendo a medida que avancemos.

2.2.1 Lógica clásica

Desde el punto de vista valuacional, llamaré *lógica clásica* (**CL**) al conjunto de inferencias validadas por el espacio de valuaciones booleanas, con el valor 1 como designado. Filosóficamente, no precisa demasiada introducción, puesto que ha sido el estándar desde Aristóteles en adelante.

Desde el punto de vista de su teoría de la prueba, el siguiente cálculo que llamaré simplemente SCL –y fue propuesto por Genzten (1934)-, es completo y correcto respecto de las inferencias que caracterizamos modelo-teóricamente:

$$\frac{}{A \Rightarrow A} \quad \text{(Identidad)}$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Sigma \Rightarrow A, \Pi}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Pi} \quad \text{(Corte)}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \quad \text{(MonI)} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \quad \text{(MonD)}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \quad \text{(ContI)} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \quad \text{(ContD)}$$

$$\frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta} \quad (\rightarrow\text{I}) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B} \quad (\rightarrow\text{D})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} \quad (\neg\text{I}) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A} \quad (\neg\text{D})$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} \quad (\vee\text{I}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} \quad (\vee\text{D1})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} \quad (\vee\text{D2})$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} \quad (\wedge\text{I1}) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} \quad (\wedge\text{I})$$

$$\frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} \quad (\wedge\text{I2})$$

El aspecto puramente estructural de SCL lo llamaré –al igual que hace Ripley- BC, por *bare calculus*, o *el cálculo desnudo.* Cualquier lógica que tenga como base a BC se llama *tarskiana.*

La lógica clásica ha sido considerada por muchos autores –encabezados por Kripke (1975) y Priest (1979)- como insatisfactoria para dar cuenta de diversos fenómenos, en particular el de las paradojas semánticas. Estas ocurren cuando consideramos ciertas oraciones autoreferenciales que involucran predicados tales como *Verdad* o *Satisfacción*. Si bien la responsabilidad de la circularidad en la generación de antinomias ha sido puesta en duda (principalmente, por la existencia de las paradojas tipo Yablo (1993)), podemos dejar el problema de lado y ocuparnos de los casos menos controversiales como la Paradoja del Mentiroso:

(λ) La oración λ es falsa.

En el lenguaje natural, la posibilidad de formular la oración λ, y el hecho de que aparentemente sea significativa, ya resulta paradójico. En el contexto de teorías formales, si estas son suficientemente expresivas como para desarrollar su propia teoría de la sintaxis –como ocurre, por ejemplo, con la aritmética- la equivalencia entre ciertas fórmulas y su propia predicación de falsedad puede probarse como teorema –por ejemplo, vía el teorema de diagonalización.

Esto da lugar al teorema de Tarski (1935), que consiste en la limitación de nuestras posibilidades de incorporar a esas teorías predicados veritativos cuya aplicación sea irrestricta, y respete los principios para la verdad, conocidos como esquema T:

(T) $Tr\ulcorner A \urcorner \leftrightarrow A$

O también en su versión de reglas T, aquí en sus versiones de nivel uno y dos:

$A \Rightarrow Tr\ulcorner A \urcorner$ (T-in) $Tr\ulcorner A \urcorner \Rightarrow A$ (T-out)

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, Tr\ulcorner A \urcorner \Rightarrow \Delta}\ (TI) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow Tr\ulcorner A \urcorner, \Delta}\ (TD)$$

Los símbolos $\ulcorner A \urcorner$ indican el nombre del numeral que funciona como código de Gödel de la oración *A*. La codificación de Gödel es un modo de representar la sintaxis de un lenguaje, asignando a cada símbolo y secuencia de símbolos, un número único. De este modo, una fórmula aritmética que usualmente puede interpretarse como siendo acerca de números, puede ahora leerse como siendo acerca de expresiones lingüísticas, oraciones o derivaciones. Los detalles de cómo asignar estos códigos pueden completarse de diversas maneras, cuyas diferencias son irrelevantes para nosotras.

Si bien la lógica clásica puede resolver las paradojas abandonando alguno de los principios de la verdad, quienes estén dispuestas a un salto más arriesgado pueden tomar como salida el abandono de alguno de sus principios. A continuación presentaré tres de las teorías que permiten hacer esto.

2.2.2 K3

Una de las lógicas no-clásicas más populares es sin dudas una de las que propone Kleene en (1938), conocida hoy en día como *Kleene Fuerte* (**K3**) (para distinguirla de Kleene débil, de la cual no me ocuparé en este trabajo). Desde el punto de vista de sus modelos, **K3** es una lógica trivaluada, perteneciente a la familia de las lógicas *Paracompletas*, esto es, aquellas que abandonan el principio de tercero excluido:

(PTE) $A \vee \neg A$

O, puesto de otro modo:

Definición *(Paracompletitud)* Una lógica **L** es *paracompleta* si $B \nvdash_{L} A, \neg A$ para algún par de fórmulas *A* y *B*.

Su semántica está conformada por las siguientes funciones de verdad:

$\to$	1	½	0
1	1	½	0
½	1	½	½
0	1	1	1

$\wedge$	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	0

$\vee$	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	½
0	1	½	0

	$\neg$
1	0
½	½
0	1

Sumadas a la definición de consecuencia lógica como preservación del valor designado 1:

Definición (*Consecuencia Lógica en **K3***) $\Gamma \vDash_{K3} \Delta$ si y sólo si en toda valuación en que las fórmulas de Γ valen 1, alguna fórmula de Δ vale 1 también.

El 1 aquí claramente debe ser interpretado como verdad, el 0 como falsedad, y el ½ como un *gap*, es decir, la ausencia de valor o su indeterminación. Tanto valuaciones que vayan de premisas verdaderas a conclusiones indeterminadas como aquellas que van a conclusiones falsas (o alguna combinación de ambas) constituyen contraejemplos para esta lógica.

Respecto de las paradojas semánticas, Kripke (1975) demuestra que la interpretación del predicado veritativo como un operador de salto sobre modelos **K3** tiene puntos fijos (una jerarquía infinita de ellos, ordenados por inclusión formando un orden parcial desde el punto fijo minimal hasta los maximales, ver Fitting (1986)), lo cual significa que existen modelos de Kleene para la verdad. Y si bien este predicado no satisfará el esquema (T) -cuya aceptación irrestricta era una de las principales motivaciones del abandono de la lógica clásica- al menos sí validará las reglas.

Respecto de las paradojas de vaguedad, estos modelos permiten invalidar la existencia de un límite preciso entre los objetos a los que se aplica un predicado vago y aquellos a los que se aplica su negación, aunque no evitan la postulación de un límite preciso entre esos dos grupos y el de los objetos para los cuales la aplicación del predicado es indeterminada. Este fenómeno se conoce como "vaguedad de orden superior", y es semejante al fenómeno de las revanchas para las paradojas semánticas.

En relación a su clasicidad, **K3** sólo comparte el conjunto de contradicciones -en el sentido de aquellas fórmulas que no reciben 1 en ningún modelo- con **CL**. Las inferencias válidas son sólo un subconjunto propio de las clásicas, mientras que el conjunto de valideces –en el sentido de aquellas fórmulas que reciben 1 en todo modelo- es directamente vacío. Mientras que la no-tautologicidad de principios como PTE es vista como un aspecto central de la propuesta, y por ende, no como uno de sus defectos, la invalidez de otros –en particular, el principio de Identidad ($A \rightarrow A$)- son considerados daños colaterales indeseables.

En cuanto a teorías de la prueba, existen diversas presentaciones en cálculo de secuentes que son correctas y completas respecto de esta clase de modelos. Una de ellas se encuentra en Avron (1991), y consiste en tomar un cálculo estructural con las reglas usuales para la conjunción o la disyunción y agregarle un axioma de explosión, dos reglas de Doble negación, y las reglas de interacción de esa conectiva y la negación. Por ejemplo, si nos basamos en la conjunción, el cálculo sería el siguiente, que llamaré SK3:

$$\frac{}{A, \neg A \Rightarrow} \quad \text{(Explosión)}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\neg A, \Delta} \ (\neg\neg D) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \Rightarrow \Delta} \ (\neg\neg I)$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \neg B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(A \wedge B) \Rightarrow \Delta} \ (\neg\wedge I) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg(A \wedge B), \Delta} \ (\neg\wedge D1)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \neg B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg(A \wedge B), \Delta} \ (\neg\wedge D2)$$

El condicional puede definirse del modo usual a partir de $\wedge$ o $\vee$ y $\neg$, pero no puede generarse un cálculo de secuentes del mismo modo -esto es, agregando las reglas clásicas y sumándoles otras para la interacción del condicional y la negación. El motivo es que **K3** invalida la regla del condicional a la derecha. Si quisiéramos tenerlo como primitivo, una posibilidad –algo forzada- es agregar las reglas para $\wedge$ o $\vee$, pero expresadas con la correspondiente traducción en términos de $\rightarrow$ y $\neg$.

2.2.3 LP

No todas las definiciones de paraconsistencia dividen el espacio lógico de la misma manera. La idea principal que comparten es el rechazo del principio que establece que de una contradicción se sigue cualquier cosa, también conocido como EFSQ o Explosión. El problema es cómo formular exactamente esta idea. Aquí vamos a usar la siguiente caracterización, que es probablemente la más usual:

Definición *(Paraconsistencia)* Una lógica **L** es *paraconsistente* si $A, \neg A \nvdash_{L} B$ para algún par de fórmulas A y B.

La lógica de las paradojas, o **LP**, fue originalmente sugerida por Asenjo en (1966) y sistematizada y popularizada por Priest (1979) -quien luego en algunos de sus textos propone abandonarla en pos de conseguir condicionales más fuertes. En la actualidad, sólo contados autores –como por ejemplo, Beall (2011), y en parte Priest (2017)- se comprometen con la versión de **LP** y su condicional material.

Desde el punto de vista de la clase de sus modelos, **LP** comparte las funciones de verdad con **K3**, pero en este caso, el tercer valor debe ser interpretado como un cúmulo o *glut* de los valores verdadero y falso. De modo acorde, la definición de consecuencia lógica se adapta para rescatar el concepto clásico de preservación de verdad, aunque ahora ya no entendida como excluyente de la falsedad:

Definición *(Consecuencia Lógica en **LP**)* $\Gamma \vDash_{LP} \Delta$ si y sólo si en toda valuación en que las fórmulas de Γ valen 1 o ½, alguna fórmula de Δ vale 1 o ½ también.

LP comparte con **CL** el conjunto de valideces -esta vez en el sentido de aquellas fórmulas que no reciben 0 en ningún modelo. El conjunto de inferencias válidas es nuevamente un subconjunto del de las clásicas, mientras que el de contradicciones –entendido como las fórmulas que reciben 0 en todo modelo- es vacío. De hecho, ambas lógicas son duales en el siguiente sentido (ver Cobreros (2013)):

Definición *(dualidad)* **L** y **L*** son duales si $\Gamma \vDash_{L} \Delta$ si y sólo si $\neg\Delta \vDash_{L^*} \neg\Gamma$

Un sistema de secuentes apropiado SLP puede obtenerse del mismo modo que para **K3**, pero reemplazando el axioma de explosión por uno de implosión (ver también Avron (1991)):

(Implosión) $\Rightarrow A, \neg A$

En cuanto a su tratamiento de las paradojas, **LP** puede incorporar un predicado veritativo mediante una construcción de punto fijo análoga a la de **K3**, y también carece de un condicional adecuado, siendo en este caso el Modus Ponens el principio básico que falla. Por el otro lado, en relación a Sorites, se nos presenta el mismo problema de vaguedad de orden superior que antes, aunque el veredicto respecto de la paradoja no es que el principio de tolerancia no sea verdadero –lo es, dado que ½ es entendido también como verdad- sino que se trata de un razonamiento inválido, ya que descansa en sucesivas aplicaciones de Modus Ponens.

2.2.4 FDE

Hay razones para pensar que la decisión entre adoptar *gaps* o *gluts* es más una cuestión de gustos que un posicionamiento sustantivo, dada la dualidad de ambas lógicas. No obstante, podríamos creer que no sólo se trata de fenómenos diferentes, sino que de hecho el lenguaje manifiesta ambas clases. **FDE** es la lógica que resulta de ello, y fue desarrollada por Dunn (1976) y Belnap (1977), con aplicaciones relevantistas en mente –esto es, pensando en invalidar argumentos en donde el contenido de las premisas no incluye al de la conclusión.

Sus tablas de verdad son las siguientes, en donde ⅔ representa un *glut* y ⅓ representa un *gap*:

$\wedge$	1	⅔	⅓	0
1	1	⅔	⅓	0
⅔	⅔	⅔	0	0
⅓	⅓	0	⅓	0
0	0	0	0	0

$\vee$	1	⅔	⅓	0
1	1	1	1	1
⅔	1	⅔	1	⅔
⅓	1	1	⅓	⅓
0	1	⅔	⅓	0

$\rightarrow$	1	⅔	⅓	0
1	1	⅔	⅓	0
⅔	1	1	⅓	⅓
⅓	1	⅔	1	⅔
0	1	1	1	1

	$\neg$
1	0
⅔	⅔
⅓	⅓
0	1

La relación de consecuencia que les corresponde es paraconsistente, en el sentido en que se pide que se preserve verdad en sus dos formas (i.e., sola o como parte de un *glut*):

Definición (*Consecuencia Lógica en **FDE***) $\Gamma \vDash_{FDE} \Delta$ si y sólo si en toda valuación en que las fórmulas de Γ valen 1 o ⅔, alguna de las de Δ también lo hace.

El sistema de secuentes se obtiene eliminando explosión de SK3, pero en lugar de reemplazarlo por Implosión, como hicimos para sistematizar **LP**, no lo reemplazamos por nada.

Respecto de las paradojas, tanto semánticas como de vaguedad, **FDE** no suele ser adoptada, en tanto la solución que tiene para ofrecer es la misma que o bien **K3** o bien **LP**, y tiene la desventaja adicional de ser más débil que ambas. No obstante, vale la pena señalar que si contamos con ambos tipos de valores no clásicos, podemos asignar un *glut* a oraciones como λ, y distinguirlas de otras oraciones que son igualmente infundadas, pero que no generan contradicciones, como es el caso de la oración del honesto:

(η) La oración η es verdadera.

3 Estructura de la tesis

Como adelanté, la tesis se divide en tres partes, cada una de ellas compuesta a su vez por cuatro capítulos. Cada capítulo se inicia con una introducción, en la cual presentaré algunas consideraciones preliminares o históricas, y adelantaré los distintos apartados y lo que se defiende en ellos. Del mismo modo, cada capítulo se cierra con una conclusión parcial, que sintetiza lo expuesto hasta el momento y adelanta lo que vendrá.

La primera parte, llamada *Anormalidad*, se ocupa de la caracterización de la vaguedad de las conectivas. El primero es una introducción al problema de la vaguedad en general, y una revisión de las consideraciones existentes respecto de las conectivas. El segundo capítulo se ocupa de la teoría de la conflación, una propuesta de Ripley que tiene la ventaja de ser aplicable en algún sentido a los operadores proposicionales. En el tercer capítulo veremos la teoría de cuantificadores generalizados, y cómo es que se caracteriza la vaguedad para ellos. Por último, en el cuarto capítulo vamos a extrapolar esa caracterización a las conectivas, y ofrecer distintas definiciones del concepto de anormalidad.

La segunda parte, llamada *Tonk*, se ocupa de dar con un ejemplo de conectiva vaga, y un sistema para tratarla. En el primer capítulo presentaré el problema de Tonk y sus soluciones tradicionales. En el segundo capítulo veremos un panorama de las distintas opciones subestructurales y sus soluciones a las paradojas, especialmente a la paradoja de la validez. En el tercer capítulo veremos en detalle a ST, que será la lógica no-transitiva que voy a utilizar luego en el capítulo cuarto, para dar la interpretación anormal de Tonk.

Por último la tercera parte, llamada *Metavalidez*, se ocupa de caracterizar la metateoría de la lógica elegida, y del modo en que se puede incorporar un operador de consistencia. En el primer capítulo veremos la objeción de Knot, y presentaré un cálculo para la lógica que le corresponde. En el segundo capítulo analizaré distintas definiciones de metavalidez, y mostraré cómo se corresponden con las nociones más estudiadas de teoría de la prueba. En el capítulo tres defenderé al concepto de validez global, y mostraré por qué el problema de Knot es sólo aparente. Por último, en el cuarto capítulo trataré los problemas que resultan de incorporar un operador de consistencia a lógicas submetainferenciales, y a aquellas que involucren conectivas vagas.

La tesis terminará con una conclusión que sumariza los resultados obtenidos, y adelanta el trabajo futuro basado en los problemas que han quedado abiertos.

PARTE I

Anormalidad

- Capítulo 1 -

Vaguedad

1 Introducción

Sorites –atribuida al igual que las paradojas semánticas a Eubúlides de Mileto- es probablemente la paradoja más importante de la historia de las paradojas. En primer lugar, a diferencia de las antinomias semánticas, está presente *de hecho* en todos los ámbitos, tanto téoricos como prácticos, y representa por ejemplo una gran parte de nuestros conflictos éticos y políticos:

Un ser humano de 30 años es una persona
Si algo es una persona, un instante antes también lo era.
Por ende, un embrión es una persona.

Casi todo el vocabulario de cualquier lenguaje natural es vago. Esto quiere decir que no se trata de una anomalía, como es el caso de la autoreferencia y oraciones como el mentiroso. Es una característica semántica esencial e indispensable del lenguaje.

En segundo lugar, Sorites es la paradoja más importante por ser la más difícil de resolver. Priest lo pone en los siguientes términos:

> (…) las paradojas de autoreferencia pueden ser resueltas abandonando la ley de no-contradicción. Esto ha parecido a muchos una solución muy drástica. Pero incluso ello no ayuda a resolver a Sorites: los argumentos soríticos conducen no sólo a contradicciones que pueden ser aisladas, sino a contradicciones al por mayor. Usando argumentos de Sorites, uno puede probar básicamente cualquier cosa. Priest (2004), página 9

Más allá de la posición particular de Priest respecto de cómo solucionar paradojas semánticas, es indudable que las conclusiones problemáticas a las que conducen los argumentos de este tipo no tienen ninguna estructura lógica en particular. Y respecto de las premisas, si bien hay estructuras en común entre las distintas versiones, están lejos de ser caracterizables en términos de una u otra operación lógica:

- **Sorites Universal Condicional:** $\forall x(Fx_n \rightarrow Fx_{n+1})$, $Fa_1, \neg Fa_{10^{10}} \vDash \perp$
- **Sorites Universal Conyuntivo:** $\forall x \neg(Fx_n \wedge \neg Fx_{n+1})$, $Fa_1, \neg Fa_{10^{10}} \vDash \perp$
- **Sorites Existencial:** $\neg \exists x(Fx_n \wedge \neg Fx_{n+1})$, $Fa_1, \neg Fa_{10^{10}} \vDash \perp$
- **Sorites Particular Condicional:** $Fa_1 \rightarrow Fa_2, \ldots, Fa_{10^{10}-1} \rightarrow Fa_{10^{10}}$, $Fa_1, \neg Fa_{10^{10}} \vDash \perp$

Parece igualmente atractivo el razonamiento que parte de afirmar que si algo es una persona, un instante antes también lo era, como la que lo hace a partir de que no es cierto que algo sea una persona, pero un instante antes no lo fuera, como la que lo hace a partir de que nada es una persona pero un instante antes no lo era, etc.

Al igual que cualquier razonamiento, la paradoja de Sorites puede ser considerada un argumento válido o inválido, y correcto o incorrecto. Una buena teoría debería explicar en dónde se encuentra el error –si lo hubiere- y por qué resulta psicológicamente atractiva a pesar de ello.

Si la lógica que utilizamos es la lógica clásica, todos los argumentos anteriores resultan válidos. Sus premisas son equivalentes, y las reglas involucradas no son más -en la versión condicional y general- que Modus Ponens y la eliminación del cuantificador. Aunque otras lógicas divergentes respecto de la clásica pudieran no dictaminar la equivalencia entre las distintas formulaciones, es importante tener en cuenta que una solución a la paradoja no puede funcionar sólo para una de ellas, puesto que todas parecen tener la misma fuerza.

Dedicaré las primeras secciones de este primer capítulo a ofrecer un panorama de algunas de las diversas problemáticas a las que da lugar la vaguedad, y las soluciones que se encuentran en el mercado: nos ocuparemos en el apartado 2 del origen del fenómeno, y en el 3 de la cuestión de la vaguedad de orden superior. Finalmente, en la sección 4 vamos a adentrarnos en el aspecto que realmente nos compete en esta tesis, qué es el problema de cuál es el tipo de vocabulario que puede ser vago. En particular, voy a presentar los que creo que son los dos errores que han impedido que la posibilidad de conectivas lógicas vagas fuera discutida propiamente: la primera cuestión tiene que ver con el modo en que presentamos las definiciones de vaguedad (pensando en predicados) y la segunda tiene que ver con los ejemplos que la gente tiene en la cabeza cuando considera posibles conectivas vagas (las conectivas y cuantificadores clásicos estándar).

2 El origen de la vaguedad

Es indudable que el lenguaje que hablamos es vago, pero lo que no es claro es exactamente por qué lo es. La primera posición afirma que existe algún tipo de indeterminación ontológica en el mundo mismo, y nuestro lenguaje sólo la refleja con fidelidad. Una ventaja de este enfoque es que nos permite considerar al fenómeno, no como una falencia de los lenguajes naturales –que deba, por ejemplo, ser eliminada en el discurso científico- sino como un aspecto positivo en términos de capacidades representativas de nuestro discurso.

Este tipo de no-eliminativismo parece inevitable en términos prácticos, dada la ubicuidad y resiliencia de la vaguedad. Es entonces deseable tener una teoría que explique nuestras prácticas, y no que las condene. Existen diversas formas de elucidar lo que significa que la realidad es vaga. Una de los ejemplos clásicos es el monte Everest: ¿cómo identificamos el punto en el que comienza, qué piedras incluye y cuáles forman parte de la ladera? Una opción es hacerlo en términos de la existencia de objetos cuyas condiciones de identidad son indeterminadas, o que con partes que los componen indeterminadamente -como sostiene, por ejemplo, Tye (1990). Otra opción, más habitual, es considerar que los objetos son precisos, pero que pueden tener propiedades que sean ellas mismas vagas. Entre defensores de esta línea de pensamiento se cuentan Hyde (ver por ejemplo (2008)).

La segunda posición -que probablemente sea la más popular- es la defendida por ejemplo por Russell (1923) y Dummett (1975), según la cual estamos lidiando con un fenómeno lingüístico, y es un *non sequitur* inferir características del mundo a partir de nuestras formas de describirlo. Esta postura puede a su vez dividirse en dos subgrupos: aquellos que consideran que el origen de la indeterminación es semántico –sin dudas, la mayoría de los autores- y aquellos que consideran que es pragmático. A grandes rasgos, la idea es que existen diversas propiedades precisas y muy similares entre sí en el mundo, pero nuestros usos no alcanzan para fijar la referencia del término a una de ellas en particular.

Quienes consideran a la vaguedad un fenómeno pragmático –como Graff Fara (2000)- sostienen que la extensión de los términos vagos varía en función de algún parámetro contextual (intereses, propósitos, estados psicológicos, disposiciones, estándares de precisión). De ese modo, en todo contexto hay un corte preciso entre la extensión y la antiextensión, pero dicho corte es incognoscible porque nunca se encuentra donde estamos mirando. En el caso de una secuencia sorítica, al considerar los objetos de a pares, siempre debemos juzgarlos iguales, puesto que el corte queda fuera de ese contexto. Si lo buscamos más adelante en la secuencia, se produce un "context shift", y el punto de corte cambia.

La objeción que usualmente es enarbolada en contra del contextualismo apunta a la posibilidad de definir predicados que al mismo tiempo explícitamente dejan fijo el contexto ("Es rojo en este contexto"), pero continúan siendo susceptibles a Sorites.

La última de las grandes alternativas consiste en considerar a la indeterminación como un fenómeno epistémico. El punto de partida del epistemicismo -propuesto por Timothy Williamson (ver, por ejemplo, Williamson (1994))- es que las oraciones declarativas tienen un contenido que posee sólo condiciones de verdad. Las condiciones de falsedad no son más que su complemento, no existen independientemente. La consecuencia directa de esta tesis es que existen límites precisos para todas nuestras palabras y, por ende, la presencia de casos limítrofes se debe a nuestra ignorancia respecto de dónde se encuentran.

Es crucial que ese desconocimiento no pueda ser remediado, que se trate de una ignorancia por principio. Fundamentalmente, no puedo conocer todos los factores que determinan la referencia de mis palabras, puesto que ciertos factores que harían verdadera una creencia acerca de un caso limítrofe son indistinguibles de factores que la harían falsa. Dada esta limitación de nuestras capacidades de discriminación, aunque la creencia sea verdadera, no está suficientemente justificada como para constituir conocimiento.

La crítica más evidente a esta propuesta y, a mi parecer, conclusiva, es la originalmente formulada por Dummett (1975), quien afirma que dado que el significado superviene sobre el uso, no se puede asumir que éste determina extensiones clásicas. Más aún, dicha asunción parece altamente inmotivada, ya que, como nota Field (2003), quien crea que existen límites precisos debería encontrar al menos significativa la idea de, por ejemplo, desear que no se haya superado el último segundo de juventud. Sin embargo, diríamos que alguien que tuviera dicho deseo estaría cometiendo un serio error conceptual, si no comportándose irracionalmente.

3 Vaguedad de orden superior

La vaguedad de orden superior corresponde a la idea de que el fenómeno no desaparece meramente postulando la existencia de casos indeterminados, puesto que la transición entre estos y los determinados sigue siendo difusa.

La mayoría de los autores defienden que la vaguedad de orden superior es al menos posible, aunque en algunos casos no es considerada necesaria o constitutiva de la vaguedad. Por el contrario, autores como Diana Raffman (2010) o Crispin Wright (2010) sostienen que no hay más que tres categorías comprensibles: definitivamente *F,* definitivamente no-*F* y aquello que no cae bajo ninguna de las dos. Dado que los casos limítrofes de orden superior no son definitivamente *F* ni definitivamente no-*F* (de otro modo, no serían casos limítrofes) deberían simplemente ser ubicados en el primer nivel de indeterminación. Ser limítrofe no es una categoría ontológica sustancial, sino algo negativo: no ser una cosa ni la otra. Por eso, no se puede usar la idea de ser limítrofe para establecer casos indeterminados de posesión de esa propiedad. Puesto de otra manera, uno está obligado a clasificar a los objetos determinados como tales, pero no a clasificar a los indeterminados como tales, ya que constituyen los casos difíciles. Por ello no puede haber cosas que sean definitivamente indeterminadas, y por lo tanto, no puede haber casos limítrofes de indeterminación.

Estos argumentos resultan convincentes, y hacen eco de la intuición según la cual el problema no se resuelve reemplazando las dos categorías clásicas por nuevas clasificaciones más finas. Field (2008), por ejemplo, considera que el problema de la vaguedad de orden superior consiste en encontrar un modo de definir un operador de determinación que no colapse en un operador bivalente en los niveles transfinitos. Esto parece totalmente desencaminado, ya que la mayoría de las secuencias soríticas están compuestas por una cantidad finita de elementos y por ende, aunque evitemos los límites precisos en el lenguaje en general, siempre habrá un ordinal finito en el que habrá que postularlos para una secuencia en particular.

4 Vaguedad y conectivas lógicas

4.1 El problema de las definiciones

La expresión vaga paradigmática es el predicado, razón por la cual la mayoría de las definiciones de vaguedad se elaboran teniéndolos como referencia. Algunas de las más usuales son:

(1) Un término es vago si y sólo si es susceptible a Sorites.
(2) Un término es vago si y sólo si presenta casos limítrofes en su aplicación.
(3) Un término es vago si y sólo si es tolerante respecto de pequeños cambios en sus variables de aplicación.

La alternativa (1) -defendida por ejemplo por Bueno y Colyvan (2012)- tiene como primer problema que invierte el orden de la explicación: ciertos términos generan secuencias soríticas *porque* son vagos, y no al revés. Algunos autores sostienen además que si bien puede ser una condición suficiente, no es necesaria, puesto que algunos términos vagos serían o bien demasiado discretos o bien demasiado "poco cuantificables" como para ser susceptibles a Sorites. Un ejemplo de esto que aparece frecuentemente en la literatura es "religión".

La alternativa (2) es la que en general se utiliza para identificar el fenómeno cuando el asunto en cuestión no es en particular el problema de la definición. Sin embargo, la mayoría de los autores consideran que los casos limítrofes son condición necesaria, más no suficiente, dada la presunta diferencia entre términos vagos y semánticamente incompletos pero precisos, como el ejemplo de "niño*" de Sainsbury (1991):

alguien es un niño si es menor de dieciséis años, y no lo es si es mayor de dieciocho.*

Estos casos son generalmente excluidos de la clasificación, debido a que tanto el límite entre la extensión y el área indeterminada, como entre la antiextensión y el área indeterminada, son precisos. La idea de que un término vago es aquel que no marca *ningún* tipo de límite preciso.

En tercer lugar tenemos la definición de vaguedad como tolerancia, presentada originalmente por Crispin Wright:

> Hay grados de cambio en tamaño, madurez y color que son insuficientes para alterar la justicia con la cual algún predicado específico de tamaño, madurez o color se aplique. Wright (1975), página 333

El principio de Tolerancia tiene las ventajas de (i) parecer verdadero y (ii) explicar por qué los razonamientos soríticos generales no son simplemente *reductios* de la premisa mayor: esa premisa expresa la característica fundamental de los predicados vagos. Sin embargo, justamente por generar argumentos soríticos, el principio de Tolerancia en principio generará inconsistencia en casi cualquier lógica.

Es por esto que los simpatizantes de este principio muchas veces se ven obligados o bien a aceptar que los términos vagos presentan un defecto semántico grave (trivialidad o incoherencia), o bien proponer una versión debilitada. Por ejemplo, Nicholas Smith (2007), (2008) propone reemplazar Tolerancia por Cercanía, y exigir que los valores de verdad no sean idénticos, sino muy similares:

> (…) cercanía de *x* e *y* en aspectos *F*-relevantes hace a la cercanía de '*Fx*' y '*Fy*' respecto de la verdad. Smith (2008), página 146.

En cualquier caso, más allá de los problemas particulares que se presenten para cada una de las propuestas, todas tienen en común el hecho de que no se aplican, al menos de modo directo, a otras categorías lingüísticas. Y esto ha nublado la posibilidad de ciertos análisis. En particular –a diferencia de lo que ocurre con los nombres, que sí han sido estudiados por algunos autores- no hay prácticamente nada acerca de vaguedad en operadores lógicos.

Lo que sucede es que se genera un círculo vicioso: modelamos nuestras definiciones en función de los predicados, y luego argumentamos que sólo ellos pueden ser vagos, puesto que nuestras definiciones no se aplican a otras categorías. Veremos a continuación un ejemplo concreto de esto, en una de los pocos diálogos filosóficos que si quiera menciona la posibilidad de conectivas vagas.

4.2 El problema de las conectivas clásicas

Como dijimos, la posibilidad de conectivas vagas es en general tan sólo mencionada y descartada al pasar. Una de las pocas discusiones filosóficas que se han dado con algo más de detalle no es, sorprendentemente, ni de lógica ni de filosofía del lenguaje, sino metafísica. Voy a presentarla brevemente, pues en ella se hace patente el otro motivo por el cual no encontramos más material al respecto.

El tetradimensionalismo es la doctrina que sostiene que los objetos están compuestos tanto de partes espaciales como temporales. En (2001), Sider desarrolla su propia versión de tetradimensionalismo, y uno de los argumentos que ofrece en favor de su posición –de hecho, uno de los que según él mismo son más sólidos- depende de modo crucial de la inexistencia de vaguedad en el vocabulario lógico.

El origen del argumento está en Lewis (1986), y está dirigido a defender la composición irrestricta. La idea es que nuestra intuición de que ciertas clases de cosas componen objetos (por ejemplo, la clase de las partículas que forman mi cuerpo), mientras que ciertas otras no lo hacen (esas partículas diseminadas por el espacio, luego de mi muerte) es errónea. El motivo es que podemos armar una secuencia sorítica entre la primera clase y la segunda, en donde es absurdo afirmar que una clase conforma un objeto pero la siguiente no. Pero a diferencia de los sorites que involucran vaguedad, una clase de cosas o bien definitivamente compone un objeto o bien no lo hace, no existe la composición indeterminada.

La conclusión del argumento es análoga a la que extrae Unger (1979) en general de cualquier Sorites: no hay nada errado en el razonamiento en sí, y hay que considerar a los términos intrínsecamente triviales (es decir, que se aplican a todo o a nada).

Sider concede que algunas descripciones de clases de objetos pueden ser difusas: el término "las partículas que forman mi cuerpo" podría no referir a una sino a varias clases. Sin embargo, cada una de ellas en sí misma no puede ser vaga, y el motivo es el siguiente. Si hubiera casos indeterminados de composición, podría haberlos en un mundo donde hay finitos objetos concretos –sea, *n*- y para alguna clase de ellos, es indeterminado si conforman un objeto o no. Es decir, en ese mundo, la cantidad de objetos que hay estaría indeterminada. Sin embargo, las oraciones que expresan cardinalidades finitas pueden ser formuladas en primer orden apelando solamente a vocabulario lógico. Por ende, si en ese mundo hay una cantidad indeterminada de cosas, eso se deberá a la vaguedad en las expresiones lógicas mismas. Sin embargo, las expresiones lógicas no pueden ser vagas, puesto que carecen de precisisficaciones. Por ende, nos vemos obligados a caer por la pendiente resbaladiza: en efecto, o bien toda clase compone un objeto, o bien ninguna lo hace.

No voy a discutir aquí la legitimidad del argumento en particular (para ello, por ejemplo, ver Koslicki (2003), o Båve (2011)). Lo importante para nosotras es que Sider extrae como conclusión que no puede haber conectivas vagas. En (2003) ofrece un argumento en particular de por qué los cuantificadores no pueden tener precisificaciones, cosa que en (2001) había dado casi por sentada. Sin embargo, más allá de los motivos particulares, es crucial notar que el argumento es en contra de que *el cuantificador existencial* $\exists$ sea vago. Y sin dudas, de ello no se sigue que no pueda haber (i) otros cuantificadores o (ii) conectivas proposicionales, que sí sean vagos.

5 Conclusión

Es muy importante distinguir entre la pregunta ¿son estas operaciones lógicas vagas? de la pregunta ¿hay operaciones lógicas vagas? Que la conjunción o el cuantificador universal del lenguaje natural, o sus representaciones en lenguajes formales, sean precisos, no implica que no haya vaguedad en otro vocabulario que pueda genuinamente ser considerado lógico.

De ser afirmativa, la respuesta a esta segunda pregunta nos daría un elemento adicional de apoyo para el anti-excepcionalismo en lógica, esto es, la tesis de que el vocabulario lógico, si bien no carece de especificidad, no es radicalmente distinto de otros sectores del lenguaje.

Voy a dedicar el próximo capítulo a una teoría de la vaguedad que casi explícitamente admite la posibilidad de conectivas vagas. Si bien no considero que sea del todo satisfactoria, es necesario detenernos en ella, por un lado por ser la única de su tipo, y por el otro porque hay allí algunos elementos que sí retomaremos en la segunda parte de esta tesis.

◈◈◈

- Capítulo 2 -

Conflación

◈◈◈

1 Introducción

Vamos a empezar a considerar la posibilidad de conectivas vagas estudiando la teoría que más se acerca a plantear algo así, que es la de la vaguedad como un tipo de conflación. Si bien no es la única perspectiva que Ripley ofrece sobre el tema, sí se trata de una perspectiva de la cual –quizás por lo reciente- sólo se ocupa Ripley. Por ende, no vamos a detenernos demasiado en consideraciones preliminares, y vamos a adentrarnos directamente en los detalles de la teoría.

Digo que se trata de la teoría que más se aproxima a postular conectivas vagas porque si bien el análisis está formulado del modo tradicional -tomando a los predicados como portadores del fenómeno- el proceso de conflación es de hecho ejemplificado por conectivas (si bien no se profundiza sobre ello).

En la sección 2 presentaré el marco conceptual, y en la sección 3 entraremos en los detalles formales que determinan la lógica particular del vocabulario borroso. En particular, mostraré cómo funcionaría el aparato para dar cuenta de la presencia de conectivas vagas. Finamente, en la sección 4 argumentaré que el enfoque padece ciertas limitaciones *en tanto teoría de la vaguedad*: por un lado, porque no es claro cuáles son los términos de la relación de conflación, y por el otro, porque no se entiende qué distingue a la conflación vaga de otras variedades (si las hubiera).

2 Qué es conflacionar

Ripley desarrolla sus ideas respecto de la conflación en dos artículos, (2017) y (2018); el primero se aboca a los detalles técnicos, mientras que el segundo se ocupa de aplicaciones filosóficas de dichas herramientas. Aunque existen entre ambos algunas divergencias formales, ellas no afectan de modo trascendente el contenido, con lo cual en esta presentación voy a hacer una síntesis entre ambas versiones, obteniendo un resultado menos fiel al original pero más acorde a nuestros intereses.

Para empezar, la conflación es un tipo de *acto*, que consiste en tratar dos cosas, ya sean objetos o propiedades, como si fueran una sola. El énfasis viene a cuento de que esa relación con el mundo no tiene necesariamente que ser lingüística. Por ejemplo, si conflaciono dos objetos, esto implicará que los deseo/desprecio/espero/etc. o bien a ambos o bien a ninguno, lo cual nada tiene en principio que ver con el lenguaje.

De estos actos a su vez sí se deriva un fenómeno semántico-pragmático, que consiste en la conflación de proposiciones que involucran a esos objetos o propiedades. Y a su vez, ello genera lenguajes que llamaremos *borrosos* (*blurred*), es decir, que cuentan con nombres, predicados y oraciones que refieren a objetos, propiedades y proposiciones conflacionadas, respectivamente.

La actitud de conflación nace en algunos casos de una *confusión*, esto es, de erróneamente considerar que esas dos cosas *son* una. Pero hay también otros casos, casos en donde decidimos conflacionar dos cosas a causa de que sus diferencias en determinado contexto son o bien irrelevantes o bien muy costosas de discriminar. Es por ello que en (2017) Ripley dice que utilizar lenguaje conflacionado representa un riesgo: podría ser que esas diferencias fueran importantes en dicho contexto, y que obviarlas conlleve faltas epistémicas.

El caso de conflación no confusa que nos interesa es, por supuesto, el de la vaguedad. La propuesta se ubica dentro de la clase más general de teorías de la vaguedad como multiplicidad, que son todas aquellas que asocian a los predicados vagos un *rango*, esto es, una serie de propiedades precisas con las que los conceptos se encuentran en una relación particular. Lo que diferencia las diversas teorías de la multiplicidad entre sí es la particular naturaleza de esa relación. Para un contextualista, cada uso de un predicado vago corresponde con algún elemento de su rango, pero diferentes usos pueden corresponder con diferentes elementos. Para un epistemicista, el predicado vago corresponde con uno solo de esos elementos, pero no podemos saber con cual. Para un supervaluacionista[2], corresponde de manera indeterminada con todos los elementos. Por último, para un conflacionista, el predicado vago refiere a la conflación entre todas las propiedades precisas.

---

[2] Ver capítulo 7

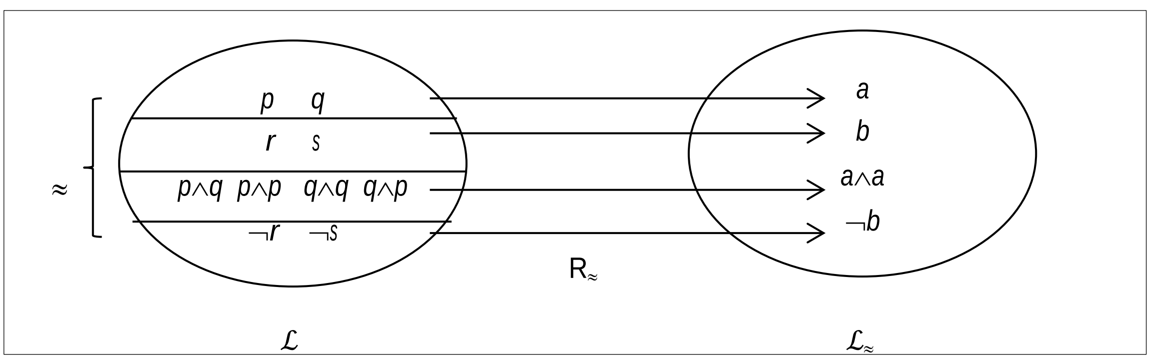
Dada esta caracterización de lo que es un predicado vago, puede definirse el concepto de *caso limítrofe* como aquel objeto que posee alguna de las propiedades en el rango del predicado, y carece de alguna otra.

3 Modelo formal de la conflación

3.1 Teoría de la prueba

Una de las diferencias que mencionábamos que existen entre ambos artículos, es que en (2017) hay sólo un lenguaje, que es preciso, mientras que en (2018) hay dos lenguajes $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_{\approx}$, uno preciso y otro borroso. Dado que el objetivo es dar un modelo del lenguaje natural –que de hecho contiene vocabulario vago- la primera opción no puede ser la más representativa. Por ende, vamos a elegir la segunda opción, quizás considerando que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_{\approx}$ son mejor entendidos, no como estructuras independientes, sino como dos fragmentos idealizadamente aislados de un único lenguaje.

El conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$ está particionado en clases de equivalencia por una relación $\approx$, y su contraparte borrosa $\mathcal{L}_{\approx}$ se vincula con él mediante una función $R_{\approx}$, que asigna a cada celda de la partición, una oración de $\mathcal{L}_{\approx}$:



RELACIÓN ENTRE LENGUAJE PRECISO Y BORROSO

Que la relación imponga una partición implica, entre otras cosas, que se trata de una relación transitiva. La justificación que Ripley ofrece de esta transitividad es que si $A \approx B$ y $B \approx C$ pero $A \not\approx C$, entonces respecto de C, las proposiciones A y B están siendo tratadas como distintas. Lo que esto significa es que para haber conflación, esta tiene que ser *total*. Aunque no entraremos en los detalles de este problema, vale la pena sí notar que este supuesto -que parece no ser problemático en el caso particular de la confusión- resulta quizás excesivo en el caso de la vaguedad.

Hay, dentro del marco general, sólo una sugerencia que indica que deban respetarse reglas de composicionalidad. Es decir -al menos en la conflación de predicados vagos- si *Fa* está conflacionada con *Pa*, entonces toda oración que contenga a *Fa* como subfórmula va a estar conflacionada con la oración correspondiente a reemplazar alguna instancia de *Fa* por *Pa*. Volveremos sobre esta cuestión luego de haber presentado la semántica.

Dada una relación de conflación entre oraciones, podemos definir una relación de conflación (a) entre conjuntos Γ y $\Gamma_{\approx}$ de oraciones de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_{\approx}$ respectivamente, que se cumple siempre y cuando para cada oración de Γ haya una que sea su contraparte borrosa en $\Gamma_{\approx}$, y para cada una de $\Gamma_{\approx}$ haya al menos dos que sean sus contrapartes precisas en Γ; y (b) entre secuentes, que se cumple siempre y cuando sus prosecuentes y sus postsecuentes estén respectivamente conflacionados.

En lugar de definir verdad borrosa en función de verdad precisa, Ripley elije definir la consecuencia borrosa asociada a una relación de consecuencia precisa:

Definición (*Consecuencia borrosa*) Dado un lenguaje $\mathcal{L}$ con una relación de consecuencia $\vdash$, la relación de consecuencia $\vdash_{\approx}$ para su contraparte borrosa $\mathcal{L}_{\approx}$ es $\{\Gamma\Rightarrow\Delta \mid \Sigma\Rightarrow\Pi\approx\Gamma\Rightarrow\Delta$, para algún $\Sigma\Rightarrow\Pi\in\vdash\}$.

Esta nueva relación de consecuencia cumple con tres *desiderata* relevantes:

Teorema (*Desiderata para* $\vdash_{\approx}$, Ripley (2018)) Si $A\approx B$, entonces

(*Intersustitutividad*) $\Gamma, A\vdash_{\approx}\Delta$ si y sólo si $\Gamma, B\vdash_{\approx}\Delta$ y $\Gamma \vdash_{\approx}\Delta, A$ si y sólo si $\Gamma \vdash_{\approx}\Delta, B$

(*Preservación de validez*) $\vdash\subseteq\vdash_{\approx}$

(*Conservatividad*) Si $\Gamma\nvdash\Delta$ pero $\Gamma\vdash_{\approx}\Delta$, entonces algún elemento de Γ o Δ está conflacionado propiamente.

Notablemente, si $\vdash$ es reflexiva, monótona o compacta, $\vdash_{\approx}$ también lo será, pero que $\vdash$ sea transitiva no garantiza que $\vdash_{\approx}$ lo sea. El ejemplo que ilustra esto es el de un lenguaje que conflaciona la conjunción y la disyunción de un lenguaje clásico en una única conectiva $\otimes$. La consecuencia borrosa para ese lenguaje contendrá $A\Rightarrow A\otimes B$ -dado que su contraparte precisa contiene $A\Rightarrow A\vee B$- y contendrá $A\otimes B\Rightarrow B$ -ya que su contraparte precisa contiene $A\wedge B\Rightarrow B$- pero no contendrá $A\Rightarrow B$ -dado que su contraparte precisa no lo contiene.

3.2 Valuaciones

Aunque Ripley (2018) presenta valuaciones tetravaluadas, vamos a considerar aquí solo un subconjunto trivaluado de ellas. El motivo de ello es que el resultado de usar estas valuaciones, bajo ciertas condiciones de composicionalidad, no es otro que **ST**, la lógica que vamos a presentar y defender en la segunda parte de este trabajo.

A la vez, dado que la posición de Ripley en general es siempre tomar la teoría de modelos sólo como una herramienta, se priva de dar detalles acerca de cómo deberíamos usar estas valuaciones para interpretar los lenguajes en cuestión, y mantiene toda la discusión semántica en los términos más abstractos posibles. Repondré estos detalles del modo en que nos resulte conveniente

En primer lugar, definimos cómo funcionan las valuaciones de uno y otro lenguaje. Dado que $\mathcal{L}$ es un lenguaje preciso, las valuaciones que lo interpretan deberían tener como codominio el conjunto clásico {0,1}. En $\mathcal{L}_{\approx}$, por el contrario, al haber vocabulario vago, tendremos oraciones que podrán recibir valor ½. Dado que el segundo lenguaje es una versión borrosa del primero, sus interpretaciones estarán determinadas por las de él del siguiente modo:

Definición (*Contraparte borrosa de una valuación*) Dada una valuación ν para oraciones de $\mathcal{L}$, su contraparte borrosa es la función para oraciones de $\mathcal{L}_{\approx}$ tal que $\nu_{\approx}(A)=min\{\nu(B) \mid B\in R(A)\}$, donde *min* corresponde al orden informacional: ½<1 y ½<0.

Esto significa que si dos oraciones que se encuentran en una misma celda de la partición impuesta por $R_{\approx}$ sobre $\mathcal{L}$ reciben en ν valores distintos (es decir, una recibe 1 y la otra 0), la oración de $\mathcal{L}_{\approx}$ que sea su contraparte borrosa recibirá ½ en $\nu_{\approx}$.

Veamos un ejemplo a modo de ilustración. Supongamos que *A* y *B* son oraciones de $\mathcal{L}$ que están en la misma partición y se relacionan con una oración *E* de $\mathcal{L}_{\approx}$, y que *C* y *D* son también oraciones de $\mathcal{L}$ que se relacionan con una oración *F* de $\mathcal{L}_{\approx}$. Tomemos una ν que sea una valuación de $\mathcal{L}$ tal que:

$\nu(A)=1$ $\quad$ $\nu(C)=1$

$\nu(B)=0$ $\quad$ $\nu(D)=1$

En ese caso, $\nu_{\approx}(E)=½$ y $\nu_{\approx}(F)=1$. Si la conflación respeta la estructura composicional, esto querrá decir que $A\rightarrow B$ –que vale 0- estará conflacionada con $A\rightarrow A$, con $B\rightarrow B$ y con $B\rightarrow A$ –que valen 1. Por ende, $\nu_{\approx}(E\rightarrow E)=½$. Por otro lado, $A\rightarrow C$, $A\rightarrow D$, $B\rightarrow C$, $B\rightarrow D$ estarán todas conflacionadas y valen todas 1 en ν, con lo cual $\nu(E\rightarrow F)=1$.

Es decir, si la conflación respeta la estructura composicional, las valuaciones de $\mathcal{L}_{\approx}$ van a ser funciones composicionales; en particular, van a dar lugar a las tablas de verdad de **LP/K3**. La diferencia viene dada por la definición de consecuencia lógica:

Definición (*Consecuencia borrosa valuacional*) Dado un lenguaje $\mathcal{L}$ con una relación de consecuencia $\vDash$ determinada por un conjunto de valuaciones V, la relación de consecuencia $\vDash_{\approx}$ para su contraparte borrosa $\mathcal{L}_{\approx}$ determinada por el conjunto de valuaciones $V_{\approx}$ es $\{\Gamma\Rightarrow\Delta|$ no hay una $\nu_{\approx}\in V$ que sea contrajemplo de $\Gamma\Rightarrow\Delta\}$[3].

Esta definición no arroja como resultado ni la consecuencia de **K3** ni la de **LP**, sino que, como pasaba con su contraparte sintáctica, puede ser no transitiva. De hecho, no es sólo parecida a $\vdash$, es en efecto correcta y completa respecto de ella:

Teorema (*Corrección y completitud,* Ripley (2018)) Si $\vdash$ es correcta respecto de $\vDash$, $\vdash_{\approx}$ es correcta respecto de $\vDash_{\approx}$. Si $\vdash$ es completa respecto de $\vDash$, $\vdash_{\approx}$ es completa respecto de $\vDash_{\approx}$.

Lo cual asegura que los mismos *desiderata* que se cumplían en el caso de la teoría de la prueba, se cumplirán para los modelos.

3.3 Tolerancia

Una de las principales ventajas que Ripley esgrime en favor de su propuesta consiste en la posibilidad de incorporar la Tolerancia de los predicados sin generar una contradicción. Formalmente, cuando Ripley se refiere a afirmaciones de Tolerancia, está hablando, no de los condicionales que usualmente vemos en las presentaciones de Sorites, sino de inferencias materiales de la forma:

$$D^{<x\text{-}y}ab\Rightarrow Ta\rightarrow Tb \qquad \text{(Tol)}$$

[3] La definición de Ripley incluye una operación de clausura sobre el conjunto de valuaciones, que asegura que se preserven no sólo corrección y completitud, sino absolutez. Voy a obviarla aquí para simplificar la presentación.

La justificación de la validez de (Tol) en $\vdash_{\approx}$ se basa en la validez del siguiente secuente en el lenguaje no conflacionado:

$$D^{<x\text{-}y}ab \Rightarrow T^{>x}a \rightarrow T^{>y}b \qquad \text{(TolPrec)}$$

donde $y<x$, D es la relación triádica que indica que la diferencia de altura entre a y b es menor a x-y, y $T^{>x}$ y $T^{>y}$ son dos propiedades precisas, a saber, "medir más que x" y "medir más que y", conflacionadas en T. Esto es verdadero sin importar qué números sean x e y ni qué individuos sean a y b. A modo de ejemplo, una instancia sería "Que la diferencia de altura entre Juan y Pedro sea de 10 cm implica que si Juan mide más de 1,80 m, Pedro mide más de 1,70 m".

3.4 Conflación y conectivas

Como adelantamos, el aspecto interesante de esta propuesta para nosotras radica en su posibilidad de extenderse más allá de los predicados. En principio, la relación de conflación se da entre proposiciones, pero podríamos usar esa misma relación para dar una definición de conflación entre conectivas.

Definición (*Conflación entre conectivas 1*) Las conectivas $\odot_1$ y $\odot_2$ están conflacionadas si y sólo si para toda secuencia de variables proposicionales $p_1 \ldots p_n$ sucede que $\odot_1(p_1 \ldots p_n) \approx \odot_2(p_1 \ldots p_n)$

Esto es lo que ocurre en el ejemplo que ofrece Ripley, en el cual $A \vee B \approx A \wedge B$ para todo A y B. Sin embargo, a menos que exijamos que $\approx$ respete la estructura composicional, el hecho de que se cumpla *Conflación entre conectivas 1* no implica que $(A \wedge B) \rightarrow C$ esté conflacionada con $(A \vee B) \rightarrow C$. Por ende, si tuviéramos razones para no forzar a $\approx$ a ser composicional, deberíamos ofrecer la versión más fuerte de conflación para conectivas:

Definición (*Conflación entre conectivas 2*) Las conectivas $\odot_1$ y $\odot_2$ están conflacionadas si y sólo si para todas las oraciones A y B, $A \approx B$ si y sólo si $A^* \approx B^*$, donde A^* y B^* resultan de posiblemente reemplazar en A y B alguna ocurrencia de $\odot_1$ por $\odot_2$, o viceversa.

Para que haya espacio para la posibilidad de conflacionar conectivas, es preciso que la composicionalidad falle. Por ejemplo, es usual que la gente confunda el condicional $p \rightarrow q$ con el bicondicional $p \leftrightarrow q$, aun cuando distinga perfectamente entre p y q. Esto es, que dos cosas sean distinguidas no implica que las fórmulas que componen lo sean, aunque sí quizás el hecho de que dos cosas no sean distinguidas implica que las fórmulas que componen no lo sean.

Esto en lo que respecta a la definición formal. Respecto de la razón por la cual alguien conflacionaría dos conectivas, podemos asumir que, al igual que sucede con los predicados y los nombres, el motivo debe radicar en la irrelevancia de sus diferencias. En este sentido, si bien $\otimes$ resultaría una conectiva quizás vaga, no parece un fenómeno demasiado interesante tal como está planteado, puesto que no se nos dice nada acerca de en qué contextos podría estar bien no distinguir entre la conjunción y la disyunción (lo cual es, claro está, más fuerte que el mero hecho de utilizar una disyunción inclusiva).

Tampoco parece ser lo que pasa, como decíamos más arriba, con $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$, donde los fenómenos parecen ser o bien que la gente usa condicionales e implicatura bicondicionales, o bien que desconocen expresiones del lenguaje natural que signifiquen $\leftrightarrow$, y entonces las que refieren a $\rightarrow$ se vuelven ambiguas.

Veremos en la próxima sección que –independientemente de las cuestiones particulares de cómo se manifiesta la conflación en las conectivas- es difícil ver en qué sentido pueda esta teoría ser particularmente iluminadora para entender al fenómeno de la vaguedad.

4 Especificidad del conflacionismo como teoría de la vaguedad

Los ejemplos de conflación que elije Ripley para ilustrar el fenómeno a lo largo de ambos textos son, por un lado, el concepto ordinario de *masa* –que conflaciona masa newtoniana y relativista- y por el otro *Charley*, que es el término que un hombre confundido usa para denominar a las que en verdad son dos hormigas diferentes. Ambos casos funcionan muy bien, pero resultan engañosos a la hora de entender a la vaguedad como conflación.

4.1 Qué se conflaciona

Tanto en *Charley* como en *masa,* los términos de la conflación son sólo dos, y ambos poseen un correlato lingüístico (homófono) propio. Pero ¿qué predicados se encuentran conflacionados en rojo? Hay dos opciones generales a la hora de determinar qué propiedades conforman el rango de un predicado vago. Una primera es más bien descriptivista –siguiendo justamente la línea de los ejemplos- y consiste en considerar aquellas propiedades que de hecho la gente trata como si fueran la misma. El caso que Ripley elige, como veíamos, es el del predicado “ser alto”, y dentro de su rango ubica “medir más de 1,7 m”, “medir más de 1,75 m” y así hasta “medir más de 1,9 m”.

¿Qué predicados quedan afuera del rango? Como dijimos, los casos limítrofes son aquellos a los que se aplican algunos pero no todos los predicados de la celda. Por ello, “medir más de 2 m” no se encuentra dentro del rango; no porque las personas que miden 2 m no sean altas, sino porque excluye personas que sin dudas también lo son –como quienes miden 1,95- y que no pueden ser considerados casos limítrofes. Por la misma razón, no tenemos allí cosas como “medir exactamente 1,8 m”. Aún más, los predicados “medir exactamente 1,8 m” y “medir exactamente 1,81 m” tienen su extensión disyunta, con lo cual la diferencia entre ambos no será despreciable en la mayoría de los contextos: necesariamente si uno es verdadero de algún objeto, el otro será falso, y viceversa.

Sin embargo, no todos los predicados son lineales como lo es “ser alto”. Un problema clásico que deben enfrentar las teorías de la vaguedad es el hecho de que para la mayoría de los predicados hay distintas e independientes variables de aplicación. Por ejemplo, los predicados de color dependen del matiz, saturación y brillo, y “ser pelado” no sólo depende de cantidad de pelos, sino también de su grosor y distribución. Por ende, puede haber dos personas con distinta cantidad de pelos –y que por ende, a una se aplique “tener hasta x pelos” y a la otra no- pero que sean igualmente pelados, por cómo se encuentran esos pelos distribuidos en sus cabezas.

Este no es un problema que carezca de solución, simplemente debemos abandonar el intento de dar con un rango con valor descriptivo. Esto es, las propiedades conflacionadas podrán ser descriptas mediante predicados, pero no serán predicados naturales, que reflejen la práctica lingüística ordinaria, sino que probablemente sean disyunciones complejas de muchas variables, del estilo “tener x_1 de saturación, x_2 de matiz y x_3 de brillo, o tener x_4 de saturación, x_5 de matiz y x_6 de brillo, o…”.

En última instancia, estos predicados precisos no están jugando ningún rol explicativo, lo único que importa es qué objetos están en su extensión y cuáles no. Para ello, sólo es necesario considerar dos interpretaciones posibles: una que incluya sólo los objetos que determinadamente tengan la propiedad borrosa, y otra que incluya todos los que en alguna medida la posean, dejando un espacio en el medio para los casos limítrofes.

Y si despojamos al conflacionismo de su aspecto descriptivo, las ventajas de la teoría recaen sobre el aparato formal, el cual se asemeja mucho al supervaluacionismo. Hay sin embargo dos diferencias, una de ellas poco relevante, y la otra crucial. La primera es que en el conflacionismo –en tanto teoría de la multiplicidad- la variación se da sobre distintas oraciones, en lugar sobre las interpretaciones de una oración única. La importancia conceptual de esto es mínima, siendo más bien una distinción en los modos de presentación.

La diferencia que sí tiene peso proviene -por supuesto- de la definición de consecuencia lógica. De ella proviene la principal virtud conflacionista, que es la preservación de tolerancia. Sin embargo, como veremos en la parte II, no es necesario adherir al componente pragmático del conflacionismo para tener esta relación de consecuencia, la misma lógica puede presentarse en términos puramente semánticos de modo mucho más sencillo.

4.2 Tipos de conflación

No toda conflación carece de falta, y esa ausencia de error –en un contexto- tiene que estar justificada como ya dijimos por la semejanza de los términos conflacionados, y la irrelevancia de sus diferencias para cierto propósito particular. Lo que precisamos determinar, para lo cual los ejemplos no pueden servir de guía, es que así como no toda conflación carece de falta, no toda conflación sin falta es vaguedad.

La razón por la cual los ejemplos no ayudan es la siguiente. Mientras que la vaguedad es de hecho un tipo de conflación sin falta, el de *Charley* es un caso de conflación *con falta*, dado que el hombre no sólo trata a las hormigas de modo indistinto, sino que *cree* que son la misma. Respecto de *masa*, ni siquiera está claro si hay o no falta, dada su extraordinaria complejidad. Hasta donde han logrado medir todos los tests que se realizaron desde el siglo sexto hasta la actualidad, *masa newtoniana* y *masa relativista* son conceptos de hecho coextensionales, con lo cual ni siquiera es del todo claro qué significaría evaluar un posible error en la conflación en un caso como este.

Ripley no es explícito respecto de qué tipo de conflación sin falta sería la vaguedad, pero parece indicar que la marca distintiva la dan dos características usualmente señaladas como fundamentales: (a) la existencia de casos limítrofes y (b) la tolerancia. Es estándar en la literatura considerar que (a) sin (b) no es una condición suficiente, puesto que predicados con un espacio claramente determinado entre su extensión y su anti extensión no deberían ser clasificados como vagos. El ejemplo clásico es el de "niño*" de Sainsbury

(1991), que mencionábamos en el capítulo anterior. Por otro lado, (b) sin (a) tampoco alcanza, puesto que predicados vacíos –como $x \neq x$- o absolutos –como $x=x$- son vacuamente tolerantes.

Respecto de (a), no parece haber razón para pensar que nos vaya a permitir distinguir entre conflación vaga y no vaga. Es verdad que la conflación de "masa newtoniana" y "masa relativista", por lo que dijimos más arriba, no genera casos limítrofes, pero sin dudas el concepto de masa es extraordinario en este sentido. Presumiblemente, para la mayoría de las propiedades conflacionadas sí habrá objetos que posean una pero no la otra.

Respecto de (b) pasa algo similar. Para que haya conflación tiene que haber alguna semejanza entre los objetos que poseen una propiedad y los que poseen la otra. Por lo tanto, va a haber alguna relación D y alguna distancia x-y tal que siempre pasemos de un objeto que tiene las dos propiedades, a uno que sólo tiene una –en lugar de a uno que no tiene ninguna. El caso de masa relativista y masa newtoniana es extremo en este sentido, por el hecho de que siempre tendrán la misma.

En síntesis, tanto la tolerancia como los casos limítrofes no son más que una consecuencia de la conflación en general, y por ende, no pueden servir -dentro de esta teoría en particular- para distinguir los predicados vagos de los que no lo son. Las únicas salidas parecen ser o bien rechazar el supuesto inicial de que la vaguedad es tan sólo un tipo de conflación, y aceptar que todo término conflacionado es vago, o bien ofrecer una caracterización que nada tenga que ver con la tolerancia o los casos limítrofes.

Pero incluso si los casos limítrofes y la tolerancia pudieran distinguir entre conflación vaga y no vaga, no nos dan en principio una receta para trazar esa línea en el caso de las conectivas, al menos no sin un modo de entender esas categorías aplicadas a operadores proposicionales.

5 Conclusión del capítulo

Hemos visto entonces a la teoría de la conflación como una propuesta con dos aristas: una de ellas conceptual, orientada a la práctica que genera fenómenos de vaguedad, y la otra formal. Respecto de la primera, todo lo que diremos más adelante en este trabajo es compatible con ella. No resulta para mí demasiado iluminadora, pero si alguien creyera que sí lo es, podría seguramente adosarse como un complemento pragmático de la semántica que voy a defender, sin que se generen tensiones. El motivo de ello tiene que ver con la segunda arista de la teoría -que es la lógica que ella genera- y el hecho de que pueda incorporar la tolerancia sin trivialidad.

No obstante, la presentación de esta lógica en términos conflacionarios es –si no abogamos por el paquete completo- demasiado compleja: requiere múltiples lenguajes, y relaciones de partición entre ellos, y dos conjuntos de valuaciones, uno determinado por el otro, etc. Veremos en la Parte II como las presentaciones que Ripley mismo hacía de ella en sus trabajos anteriores son a la vez sencillas y suficientes para proveernos de los elementos que precisamos para dar cuenta de la vaguedad de conectivas lógicas.

En el próximo capítulo empezaremos a perfilar cuál será esta propuesta, que estará inspirada en las definiciones que las teorías lingüística y de inteligencia artificial hacen de los cuantificadores vagos.

- Capítulo 3 -

Cuantificadores

1 Introducción

Si bien la contribución de los cuantificadores a la forma lógica es el aporte más fundamental del silogismo aristotélico al desarrollo del análisis estructural de los argumentos, no es hasta fines del siglo XIX que se logra una comprensión de ellos independiente de las categorías gramaticales. La inspiración para el surgimiento de la lógica simbólica proviene fundamentalmente de distintas ramas de la matemática; en lo relativo en particular a los cuantificadores, podemos identificar dos grandes aportes a la concepción contemporánea, provistos por los desarrollos –independientes- de dos filósofos matemáticos.

Por un lado tenemos a Peirce, quien se inscribe en la tradición algebraica del giro matemático en lógica, y que comienza por elaborar la distinción entre cuantificadores y operadores boooleanos. En (1885) ya encontramos una concepción de ellos como abreviaturas de fórmulas infinitas; en particular, versiones infinitarias de las operaciones aritméticas de suma y producto. Al mismo tiempo, también señala que esta manera de entenderlos es figurada:

> Es preciso remarcar que $\Sigma_i x_i$ y $\Pi_i x_i$ son tan solo similares a la suma y el producto; no es esa su naturaleza estrictamente, dado que los individuos del universo podrían ser innumerables. Peirce (1885), página 195

En segundo lugar está la *Conceptografía* (1879) de Frege. Allí, el objetivo es ofrecer un lenguaje formal universal y riguroso, carente de las desprolijidades propias de los lenguajes naturales, y proveerlo de una teoría de la prueba que permita reducir todo argumento correcto a una serie de pasos mecánicos. La construcción de este lenguaje se basa en una ontología constituida por dos tipos de entidades: las saturadas, que son los objetos, y las no saturadas, que son los conceptos. Dado que las expresiones lingüísticas deben referir a alguna entidad para ser significativas, nos encontramos con que los predicados refieren a conceptos y los nombres a objetos. Esto es, se reemplaza el análisis en términos de sujeto y predicado por uno en términos de funciones y argumentos.

En este marco teórico, no hay lugar para tratar a los cuantificadores como términos, tal como hacía Aristóteles. Dentro de las dos posibilidades que ofrece la nueva ontología, los cuantificadores sólo pueden referir a conceptos. Sin embargo, sus argumentos no son simplemente entidades saturadas, sino que son a su vez otros conceptos. En *Los fundamentos de la aritmética* (1884) Frege llama a los cuantificadores "conceptos de segundo nivel".

Ya en el siglo XX, las ideas de Frege se abren en un campo que hoy se conoce como *Teoría de los cuantificadores generalizados*. El primero en proveer un aparato formal y probar resultados para cuantificadores distintos de "todos" y "alguno" es Mostowski (1957). Su proyecto consiste en caracterizar a los cuantificadores como operadores que ligan variables, y que semánticamente son interpretados como funciones que van de la potencia del dominio en {0,1}. A partir de ello, define toda la familia de "exactamente *n*", pero también otros que no son definibles en lógica de primer orden, como "hay una finita cantidad de cosas en el dominio" o "más de la mitad de las cosas del dominio".

Algunos años más tarde Rescher (1962) retoma las ideas de Mostowski, pero su interés se desplaza de la mera generalización matemática de operaciones, hacia la interpretación de expresiones del lenguaje natural. En particular, Rescher se pregunta cómo modelar el cuantificador "la mayoría" (que hoy en día se conoce en la literatura como "cuantificador Rescher"), y ofrece ciertos principios –aunque no una axiomatización completa- que lo regulan. También en Montague (1973) encontramos la idea de interpretar a los cuantificadores del lenguaje natural como clases de clases, aunque su interés va más allá del cuantificador de Rescher.

Finalmente, Zadeh (1983) –inventor de la teoría de conjuntos difusa- da el siguiente paso y enmarca a los cuantificadores como un capítulo del proyecto de desarrollar una lógica que sirva como herramienta para la inteligencia artificial. Esto abre la puerta a considerar aún más cuantificadores, ya no sólo aquellos que resultan indefinibles en primer orden, sino también los que aparentan escapar a las reglas de la lógica clásica en general.

El presente capítulo se estructura de la siguiente manera. En la siguiente sección presentaremos la teoría de cuantificadores generalizados, con un esbozo de su semántica. No entraremos en los detalles de las interpretaciones difusas, puesto que no será luego la herramienta sobre la que construiremos nuestra propuesta. En la sección 3 veremos en qué sentido se relacionan la vaguedad de los cuantificadores con la de los predicados. Voy a sostener que se trata de hecho del mismo fenómeno, en tanto los cuantificadores pueden pensarse como "conceptos de segundo nivel". Finalmente, en la sección 4 platearemos la pregunta por el status de estos cuantificadores vagos en relación a la lógica entendida como una teoría que no es acerca de nada más que la relación de consecuencia. Si bien la discusión en última instancia excede los límites de la tesis, creo que hay razones suficientes para sostener que los cuantificadores vagos son de hecho lógicos, debido al rol que cumplen en la forma de las inferencias.

2 Teoría de cuantificadores generalizados

2.1 Tipos de cuantificadores

A modo de aclaración preliminar, a lo largo de este capítulo usaremos la misma palabra para referirnos a dos cosas que son diferentes, y que distinguiremos en nuestro lenguaje formal (teórico y metateórico). El término *cuantificador* referirá tanto al objeto lingüístico ($\forall$) como al operador matemático ($\underline{\forall}$) que usamos para interpretarlo.

Como dijimos, la teoría de los cuantificadores generalizados parte de comprender a $\forall$ y $\exists$ en primer lugar como operaciones que toman conjuntos del dominio de un modelo y ofrecen alguno de los valores {0,1}:

Definición (*Cuantificador preciso*) Un cuantificador preciso es una función de secuencias de subconjuntos del dominio en {0,1}.

Muchas operaciones además de $\underline{\exists}$ y $\underline{\forall}$ -como adelantamos, no necesariamente definibles en primer orden- son cuantificadores precisos en este sentido:

$$\underline{\exists}\Psi = \begin{cases} 1 \text{ si } card(\Psi)\neq\emptyset \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \qquad \underline{\forall}\Psi = \begin{cases} 1 \text{ si } card(\Psi)=card(D) \\ 0 \text{ si en otro caso} \end{cases}$$

$\underline{\exists^{3}}\Psi =$ 1 si *card*(Ψ)=3
0 en otro caso

$\underline{\exists^{\aleph_0}}\Psi =$ 1 si *card*(Ψ)=$\aleph_0$
0 si en otro caso

$\underline{\forall^{1/2}}\Psi =$1 si *card*($\Psi$)=*card*(D)/2
0 en otro caso

$\underline{\forall^{-k}}\Psi =$ 1 si *card*(Ψ)=*card*(D)-*k*
0 si en otro caso

Donde D es el dominio del modelo, y *card*(Ψ) refiere a la cardinalidad de Ψ.

Así como el resultado de las operaciones varía, también puede considerarse la variación sintáctica en la cantidad de argumentos (razón por la cual presentamos la definición para tuplas en lugar de simplemente subconjuntos del dominio). La idea de contemplar distintas aridades puede resultar innecesaria para el lógico poco interesado en el lenguaje natural, dado que cuantificadores como "todos los *A* son *B*" pueden reducirse a un cuantificador unario "todos", y emplear el condicional para restringir su alcance. Sin embargo, este procedimiento no puede emplearse para otros casos, como "más de la mitad de los *A*". Puesto de modo intuitivo, la primera oración no puede parafrasearse como la segunda:

(1) *Más de la mitad de los gatos son blancos.*

(2) *Más de la mitad de las cosas, si son gatos, son blancos.*

dado que la segunda es verdadera si en el dominio hay un gato blanco, dos gatos negros y cincuenta cosas que no son gatos, mientras que en ese modelo la primera debería ser falsa (Barwise & Cooper (1981) son quienes prueban en general esta imposibilidad de reducción).

Por ende, estos cuantificadores restringidos son operaciones irreductiblemente diádicas:

$$\underline{half}(\Phi,\Psi) = 1 \text{ si } card(\Phi\cap\Psi)>card(\Phi)/2$$

Desde el punto de vista sintáctico, esto puede representarse de muchas maneras. Para evitar introducir variables de segundo orden, lo más sencillo es agregar al lenguaje de primer orden cuantificadores que ligan variables objetuales al igual que $\forall$ y $\exists$, pero que funcionan sintácticamente como operadores n-arios. Por ejemplo, la formalización de (1) sería:

$$halfx((Gx)(Bx))$$

que debe leerse como "la mitad de las cosas *que* son gatos, son blancos", sin que ese "que" pueda reducirse a un condicional.

El segundo paso en la expansión de la teoría cuantificacional consiste en notar que esas mismas operaciones a veces se aplican en el lenguaje natural a argumentos vagos:

(3) *Todos son altos*.

Un modo de representar formalmente esos argumentos es como conjuntos difusos, esto es, conjuntos cuyas funciones características tienen como codominio el intervalo [0;1]. Ahora bien, las operaciones definidas más arriba aplicadas a argumentos difusos pueden resultar demasiado estrictas. Por ejemplo, si todas las personas en cuestión tienen una altura mayor que el promedio, aunque quizás no todas sea determinadamente altas, (3) resultaría tan falso como si alguno de ellos fuera sin dudas petiso.

Es por ello que la lógica difusa propone interpretaciones más generales de los cuantificadores, de modo que típicamente, cuando los argumentos sean precisos, den los resultados clásicos, y cuando no lo sean, den resultados más tolerantes:

Definición (*Cuantificador difuso*) Un cuantificador difuso es una función de secuencias de subconjuntos posiblemente difusos del dominio en [0,1].

Todo cuantificador preciso es difuso, aunque no a la inversa. Para modelar los cuantificadores "todos" y "alguno" del lenguaje natural, las funciones que se utilizan son las propuestas por la lógica difusa de Łukasiewicz, presentada por primera vez en (1920):

$$\underline{\exists}\Psi = \mathit{supr}(\Psi) \qquad \underline{\forall}\Psi = \mathit{inf}(\Psi)$$

donde *supr* y *inf* son operaciones que arrojan respectivamente el supremo y el ínfimo valor de la función característica del conjunto.

Ahora bien, existe otro fenómeno de indeterminación que se refleja en oraciones como

(4) *Muchos son altos*

Aquí no se trata de generalizar la operación clásica, sino que la operación es difusa *incluso para conjuntos clásicos*. Para distinguirlos del caso general de cuantificadores difusos, llamaremos a estos *vagos* o *aproximados,* y a los difusos que no son vagos, *exactos*:

Definición (*Cuantificador vago*) Un cuantificador vago es un cuantificador difuso que ofrece valores intermedios para algunos argumentos precisos.

Definición (*Cuantificador exacto*) Un cuantificador exacto es un cuantificador difuso que ofrece valores clásicos para algunos argumentos clásicos.

Los cuantificadores del lenguaje natural presentan más habitualmente aridad 2 que otras aridades; pero es particularmente extraño pensar en cuantificadores vagos de aridad 1. El cuantificador de (4) puede entenderse como restringido “a la fuerza” por el dominio, pero sin dudas no podremos hacer eso si queremos interpretar a la vez diversas oraciones. Vamos a volver sobre esto en la sección 4.

En síntesis, la teoría de los cuantificadores generalizados divide a las oraciones en cuatro grupos:

Tipo 1: El cuantificador y sus argumentos son precisos.
Tipo 2: El cuantificador es preciso, pero sus argumentos pueden ser difusos.
Tipo 3: El cuantificador puede ser difuso, pero sus argumentos son precisos.
Tipo 4: El cuantificador y sus argumentos pueden ser difusos.

Las oraciones de tipo 1 son las únicas que maneja la lógica clásica, las de tipo 4 incluyen presumiblemente a cualquier oración del lenguaje natural. Las del tipo 2 son las características de las lógicas difusas aplicadas a problemas que no tienen que ver con imitar lenguajes y comportamientos humanos, como es el campo de las paradojas por ejemplo. Por último, las oraciones del tipo 3 son más bien de interés teórico, puesto que sirven para definir algunos métodos de evaluación, que es el tema de la siguiente subsección.

2.2 Métodos de evaluación

Existen diversos problemas a la hora de elegir la manera de interpretar los cuantificadores difusos en general. En lo que sigue, vamos a utilizar el “muchos” (artificialmente) monádico como ejemplo de cuantificador vago, y vamos a utilizar el símbolo $\tilde{\forall}$ para representarlo. Por ejemplo, supongamos que tenemos una clase con diez estudiantes, y queremos interpretar la siguiente formalización de (4):

$$\tilde{\forall} x A x$$

Siendo D el dominio del modelo, una posible función para $\tilde{\forall}$ podría ser:

$\underline{\forall}\Psi =$ *min*{1, (*card*(Ψ)/*card*(D)).1,2}

Suponiendo que Ψ sea un conjunto preciso, y que haya seis alumnos altos, el valor de verdad de la oración en la valuación correspondiente sería $\nu(\forall xAx)$=0,72, es decir, es parcialmente verdadero que casi todos son altos. Sin embargo, del mismo modo podríamos haber elegido la función:

$\underline{\forall}\Psi =$ *min*{1, (*card*(Ψ)/*card*(D)).1,3}

Cuyo resultado sería $\nu(\forall xAx)$=0,78. La pluralidad de interpretaciones posibles para cuantificadores vagos es infinita, y no existe para ellos el consenso que hay con Łukasiewicz.

Pero hay además otras complicaciones que se presentan específicamente en este campo. En primer lugar, los cuantificadores vagos presentan sensibilidad al contexto, mientras que los exactos no. Cuántos solteros sean *muchos* puede depender de cosas como por ejemplo su pertenencia social, religiosa, etc.

En segundo lugar, existen muchos cuantificadores vagos no necesariamente interdefinibles entre sí, para los cuales es muy difícil determinar si deban tomarse como sinónimos, o cuáles sean sus diferencias semánticas.: "bastantes", "unos cuantos", "una cantidad considerable", etc.

En tercer lugar, si las funciones se definen apelando a la cardinalidad de los argumentos, tenemos el problema de que, mientras que para conjuntos precisos el concepto se encuentra perfectamente caracterizado, a la hora de definirlo para conjuntos difusos hay diversas opciones que extienden en algún sentido la noción clásica. La primera y más sencilla es definirla como un número real preciso. Para ello puede utilizarse la *Cuenta Sigma* (*Sigma Count,* cuya función representativa abreviaremos $count_{\Sigma}$):

Definición (*Cuenta Sigma*) $count_{\Sigma}(\Psi)=\Sigma_{A\in\Psi}\,\nu(A)$

El conjunto que Zadeh elige para ilustrar esto es *amigos de Teresa*, presumiblemente vago. Supongamos que *a* es la función característica de ese conjunto:

a(Enrique)=1	*a*(Sergei)=0,9
a(Ramón)= *a*(Ron)=0,8	*a*(Ellie)=0,7

La cantidad difusa de amigos de Teresa es entonces 4,2. Si tomamos la interpretación de $\forall$ que dimos más arriba, y asumimos que estos son todos los objetos del dominio, el valor de verdad de la fórmula $\forall xAtx$

(donde *A* es la relación de amistad y *t* es una constante que denota a Teresa) es 1, esto es, es absolutamente verdadero que Teresa tiene muchos amigos.

El problema de la cuenta sigma es que no permite distinguir muchos grados pequeños de pertenencia, de un grado alto. Por ejemplo, si tenemos dos personas que son 0,5 peladas y usamos la cuenta sigma para preguntarnos el valor de verdad de la oración "Hay exactamente una persona pelada", la respuesta será que la oración es perfectamente verdadera (ver Glökner (2006)).

Una segunda opción es considerar que la cardinalidad de un conjunto difuso debe ser a su vez un número difuso, es decir, una función de números naturales en números reales. Existen diversos modos de calcular cardinalidades difusas, a las que no nos dedicaremos aquí.

La tercera y más moderna de las opciones es usar Mecanismos de difusión cuantificacional (*Quantifier Fuzzification Mechanisms*, *QFM*). Los cuantificadores en oraciones de tipo 3 se llaman semi-difusos, y tienen el interés técnico de permitir la definición de cuantificadores difusos sin necesidad de apelar a un concepto de cardinalidad para conjuntos difusos.

Definición (*Cuantificador semi difuso*) Un cuantificador semi-difuso es una función de secuencias subconjuntos del dominio en [0,1].

Definición (*Mecanismos de difusión cuantificacional*) Un Mecanismo de difusión cuantificacional es una función que asigna a cada cuantificador semi difuso un cuantificador difuso.

No entraremos en mayores detalles acerca de estos métodos puesto que en todo lo que digamos a continuación, sólo usaremos semánticas discretas. Allí, al no haber grados mayores y menores de indeterminación, las objeciones a la cuenta sigma desaparecen, con lo cual podremos valernos de ella sin problemas. En la siguiente sección veremos las razones por las cuales consideramos que no es necesario apelar a semánticas difusas.

2.3 Cuantificadores vagos discretos

El estudio de cuantificadores vagos surgió dentro de los desarrollos en lógica difusa y ha permanecido casi exclusivamente dentro de ese ámbito. Es llamativa esta diferencia respecto de los predicados vagos estándar, para los cuales encontramos también teorías discretas. Vale entonces la pena preguntarse si puede darse este tipo de tratamientos a los cuantificadores.

Dejando de lado las teorías epistemicistas, la idea de cuantificador vago no puede siquiera ser definida en un contexto clásico, puesto que todos los inputs y outputs posibles son clásicos. En una semántica trivaluada, sin embargo, ya podemos distinguir, por un lado, entre los conjuntos que tienen funciones características bivalentes y los que no –esto es, entre conjuntos exactos y cuasidifusos- y por el otro, entre cuantificadores que pueden ofrecer el valor intermedio aun cuando reciben inputs clásicos, y cuantificadores que no –esto es, entre cuantificadores vagos y no-vagos.

Del mismo modo que usamos la cuenta sigma para medir la cardinalidad de conjuntos difusos, podemos usarla para medir la de conjuntos cuasidifusos, y dar así una interpretación de nuestro cuantificador vago $\tilde{\forall}$:

$$\underline{\tilde{\forall}}\Gamma = \begin{cases} 1 \text{ si } count_{\Sigma}(\Psi) \geq k \\ ½ \text{ si } m < count_{\Sigma}(\Psi) < k \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Por supuesto, esto implica que la adición de un elemento a Ψ haga que pasen de no ser definitivamente muchos Ψ a sí serlo; esto es, una interpretación trivaluada presenta venganzas de vaguedad de orden superior. Sin embargo, la lógica difusa también presenta esas revanchas.

A la hora de decidir entre propuestas rivales, es crucial preguntarnos por nuestro objetivo a la hora de construir lenguajes formales con semánticas basadas en aparatos matemáticos. Cook (2002) y Edgington (1997) defienden una concepción de la lógica según la cual el objetivo es ofrecer un *modelo* del lenguaje natural, en el sentido en que una maqueta es un modelo de una casa. Como tal, no todo elemento es representativo de un fenómeno real. En el caso de ellos, que están considerando a la lógica difusa, lo que sostienen es que el orden de los valores y su distancia sí modelan aspectos presentes en nuestros lenguajes – a saber, que la verdad es una cuestión de grado, y que ciertas oraciones son más verdaderas que otras. Pero no toda distancia es representativa: a veces, cuando $|a - b|$ es un número muy pequeño, esa diferencia es una propiedad del artefacto y no de lo que representa.

Ahora bien, si lo que debemos elegir son modelos en este sentido, la fidelidad no debería ser el único valor a tener en cuenta. Un modelo más detallado puede ser más útil para algunos propósitos, mientras que un modelo más abstracto puede ser preferible para otros. Siguiendo el mismo ejemplo, una maqueta de una casa será más semejante a la casa cuanto más grande sea, pero con su tamaño también aumentará la incomodidad que provoque manipularla. Así, las semánticas trivaluadas pueden ser consideradas como modelos más pequeños, en el sentido de versiones de gran más grueso de los modelos difusos, que son más elegantes y sencillos de utilizar.

Si bien quizás a la hora de implementar estos modelos en sistemas de inteligencia artificial sea deseable una alta facultad de discriminación, si lo que queremos en cambio es estudiar la naturaleza de ciertos fenómenos en su sentido más básico, no veo que apelar a conjuntos difusos nos resulte particularmente iluminador.

Como ya adelantábamos en la sección precedente, una consecuencia agradable que también tiene la simplificación a una semántica discreta es que la cuenta sigma no tiene el problema de no poder discriminar entre una acumulación de muchos casos con grados bajos de verdad y pocos casos, pero con grados altos, en tanto nada en la semántica realiza esa distinción.

3 Vaguedad de cuantificadores y de predicados

Es necesario en este punto dar cuenta de qué modo se relaciona el fenómeno de vaguedad presente con el fenómeno estándar predicativo. Las opciones generales son dos. La primera, que es la que tomaré dadas las consideraciones fregeanas que mencionamos al comienzo del capítulo, es que se trata de una manifestación particular de lo mismo que ocurre con los predicados tradicionales. Es sin dudas la posición que resulta *prima facie* más razonable: sería muy curioso que todos quienes durante años trabajaron en la materia hubieran estado tan fundamentalmente equivocados respecto de su naturaleza.

No obstante, también es posible considerar la vaguedad de los cuantificadores como el fenómeno básico que permite explicar la de predicados. Me detengo en esta posibilidad porque hay un caso de alguien que la ha defendido. Vamos entonces primero a presentarla, y mostraremos que, aunque resulta atractiva –quizás debido a su originalidad- un enfoque de este tipo no puede funcionar.

3.1 La teoría del cuantificador oculto

El artículo que presenta la posible preponderancia teórica de cuantificadores sobre predicados vagos es el de Patrick Grim en (2005). La idea consiste en definir los predicados monádicos vagos como por ejemplo "ser rojo" o "ser alto" en función de una relación diádica *más rojo que*, *más alto que* y un cuantificador vago $\tilde{\forall}x$[4]. La paráfrasis de "*a* es rojo" sería "*a* es más rojo que una gran parte de las cosas".

Una de las esperadas ventajas de plantear las cosas de este modo radica en la posibilidad de reformular el principio de tolerancia. No se trata de que la propuesta permita aceptarlo –lo cual es el santo grial de las teorías de la vaguedad. Por el contrario, Grim niega tanto la verdad de la oración cuantificada de modo tradicional, como su reformulación en términos del cuantificador oculto:

$$\forall x \forall y((Fx \wedge Sxy) \rightarrow Fy) \qquad\qquad \forall x \forall y((\tilde{\forall} zFxz \wedge Sxy) \rightarrow \tilde{\forall} zFyz)$$

Sin embargo, dado el rechazo de tercero excluido para $\tilde{\forall}$, ello no nos comprometería con la aceptación del principio que afirma la existencia del corte preciso entre las cosas que son *F* y las que no lo son:

$$\exists x \exists y((\tilde{\forall} zFxz \wedge Sxy) \wedge \neg \tilde{\forall} zFyz)$$

Por otro lado, otra herramienta que nos proveería $\tilde{\forall}$ es la posibilidad de explicar el motivo psicológico de que el principio de inducción parezca verdadero a pesar de no serlo, y es su semejanza sintáctica con:

$$\tilde{\forall} x \forall y((Fx \wedge Sxy) \rightarrow Fy)$$

Antes de indicar los problemas que encontramos con esto, vale la pena señalar una ventaja que –a diferencia de las que mencionamos hasta ahora- sin dudas tiene el enfoque de Grim, y que el mismo no menciona, que es el hecho de que su solución no depende de una formulación particular del principio de tolerancia, por ejemplo en función de condicionales o conjunciones. La paradoja de Sorites podría formularse directamente sin el principio, y el cuantificador seguiría estando en el centro de la explicación:

$$\tilde{\forall} zFa_1z, \ldots \tilde{\forall} zFa_nz, \ldots Sa_1a_2 \ldots Sa_na_{n+1} \vDash \tilde{\forall} zFa_{n+1}z,$$

[4] Grim no menciona relaciones vagas, pero lo mismo podría extrapolarse sin dificultad a cualquier aridad.

Esto, como dijimos en el capítulo 1, es un problema difícil de resolver para básicamente cualquier teoría que resuelva la paradoja apelando a una reinterpretación del significado de los operadores lógicos en términos no-clásicos.

Una primera dificultad surge del hecho de que, respecto de una posible semántica formal para $\forall x$, Grim sólo sugiere la necesidad de evitar la bivalencia, pero también cualquier n-valencia, e incluso cualquier posible semántica difusa. Esto es más bien una expresión de deseo que otra cosa: si una semántica de ese tipo existiera, podría utilizarse también para interpretar predicados vagos en el sentido tradicional, sin necesidad de apelar a cuantificadores especiales.

En cualquier caso, creo que hay razones de mayor peso para pensar que la reducción que desea Grim es imposible. La primera de ellas es que parece incurrir en una circularidad viciosa. Dijimos que esta teoría entiende a la propiedad de ser rojo como la propiedad de ser más rojo que muchas cosas. Por un lado, la propiedad de ser pelado también se caracteriza como la de ser más pelado que mucha gente. Ahora bien, el "muchas" de "ser rojo" y el "muchas" de "ser pelado" no tienen por qué coincidir en general. Y parece difícil pensar un modo de distinguir ambos cuantificadores sin hacer referencia a la propiedad misma de ser rojo, como sería "*x* es rojo si y sólo si *x* es más rojo que muchas-para-ser-rojo cosas".

La segunda razón es que parece claro que en última instancia, no se trata de una cuestión cuantitativa. "Muchos" es sin dudas sensible al contexto, algo que en un situación cuenta como rojo, en otra no lo será. Sin embargo, pensemos en los siguientes dos contextos: uno en el cual hay cinco limones y un caqui (que es color bermellón), y otro en el cual hay diez limones, un caqui y una manzana deliciosa (que es color bordó). El caqui es más rojo que más cosas en el segundo contexto, y sin embargo es más probable que cuente como rojo a secas en el primero, dada la ausencia de algo más rojo para comparar.

Una posible respuesta podría ser que la presencia de la manzana en el segundo contexto hace que el significado de "muchos" se vuelva más estricto, pero esto parece completamente *ad hoc*.

3.2 Modos tradicionales de la vaguedad

Una ventaja de igualar la vaguedad de los cuantificadores a la de los predicados es que no resulta ser un fenómeno misterioso, radicalmente distinto, o siquiera meramente emparentado al tradicional: es exactamente el mismo. Por ende, todo lo que sabemos de unos puede trasladarse a los otros.

En Solt (2011) encontramos justamente una comparación entre las palabras de la clase de *many* y los adjetivos graduados, hecha en relación a (i) la existencia de comparativos y superlativos; (ii) la combinación con modificadores de grado; (iii) la sensibilidad al contexto; (iv) la presencia de casos limítrofes; y (v) la sensibilidad a Sorites. Las dos primeras son caracterizaciones más lingüísticas que lógicas, con lo cual no les prestaremos demasiada atención. La tercera es una característica de quizás todos los predicados vagos, pero que dudosamente sea la responsable de su vaguedad. Por ende, vamos a considerar aquí cómo funcionan los casos limítrofes y la sensibilidad a Sorites.

(i) Casos limítrofes

Que $\forall A$ tenga un valor intermedio no puede ser –como en el caso de los conceptos de primer nivel- suficiente para considerar a A un caso limítrofe de $\forall$, ya que de ser así, los cuantificadores exactos serían vagos. Dicho de otro modo, no todo conjunto de pelados es una cantidad indeterminada de "muchos pelados" sólo por el hecho de que haya en el grupo gente con una cantidad limítrofe de pelos.

Intuitivamente, un caso limítrofe de un cuantificador vago es una cantidad que no sea ni determinadamente muchos objetos, ni determinadamente no-muchos. En términos formales, lo que hay que considerar es si la cuenta sigma de ese conjunto da algún valor que se encuentre en la penumbra de $\forall$. Por ejemplo, retomando la definición trivaluada que ofrecimos en la sección (2.3):

$$\underline{\forall}\Psi = \begin{cases} 1 \text{ si } count_{\Sigma}(\Psi)\geq k \\ \frac{1}{2} \text{ si } m<count_{\Sigma}(\Psi)<k \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Todo conjunto con una cantidad n de elementos tal que $m<n<k$ va a ser un caso limítrofe de $\forall$. Necesariamente, algunos de esos Ψ limítrofes serán conjuntos precisos, dado que todos los subconjuntos de objetos del dominio de discurso están en el dominio de la función $\underline{\forall}$. Ellos son los que de hecho manifiestan

la vaguedad del predicad. Sólo a partir del hecho de que una fórmula reciba un valor intermedio no podríamos reconstruir si el cuantificador es o no vago.

Dado que mostramos cómo entender lo que es un caso limítrofe de un cuantificador, la idea de que pueda tener precisificaciones no resulta demasiado misteriosa: deberían ser cuantificadores precisos que resuelvan esa indeterminación de alguna manera. Sin embargo, como veíamos en el capítulo 1 en la escasa literatura filosófica que menciona el problema de la vaguedad de las conectivas, ella es rechazada justamente en función de la ausencia de precisificaciones.

Retomando un poco lo que decíamos acerca de Sider (2003) -ahora a la luz de lo que hemos visto acerca de cuantificadores vagos- el problema que identifica no es relevante. Su objeción es que a la hora de describir las pretendidas precisificaciones de $\exists$, debemos decir que hay dos $\exists_1$ y $\exists_2$ tales que *hay* un objeto que pertenece a la extensión de uno pero no del otro. Por ende, precisaríamos un metalenguaje vago para describir las posibles extensiones de $\exists$, a diferencia de "ser amarillo", cuyas extensiones clásicas pueden ser descriptas en un lenguaje preciso.

Sin embargo, más allá del hecho de que el argumento no es muy sólido incluso en contra de la posible vaguedad de $\exists$, lo mencionamos aquí porque es importante recalcar que de él no se sigue –como Sider afirma repetidas veces- que ningún vocabulario lógico pueda ser vago. Y lo que quiero sostener aquí no es que los cuantificadores ni las conectivas clásicas lo sean ni puedan serlo, sino que otras operaciones distintas de ellas lo son.

(ii) Sorites

Respecto de Sorites, el ejemplo que ofrece Solt misma es:

1000 estudiantes asistentes a la conferencia de Clinton son muchos.

Si n estudiantes asistentes a la conferencia de Clinton son muchos, n-1 también son muchos.

Por ende, 0 estudiantes asistentes a la conferencia de Clinton son muchos.

Este argumento, formalizado utilizando nuestro lenguaje de primer orden con el cuantificador vago unario (suponiendo que el dominio está compuesto sólo de estudiantes) sería:

$$\begin{array}{l}
card(\underline{Axc})=1000 \rightarrow \not\forall x Axc \\
\forall n(card(\underline{Axc})=n \rightarrow \not\forall x Axc) \rightarrow (card(\underline{Axc})=n\text{-}1 \rightarrow \not\forall x Axc) \\
\hline
card(\underline{Axc})=0 \rightarrow \not\forall x Axc
\end{array}$$

Donde *Axy,* es la relación de asistencia, *Axy* el nombre del conjunto de objetos que satisfacen la relación y *c* el nombre de la conferencia. El rol de la relación de semejanza para predicados lo cumple aquí la cardinalidad de los conjuntos a los que se aplica $\not\forall$. Vale la pena notar que la paradoja no descansa en la vaguedad de ninguno de los predicados empleados (que son al menos suficientemente precisos).

4 ¿Son lógicos los cuantificadores vagos?

A todo esto, que existan cuantificadores vagos no es suficiente para probar hay operadores lógicos vagos, si no demostramos a su vez que esos cuantificadores son de hecho operadores lógicos. Vamos a considerar entonces dos puntos de vista al respecto.

Uno de los criterios más clásicos de logicidad lo ofrece justamente Mostowski (1957) cuando presenta los cuantificadores generalizados, y es el de *Invariancia bajo Permutaciones*:

> Un cuantificador limitado a I [el dominio] es una función que asigna uno de los elementos $\wedge$, $\vee$ [1 y 0 en nuestra notación] a cada función proposicional *F* en I con un argumento, y que satisfice la condición de invariancia: Q(*F*)=Q(F_{φ}), para toda *F* y toda permutación φ de I. Mostwski (1957), página 13.

donde una permutación es una función biyectiva φ: D$\rightarrow$D, que simplemente cambia los objetos del dominio por otros. Lo que aquí encontramos como definición de cuantificador es no sólo la idea de operar sobre conjuntos de objetos, sino también la condición de que no importa *cuáles* sean esos objetos. El fundamento detrás de esto es la idea tradicional de que la lógica es neutra respecto del contenido, no es acerca de nada, tiene aplicabilidad irrestricta, etc.

La caracterización precisa ser refinada puesto que, por ejemplo como nota McGee en (1996), la *disyunción wombat* -que se comporta como una disyunción si el dominio contiene wombats, y como una conjunción en los demás casos- es invariante bajo permutaciones. La propuesta de McGee es considerar en su lugar invariancia sobre biyecciones arbitrarias.

Sin dudas, el conjunto de las cosas rojas dejará de ser tal si permutamos algunos de sus elementos por cosas amarillas. Por el contrario, el conjunto de todas las cosas del dominio –es decir, la interpretación de ∀- o el conjunto de todos los pares ⟨*a*, *a*⟩ -es decir, la interpretación del símbolo para la identidad- sí son invariables bajo permutación. Y lo mismo sucede con muchos cuantificadores generalizados, tanto definibles en primer orden -como el conjunto que contiene al menos dos cosas- como no definibles en primer orden –como el conjunto que contiene infinitas cosas- como algunos que son vagos –como el conjunto que tiene muchas cosas.

Sin embargo, Barwise y Cooper (1981) advierten sobre el error de considerar a todos los cuantificadores como operadores lógicos. En particular, casos como "muchos" o "más de la mitad", aun cuando sean invariantes bajo permutación, tienen su significado de algún modo atado al modelo, al menos para modelos infinitos. Por ejemplo, si queremos evaluar la oración:

Más de la mitad de los enteros no son primos.

necesitamos contar con alguna medida para conjuntos infinitos, y eso no va a provenir de la lógica, sino de la teoría misma.

Por un lado -como notan Peters & Wersterståhl (2008)- la posible vaguedad de "muchos" no es lo que según Barwise & Cooper estaría impidiéndole ser un cuantificador lógico:

> Es importante notar que esta cuestión no atañe a la vaguedad o la sensibilidad al contexto de "la mayoría". Barwise y Cooper dejan en claro que –como lo hemos hecho en este libro- que un *supuesto de contexto fijo* eliminaría este tipo de falta de claridad. En particular, debería fijar el límite apropiado (…). Por ende, no es la dependencia al contexto lo que impide a "la mayoría" ser lógico. Peters & Wersterståhl (2008), página 334.

Hay aquí una identificación entre vaguedad y dependencia al contexto, usual en textos de lingüística, aunque rechazada por la mayoría de los filósofos que se dedican al tema. De hecho, Barwise & Cooper proponen suplementar la teoría con una teoría contextualista *alla* Kamp, que hoy en día resultaría insatisfactoria para tratar el fenómeno. Sin embargo, el punto se sostiene, a no ser más que por el hecho de que "más de la mitad" sufre el mismo problema, y no es vago.

Por otro lado, Wersterståhl (también con Bonnay en (2012)) ofrece otro criterio de logicidad, inspirado en Bolzano, que llama *Constancia*, y que de hecho incluye a "muchos". La idea es que una expresión es lógica sólo si hay algún argumento válido en el que ella ocurre que deja de serlo si la reemplazamos por otra expresión de su misma categoría. Por ejemplo, sugieren considerar cómo el argumento:

Muchas películas francesas alientan la introspección.

Todas las películas que alientan la introspección son un fracaso comercial

Por ende, muchas películas francesas son un fracaso comercial

La validez no se pierde si reemplazamos las expresiones "películas francesas" por "autos deportivos", "alentar la introspección" por "ser convertible" y "ser un fracaso comercial" por "ser inadecuado para climas fríos", pero sí se vuelve inválido el argumento si reemplazamos "muchas" por "ninguna".

5 Conclusión

En primer lugar, hemos mostrado que de hecho existen cuantificadores que –en tanto predicados de segundo nivel- son vagos en el mismo sentido que otros predicados pueden serlo. Estas expresiones no son tan sólo construcciones teóricas, sino que habitan el lenguaje que utilizamos en la vida real. En efecto, su ubicuidad en la práctica cotidiana vuelve sorprendente el que hayan recibido tan poca atención en la literatura lógico-filosófica.

Quizás el motivo sea el problema abierto respecto de si se trata de un fenómeno propio de operadores lógicos, o de cierta categoría de determinantes no suficientemente vacía de contenido como para ser llamados lógicos. Más allá de eso, los predicados vagos sin duda no son vocabulario lógico, y no faltan teorías lógicas dispuestas a tratarlos.

En segundo lugar, hemos encontrado la característica que indica vaguedad para operadores veritativo-funcionales. A pesar de que estamos frente al mismo fenómeno que ocurre en "ser rojo", los cuantificadores tienen la especificidad de que las cosas a las que se aplican pueden o no ser clásicas -cosa que en los predicados de primer nivel no ocurre, puesto que sus objetos son todos clásicos. Como consecuencia de ello, el modo particular en que la vaguedad se manifiesta es en el hecho de que los cuantificadores pueden arrojar valores intermedios entre la verdad y la falsedad, aun cuando sus inputs sean clásicos.

Dado que nuestro foco particular de interés no son los cuantificadores, sino las conectivas proposicionales, tenemos la ventaja de que (i) no se presentan en ningún sentido los problemas de logicidad de los que hablábamos y (ii) que la particularidad semántica que identificamos como propia de la vaguedad operacional no depende de que esos operadores sean cuantificadores. En el próximo capítulo veremos entonces cómo aplicar esta noción a conectivas lógicas.

- Capítulo 4 -

Anormalidad

1 Introducción

Hasta aquí hemos mostrado que existen los cuantificadores vagos, y que su vaguedad no es misteriosa, sino que es semánticamente análoga a la de cualquier predicado. En particular, podemos articular la moraleja del capítulo anterior de la siguiente manera:

(1) La vaguedad de los cuantificadores depende de entenderlos como predicados numéricos de segundo orden.

(2) Es condición suficiente que los cuantificadores arrojen outputs no clásicos para algún input clásico para que sean vagos.

Las conectivas sin dudas pueden ser también entendidas como predicados de segundo nivel, aunque en lugar de aplicarse a fórmulas abiertas, sus argumentos serán oraciones: la negación dice de la oración que niega que es falsa; la conjunción dice de sus dos argumentos que son verdaderos, etc. Vistas de esta forma, las conectivas son predicados semánticos, parientes muy cercanos de la verdad.

En la siguiente sección mostraremos por qué el predicado veritativo no es un buen parámetro para entender a las conectivas vagas como un fenómeno *bona fide*. En la sección 3 retomaremos el sendero indicado por los cuantificadores, y analizaremos diversos modos de caracterizar una propiedad que sí es interesante, novedosa, y cuya conexión con la vaguedad no ha sido explorada, conocida como *anormalidad*. Finalmente, en la sección 4 mostraremos, al igual que lo hicimos con los cuantificadores, cómo aplicar las categorías tradicionales de la vaguedad al caso de las conectivas.

2 Vaguedad y cantidad

La idea de que el predicado veritativo es vago no está ausente en la literatura sobre paradojas semánticas, y podríamos pensar que es de allí de dónde debería provenir nuestro modelo para dar cuenta de la vaguedad de las conectivas. Vamos a considerar dos posibles modos de entender el funcionamiento del predicado veritativo, y mostrar que en ningún caso exhibe el fenómeno que estamos buscando.

Paradigmáticamente, McGee en su libro (1990) defiende la tesis de que si bien "ser verdadero" no es exactamente un predicado vago –según él, por el hecho de que da lugar a las paradojas semánticas-, es semejante a ellos, y resulta teóricamente fructífero tratarlo como tal. La característica crucial que la verdad comparte con "ser pelado" es la presencia de casos limítrofes:

> Que "verdadero" es un predicado vago no debería ser una sorpresa. Intuitivamente, cuando afirmamos o rechazamos que "Harry es pelado" sea verdadero, estamos diciendo lo mismo que cuando afirmamos o rechazamos que Harry es pelado. McGee (1990), página 112

Sin embargo, por esa misma razón, el predicado veritativo es un caso muy poco interesante, en tanto su vaguedad es por completo derivativa de la de sus argumentos.

En segundo lugar, encontramos el caso de Fine (1975), quien nota este fenómeno que se manifiesta en predicados tarskianos:

> Pues sea "$true_T$" ese concepto que satisfice la equivalencia tarskiana, incluso para oraciones vagas:
>
> $\ulcorner A \urcorner$ es $true_T$ si y sólo si A.
>
> La vaguedad de "$true_T$" crece y mengua, por así decir, con la vaguedad de la oración dada; con lo cual si a denota un caso limítrofe de F entonces Fa es un caso limítrofes de "$true_T$". Fine (1975), página 296

Sin embargo, ese no es para él el predicado ordinario de verdad. Este es más robusto que la mera conformidad con el esquema T y se define de la siguiente manera

$$Tr\ulcorner x \urcorner \text{ si y sólo si } Det(true_T(x))$$

Como veíamos en el capítulo 1, la vaguedad de segundo orden de un predicado F es aquella que depende del operador de determinación; esto es, así como hay objetos indeterminadamente amarillos, hay objetos que es indeterminado si son determinadamente amarillos o no. Dado que el operador de determinación se utiliza para definir al predicado de verdad robusto, la vaguedad de primer orden de éste va a provenir de la vaguedad de segundo orden presente en las oraciones a las que se aplique.

Sin embargo, esto sigue sin ser lo que estamos buscando. Cuando estudiamos los cuantificadores, pudimos distinguir entre el mero hecho de que una oración cuantificada pudiera recibir un valor intermedio, y el hecho de que el responsable de ello fuera el cuantificador. Como sea que lo entendamos, el predicado de verdad obtiene su vaguedad directamente de sus argumentos. El error radica en que en los cuantificadores, no es el aspecto semántico –todos los objetos *hacen verdadero* al predicado- sino el aspecto cuantitativo –una *cierta cantidad* de objetos hacen verdadero al predicado- el responsable de la vaguedad genuinamente lógica.

Las conectivas también pueden pensarse como predicados de cantidad, pero a diferencia de los cuantificadores, sus argumentos no son conjuntos de objetos, sino oraciones. Una posibilidad –para mantener la estructura lo más análoga posible a la de los predicados, es decir que las conectivas predican algo del conjunto de objetos a los que refieren los términos involucrados en las oraciones. Esto es posible de caracterizar, pero el resultado sería realmente intrincado. Por ende, nos limitaremos a decir que son simplemente predicados de conjuntos de oraciones.

La cantidad entra en juego en tanto que afirman que algún número de sus argumentos es verdadero: la negación afirma que ninguno lo es, la disyunción que lo es al menos uno; la conjunción que son los dos, y así. Sea $\tau_\nu(\Psi)$ el subconjunto de Ψ que son oraciones verdaderas en ν.

$$\nu(conj(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner))=1 \text{ si } card(\tau_\nu\{A,B\})=2$$
$$0 \text{ en otro caso}$$

$$\nu(disy(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner))= 1 \text{ si } card(\tau_\nu\{A,B\})>1$$
$$0 \text{ en otro caso}$$

Algunas aclaraciones antes de avanzar. En primer lugar, dado que no toda conectiva es conmutativa, estrictamente esos conjuntos no deberían ser oraciones, sino tener una estructura interna, es decir, ser secuencias.

En segundo lugar, no toda caracterización de una conectiva será una medida simple de cantidad, así como no todo cuantificador generalizado lo es. Por ejemplo, podríamos tener una conectiva de aridad 10 que expresara "más de las primeras cinco que de los segundas cinco oraciones son verdaderas" –lo cual sería equivalente a un cuantificador proporcional.

En tercer lugar, no deben confundirse estos predicados con los predicados o funciones que es habitual encontrar cuando usamos teorías de la sintaxis (por ejemplo, cuando hacemos una teoría de la verdad sobre la base de **PA**) que meramente afirman que algo es una conjunción[5].

De ese modo, si podemos ver a las conectivas como números, podemos pensar en la posibilidad de un número difuso. Para que sean cantidades difusas, al igual que los cuantificadores, deben poder tener casos indeterminados. Del mismo modo, para que sean vagas, deben dar un resultado indeterminado para alguna secuencia de argumentos precisos. Esta propiedad es conocida como *Anormalidad*.

3 Definiendo la normalidad

La normalidad es una propiedad de sistemas proposicionales no-clásicos, raramente mencionada, dada su ubicuidad. Rescher (1968) atribuye las primeras investigaciones a Emil Post (1921) y Alonzo Church, en un texto inhallable, publicado en el boletín de la sociedad mexicana de matemática en (1953), llamado "Non-Normal Truth-Tables for the Propositional Calculus".

> Diremos que es normal la tabla de verdad para una conectiva proposicional que sea el análogo multivaluado de una de las conectivas bivalentes si incluye por lo menos un valor análogo a la verdad T (…) y por lo menos un valor análogo a la falsedad F (…), y esta tabla multivaluada acuerda por completo con la tabla estándar bivalente para la concectiva en C cuando sólo los valores T y F están involucrados. Rescher (1968), página 78.

Priest, por su parte, la define del siguiente modo:

> Llámese normal a una lógica multivaluada en el lenguaje del cálculo proposicional clásico si entre sus valores hay dos, 1 y 0, tales que 1 es designado, 0 no lo es, y para toda función veritativa correspondiente a una conectiva, el output para esos inputs es el mismo que el output clásico. Priest (2008), página 140.

[5] Estas funciones aparecerán en el capítulo 6, cuando nos ocupemos de la paradoja de la validez.

La idea general es que se trata de conectivas que serían clásicas, de no existir los fenómenos que precipitan la adopción de valores de verdad extraordinarios. No debe confundirse esto con otro concepto emparentado, que se encuentra en Carnap (1942). Allí, lo que puede o no ser normal son la valuaciones, y no las conectivas, y una valuación es anormal cuando no respeta las restricciones booleanas.

Ahora bien, cuando queremos precisar esta idea que a primera vista parece sencilla e intuitiva, se nos presentan ciertos escollos. En primer lugar, podemos hacer una lectura más abstracta de la exigencia de que el resultado sea clásico, o una más cargada de contenido. La primera consiste en pedir simplemente que en la tabla sólo aparezcan 1s y 0s:

Definición (*Normalidad Intrínseca 1*) Una conectiva $\odot$ es normal si y sólo si hay alguna tabla que resulta de eliminar de la tabla de $\odot$ las filas y columnas de todos los valores menos uno designado –reetiquetado como 1- y uno no designado –reetiquetado como 0- y en esa tabla sólo aparecen 1s y 0s.

En este sentido, lo que pedimos para que una operación de una lógica multivaluada sea normal es sólo que su restricción coincida con *alguna* operación booleana. Sin embargo, esta lectura de la normalidad no tiene en cuenta un factor importante, que es la traducción entre lógicas (y presumiblemente, entre ellas y el lenguaje natural) que opera en el trasfondo.

Esta lectura es más acorde a lo que dice Priest, pero deja de lado una cuestión que sí está presente en Rescher. Cuando éste habla de “el análogo multivaluado de una conectiva bivalente” nos da la pauta de que aquello en lo que está pensando no es meramente una *propiedad* que las conectivas de lógicas no-clásicas pueden tener, sino una *relación* entre conectivas de un lenguaje y conectivas de otro. Es decir, la siguiente tabla, en tanto tabla *del condicional*, no sería normal, puesto que si bien su restricción a 0 y 1 da como resultado una operación clásica, esa operación no es la interpretación pretendida de $\rightarrow$:

$\rightarrow$	1	½	0
1	0	½	0
½	½	½	½
0	1	½	1

Lo cual no quita que no sea normal para alguna otra conectiva posible (y definible, dada la completitud funcional de **CL**).

Si queremos rescatar este aspecto relacional de la normalidad, podemos modificar (Normalidad 1) del siguiente modo:

Definición (*Normalidad Relacional 1*) Una conectiva $\odot$ de $\mathcal{L}$ es normal respecto de su traducción $\odot^*$ en el lenguaje clásico $\mathcal{L}^*$ sii hay alguna tabla que resulta de eliminar de la tabla de $\odot$ las filas y columnas de todos los valores menos uno designado –reetiquetado como 1- y uno no designado –reetiquetado como 0- y esa tabla es igual a la de $\odot^*$.

Este otro concepto de normalidad es probablemente más fiel al espíritu original de la propiedad, pero tiene el problema de que nosotras queremos evaluar conectivas que no son siquiera definibles en un lenguaje clásico, con lo cual necesitamos (también) a la definición como propiedad intrínseca.

Veremos, en primer lugar, los casos parecen quedar afuera de siquiera la posibilidad de aplicar la categoría de normalidad. Para algunos de ellos, el problema es sólo aparente, y veremos que sí están siendo contemplados. Para los casos más complejos, vamos a postergarlos hasta haber presentado esas lógicas en detalle. En segundo lugar, veremos que será preciso ajustar la definición de modo tal que no sean consideradas normales lógicas que explícitamente pretenden no serlo. Por último, consideraremos un caso dudoso de posible subgeneración, que finalmente dejaremos de lado.

(i) Casos indefinidos

De buenas a primeras, la normalidad es una propiedad de lógicas caracterizables mediante tablas de verdad. Esto no constituye un problema en sí mismo, ya que se trata de una propiedad material de la semántica. Ahora bien, lo que nosotras queremos es valernos de esa propiedad para definir un fenómeno que no es meramente matemático, sino conceptual ¿Es imposible que una lógica presentada axiomáticamente tenga conectivas vagas?

Esta primera limitación, que aparenta revestir cierta gravedad, es en realidad menos letal de lo que parece. Toda lógica estructural formulada en $\mathcal{L}_P$ tiene una presentación mediante matrices –posiblemente infinitas- (ver Urquhart (2001)). Por ende, en principio podemos aplicar el criterio a cualquier lógica proposicional tarskiana extensional.

Esto deja afuera a dos casos relevantes. Por un lado, las lógicas que abandonan algún principio estructural -en particular las que resultan de eliminar de BC a Identidad o Corte- y por el otro, aquellas que cuentan con operadores intensionales. Respecto de las primeras, hay casos en que aplicar el concepto de normalidad es un error categorial, puesto que las relaciones de consecuencia no están caracterizadas por la preservación de algún valor de premisas a conclusión. Dado que estas lógicas serán particularmente afines a nuestros intereses, será necesario modificar la definición para poder aplicarla a ellas. Sin embargo, dejaremos esta tarea para la parte II, cuando hayamos presentado a la lógica **ST** en el capítulo 7.

Respecto de las lógicas con operadores intensionales, el problema es que carecen de representaciones veritativo-funcionales por completo. Volveremos sobre ellas en el capítulo 11.

(ii) Sobregeneración

De acuerdo con la caracterización de normalidad que veíamos en la cita Priest al principio de esta sección, parecería que lo único relevante a la hora de encontrar al análogo de la verdad y al análogo de la falsedad es que uno sea designado y el otro no. Sin embargo, ciertas lógicas tienen más de un valor designado (o no designado). Lo razonable *prima facie* parece ser que en estos casos bastaría con que haya al menos un par 1-0 que se comporten como los clásicos para considerarla normal. No obstante, esto podría clasificar como normales casos que no deberían serlo.

Como ejemplo de sobregeneración, podemos mirar a una familia de lógicas poco estudiada, que son las llamadas *Lógicas Conexivas*. Sus fundadores contemporáneos son Nelson (1930), quien desarrolla la idea básica de condicional conexivo, y Angell (1962), quien presenta un sistema axiomático y matrices tetravaluadas. El fundamento del que parten es el requisito aristotélico de que no haya instancias válidas de los esquemas $A \rightarrow \neg A$ y $\neg A \rightarrow A$; o también, que sus negaciones sean teoremas. Dentro de los desarrollos más recientes, la lógica de Cantwell (2008) resulta interesante como caso de estudio, ya que cuenta con una semántica veritativo-funcional que no es una mera herramienta algebraica, sino que pretende cumplir una función representativa.

La semántica es igual a **LP**, excepto por dos aspectos. El primero consiste en que el tercer valor es interpretado como gap semántico, en lugar de como cúmulo, lo cual resulta curioso, dado que se trata de un valor designado. Sin embargo, Cantwell insiste en que no debe pensarse la relación de consecuencia en la dirección de premisas y conclusión, sino en su conversa, de conclusión a premisas (esto es, si la conclusión es falsa, las premisas también lo son).

La segunda diferencia está dada por el condicional:

→	1	½	0
1	1	½	0
½	1	½	0
0	½	½	½

Ahora bien ¿es el condicional anormal o no lo es? Si tomamos a 1 como verdad, entonces la respuesta es que sí, porque el condicional con antecedente falso no resulta verdadero. Esta es justamente la *justificación* de la elección de esta tabla de verdad, el hecho de que no tenemos motivos para aceptar un condicional meramente porque su antecedente sea falso. La idea es considerarlos indeterminados, y que el peso de distinguir entre aquellos afirmables y los que no lo son recaiga sobre consideraciones epistémicas.

Sin embargo, ½ también es un valor designado, y si lo tomamos a él como verdadero, el resultado sí es la tabla clásica. La cuestión es que si tomamos esta ruta, se pierde la interpretación pretendida del condicional.

Dos posibilidades quedan entonces abiertas: o bien esa interpretación pretendida es incompatible con que ½ sea designado –en cuyo caso el problema no provendría de la definición de normalidad, sino de la construcción de esta lógica en particular- o bien identificar al valor que sea el análogo de la verdad depende de características que van más allá de lo formal –en cuyo caso es preciso enriquecer la definición de normalidad, de modo tal que el valor que resaltemos en la tabla deba cumplir con otros requisitos además de ser designado.

Mi sugerencia es elegir la opción caritativa, y tratar de acomodar nuestra propuesta para que sea lo más abarcativa posible. El modo de hacerlo será simplemente reemplazar la categoría de designado por la categoría designado*, que incluye, además de la propiedad ser preservarse en argumentos válidos, las propiedades no-formales adicionales –epistémicas, pragmáticas, o de la índole que se prefiera.

Si bien el ejemplo que motiva esta modificación es un ejemplo en el que queremos que una conectiva sea relacionalmente anormal, razones análogas podrían darse para el concepto intrínseco, así que a continuación reformulamos ambos:

Definición (*Normalidad Intrínseca 2*) Una conectiva $\odot$ es normal sii hay alguna tabla que resulta de eliminar de la tabla de $\odot$ las filas y columnas de todos los valores menos uno designado* –reetiquetado como 1- y uno no designado* –reetiquetado como 0- y en esa tabla sólo aparecen 1s y 0s.

Definición (*Normalidad Relacional 2*) Una conectiva $\odot$ de $\mathcal{L}$ es normal respecto de su traducción $\odot$* en el lenguaje clásico $\mathcal{L}$* sii hay alguna tabla que resulta de eliminar de la tabla de $\odot$ las filas y columnas de todos los valores menos uno designado* –reetiquetado como 1- y uno no designado* –reetiquetado como 0- y esa tabla es igual a la de $\odot$*.

Puede resultar curioso que esta modificación implica incorporar categorías vagas a la definición misma de la propiedad crucial que define la vaguedad. Sin embargo, ello no implica ninguna circularidad que temer, y de hecho, esta vaguedad podría ser eliminada en muchos casos, como por ejemplo todos aquellos en donde no hay siquiera más de un valor designado.

(iii) Subgeneración

La existencia de más de un valor designado habilita la existencia de conectivas que son anormales, pero de un modo inocuo. Por ejemplo, el siguiente condicional no es normal, ni tomando a 1 ni tomando a ½ como el análogo a la verdad:

→	1	½	0
1	1	½	0
½	1	1	½
0	½	½	½

Sin embargo no hay razón de peso para considerarlo anormal si, a diferencia del caso anterior, no damos peso a la diferencia entre 1 y ½. En algún sentido, lo que estamos haciendo es operando la *reducción de Suzsco*. En el sumario de una charla sobre historia de la lógica dada en Polonia, Suzsco plantea muy elocuentemente la inexistencia de la lógica multivaluada:

> Łukasiewicz es el principal perpetrador de una magnífica estafa conceptual, que ha perdurado en la lógica matemática aún hasta el presente. (…)
> Sin dudas, la POSIBILIDAD es nuestra única esperanza y la fuente de todos nuestros fracasos. No es, sin embargo, ni un valor lógico ni aquello a lo cual las fórmulas puedan referir. Debido a su personalidad inusual, Łukasiewicz ha tenido a la posibilidad y a la libertad creativa como sus más preciados ídolos. Pero ¿cómo pudo confundir la verdad y la falsedad con aquello que las oraciones describen? ¿Cómo es posible que la patraña de la multiplicidad de valores de verdad haya persistido por los últimos cincuenta años? Suszco (1977), páginas 377-379

La justificación de tamañas afirmaciones parte del hecho –probado por Wójcicki (1970)-de que toda lógica tarskiana es caracterizable a partir de modelos n-valuados. A partir de ellos, la reducción de Suszco consiste en transformarlos en modelos bivaluados asignando 1 a toda fórmula que reciba un valor designado, y 0 a toda aquella que reciba un valor no designado.

Si bien el resultado es inapelable, la moraleja que extraigamos de él sin dudas no lo es. Estas interpretaciones bivaluadas no respetarán, claro está, el significado de las conectivas, y por ende, no es claro que deban tener mayor preponderancia conceptual que las interpretaciones multivaluadas que sí lo hacen.

Una adhesión total a la tesis de Suszco vuelve irrelevante al problema de cómo definir normalidad. Sin embargo, podríamos desear algo intermedio, una semántica en donde haya algunos valores representativamente significativos, mientras que otros sean sólo instrumentos formales.

Volviendo al condicional representado por la tabla de más arriba, podríamos conformarnos con decir que no es normal, sino que posee alguna propiedad semejante pero más débil, una especie de cuasi-normalidad. La cuestión es que hay motivos no sólo suszquianos sino también formales para considerarlo propiamente normal, ya que es de hecho equivalente al de **LP**, y de otro modo el conjunto de oraciones normales (i.e., aquellas que sólo involucran conectivas normales) no estaría cerrado bajo equivalencia.

Para remediar esto, una primera idea puede ser eliminar las diferencias entre valores designados entre sí, modificando la definición del siguiente modo:

Definición (*Normalidad Relacional 3*) Una conectiva $\odot$ de $\mathcal{L}$ es normal respecto de su traducción $\odot$* en el lenguaje clásico $\mathcal{L}$* si y sólo si la tabla que resulta de reetiquetar los valores designados* como 1 y el resto como 0 es la tabla de $\odot$*.

Por supuesto, siguiendo este nuevo proceso de transformación de tablas, el resultado siempre va a ser clásico en el sentido de que sólo van a aparecer 1s y 0s. El problema ahora es que el resultado del proceso de reetiquetado puede ser una tabla no determinista, incluso si la conectiva original era de hecho normal de acuerdo definición intrínseca de normalidad. Sin ir más lejos, es lo que ocurre si reetiquetamos el condicional de **LP** (con el caso de antecedente verdadero y consecuente falso):

$\rightarrow$	1	1	0
1	1	1	0
1	1	1	1
0	1	1	1

Podemos probar entonces modificar nuevamente la definición, de modo tal que el resultado sea siempre único:

Definición (*Normalidad Relacional 4*) Una conectiva $\odot$ de $\mathcal{L}$ es normal respecto de su traducción $\odot$* en el lenguaje clásico $\mathcal{L}$* sii hay una tabla que resulta de (i) reemplazar los valores designados* por 1 y el resto por 0 y (ii) borrar todas las filas y columnas menos dos de cada (una con input 1 y otra con input 0) y esa tabla es la tabla de $\odot$*.

A pesar de que esta definición incluye los casos que queríamos, no será finalmente la que adoptemos (razón por la cual no formulamos esta definición en su versión intrínseca). El motivo es que el costo de incorporar estos casos es que terminamos por incluir como normales ciertos otros que son ejemplos típicos de lógicas anormales, como son las lógicas de Post (1921).

La familia de las lógicas de Post está conformada por una serie de sistemas n-valuados, por ejemplo tomando valores entre 0 y 1, donde los valores designados pueden ser cualquier conjunto (aunque es usual tomar a 1 solamente), la disyunción es el máximo y la negación es 1 para 0, y u-(1/n-1) para los demás valores u. Es decir, en vez de ser un operador de flip-flop, la negación es un operador circular. Por ejemplo, para $\mathbf{P}_4$:

	$\neg$
1	⅔
⅔	⅓
⅓	0
0	1

Si aplicamos la definición a **P**$_4$, tomando sólo al 1 como designado, el resultado que obtenemos es que se trata de una lógica normal. Podríamos volver a considerarla anormal si reforzáramos la definición y pidiéramos que el resultado sea no la existencia de alguna tabla clásica, sino que toda tabla bivaluada que pueda formarse sea clásica. En ese caso, a causa de la tercera línea, la negación recuperaría su carácter anormal. Pero volveríamos al punto de partida para el condicional de **LP**, que sería nuevamente considerado anormal.

Es cierto que es al menos dudoso que los sistemas de Post deban ser considerados anormales en un sentido más interesante que el meramente formal. Si bien Post en efecto propone una interpretación de las conectivas en término de operaciones sobre conjuntos de proposiciones, la negación sigue sin poder leerse como tal en ningún sentido intuitivo. La importancia principal de estos sistemas ha sido, entonces, técnica, en tanto modo de estudiar la completitud funcional.

En cualquier caso, la necesidad de incorporar a las otras lógicas tampoco estaba fundada en un requisito fuerte, en tanto se trata de casos más bien especulativos que reales. Las lógicas de Post en este sentido tienen al menos la ventaja de ser sistemas que de hecho se emplean. Con lo cual, frente a la ausencia de evidencia más concluyente, voy a optar por preservar (Normalidad 2), en sus dos versiones, que es una definición más elegante.

4 Vaguedad de conectivas y de predicados

Vamos a terminar este capítulo revisando cómo se manifiestan las propiedades tradicionales del vocabulario vago en el caso de las conectivas, del mismo modo que hicimos con los cuantificadores.

(i) Casos limítrofes

En primer lugar, está la cuestión de los casos limítrofes. Estos deben ser ciertos conjuntos de oraciones pero, como ya habíamos visto, no puede ser simplemente cualquier conjunto que dé como resultado un valor intermedio, puesto que eso haría vaga a casi cualquier conectiva de una lógica no clásica. Por el otro lado, tampoco pueden ser casos limítrofes sólo aquellos conjuntos que den valores intermedios pero sólo contengan oraciones clásicas,

Las conectivas vagas afirman que una cantidad difusa de sus argumentos –"muchos"- son verdaderos. Por ende, los casos limítrofes serán aquellos conjuntos cuya cantidad de argumentos verdaderos no sea ni muchos ni no-muchos.

Para medir la cantidad de oraciones verdaderas en un conjunto debemos utilizar la cuenta sigma, dado que algunas oraciones pertenecen a $\tau_V(\Psi)$ sólo en algún grado, al igual que sucedía con el conjunto de amigos de Teresa. En base a eso, podemos definir el predicado *con* que representa alguna conectiva vaga por ejemplo así:

$$\nu(con(\ulcorner A\urcorner, \ulcorner B\urcorner))= \begin{cases} 1 \text{ si } count_\Sigma(\tau_V\{A,B\})>n \\ 0 \text{ si } count_\Sigma(\tau_V\{A,B\})<n \\ \tfrac{1}{2} \text{ en otro caso} \end{cases}$$

De este modo, todo conjunto que tenga *n* oraciones verdaderas será un caso limítrofe de *con*.

Ahora bien, el hecho de que la conectiva valga ½ para alguna cantidad $count_\Sigma(\Psi)$ no es suficiente para que sea anormal. De hecho, toda conectiva no-bivalente puede ser representada como una cantidad cuasidifusa en ese sentido. Por ejemplo, la siguiente operación trivaluada da como resultado la disyunción de **K3**:

$$\nu(disy(\ulcorner A\urcorner, \ulcorner B\urcorner)) = \begin{cases} 1 \text{ si } count_\Sigma(\tau_V\{A,B\})>\tfrac{1}{2} \\ 0 \text{ si } count_\Sigma(\tau_V\{A,B\})<\tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} \text{ en otro caso} \end{cases}$$

que claramente es una operación normal. Lo que tiene que ocurrir es que haya un número que sea entero (i.e., clásico), tal que sea indeterminado sin son muchas oraciones verdaderas. En el caso de la disyunción, eso no ocurre.

No obstante, hay otra cuestión que surge, aunque no tiene que ver específicamente con las conectivas, lo mismo puede ocurrir con los cuantificadores. Supongamos que tenemos un cuantificador difuso que significa "aproximadamente 5", de modo tal que es absolutamente verdadero de un conjunto con entre 4 y 6 elementos, indeterminado para 3 y 7, y falso en los demás casos. Si tenemos conjuntos difusos, habrá muchos modos de sumar 3 elementos:

Ψ={⟨a; 0,5⟩, ⟨b; 0,5⟩, ⟨c; 1⟩, ⟨d; 0,9⟩, ⟨e; 0,1⟩}

Ψ={⟨a; 1⟩, ⟨b; 1⟩, ⟨c; 0,9⟩, ⟨d; 0.1⟩}

Ψ={⟨a; 1⟩, ⟨b; 1⟩, ⟨c; 1⟩}

Para cuantificadores de esta clase, es imposible que no haya alguno de esos conjuntos que sea clásico (el último, por ejemplo, en nuestro caso). Pero esto no es así necesariamente. Si el cuantificador es en cambio "aproximadamente 0,3", ahí ya no habrá ningún conjunto clásico cuya cantidad de elementos sea un caso indeterminado, puesto que sus cardinalidades son siempre números naturales. A pesar de esto, el cuantificador es presumiblemente vago.

Voy a llamar a esto *problema de la mimetización de la vaguedad lógica*, en tanto lo que sucede es que el operador es difuso y da valores indeterminados, pero en tanto es normal, parecería que la vaguedad de la oración proviene del vocabulario no lógico involucrado. Este problema no es de ningún modo irresoluble. Podríamos, por ejemplo, diferenciar ambas fuentes de indeterminación asignando a cada oración un par de valores, en lugar de uno solo. No vamos a explorar esta alternativa en este trabajo, puesto que aún hay mucho que decir en el modelo presente, incluso con sus limitaciones. Un desarrollo de una semántica de este tipo quedará pendiente para un trabajo futuro.

(ii) Sorites

Respecto de Sorites, la forma de la paradoja resulta muy semejante a la de los cuantificadores. Hay sólo quizás una salvedad que debemos aclarar, que es cuantitativa pero significativa. El rango de aplicación de un predicado está en general conformado por una gran cantidad de objetos, lo cual hace que la pendiente resbaladiza sea "suave". Por el contrario, las conectivas usuales en general tienen aridad baja, con lo cual la secuencia sorítica no estará constituida de demasiados pasos.

Esto no significa que no podamos construir secuencias soríticas con conectivas, sino que en muchos casos el principio de inducción no tendrá tanto peso. Sorites más y menos atractivos también pueden construirse con predicados: la secuencia para "ser un montón de arena" es más difícil de detener que la secuencia para el ya mencionado "ser una religión".

Dicho, esto, una primera versión de la paradoja para una conectiva n-aria –para $n \geq 10$- , empleando un principio de Tolerancia condicional, podría ser la siguiente:

$$\frac{\begin{array}{l} count_{\Sigma}(\tau_{V}(\Psi))=10 \rightarrow \odot\Psi \\ \forall n(count_{\Sigma}(\tau_{V}(\Psi))=n \rightarrow \odot\Psi) \rightarrow (count_{\Sigma}(\tau_{v}(\Psi))=n\text{-}1 \rightarrow \odot\Psi) \end{array}}{count_{\Sigma}(\tau_{V}(\Psi))=0 \rightarrow \odot\Psi}$$

Sin embargo, el condicional no está jugando un papel muy relevante, lo mismo podría expresarse en un cálculo de secuentes, sin necesidad de apelar a ninguna conectiva en particular. Sea $\Psi=\{A_1,\ldots, A_n, B_1,\ldots, B_m\}$, en donde las As no necesariamente son distintas de las Bs. Supongamos que tenemos una conectiva $\odot$ tal que sus reglas permiten probar los siguientes secuentes:

$$A_1,\ldots,A_k \Rightarrow \odot\Psi \qquad\qquad \odot\Psi \Rightarrow B_1,\ldots,B_j$$

donde $\{A_1,\ldots,A_k\}$ es un conjunto minimal de fórmulas de Ψ suficientes para afirmar $\odot\Psi$, mientras que $\{B_1,\ldots,B_j\}$ es un conjunto minimal de fórmulas de Ψ cuya falsedad es suficiente para rechazarla. Por ejemplo, si $\odot$ fuera la conjunción, los secuentes podrían ser, respectivamente, $A \Rightarrow A \vee B$ y $A \vee B \Rightarrow A, B$.

Si la conectiva es vaga, además de sus reglas de introducción deberíamos agregar una regla de Tolerancia que indique que un argumento verdadero menos no puede alterar el valor de verdad de $\odot\Psi$:

$$\frac{A_1,\ldots,A_k \Rightarrow \odot\Psi}{A_1,\ldots,A_{k-1} \Rightarrow \odot\Psi}\ (\text{TolI}) \qquad \frac{\odot\Psi \Rightarrow A_1,\ldots,A_k}{\odot\Psi \Rightarrow A_1,\ldots,A_{k-1}}\ (\text{TolD})$$

Esta situación genera una versión distinta de la paradoja de Sorites, que no involucra otras conectivas además de $\odot$:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_1,\ldots,A_k \Rightarrow \odot\Psi}{A_1,\ldots,A_{k-1} \Rightarrow \odot\Psi}}{\ldots}}{A_i \Rightarrow \odot\Psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\odot\Psi \Rightarrow B_1,\ldots, B_k}{\odot\Psi \Rightarrow B_1,\ldots,B_{k-1}}}{\ldots}}{\odot\Psi \Rightarrow B_i}}{A_i \Rightarrow B_i}$$

(TolD) (TolI)

(Tolerancia)

(Corte)

en donde $A_i \neq B_i$. Los tres puntos indican sucesivas aplicaciones de Tolerancia, en las cuales van cayendo las *A*s, hasta que queda solo una de cada lado. Esto es necesario porque entre las *A*s de la rama de la izquierda y las de la derecha podría haber elementos en común, con lo cual el secuente que probamos podría ser una instancia de identidad.

Si bien es menos parecida a las presentaciones habituales, esta versión cuenta con una ventaja, que es que no es necesario apelar ni a un functor de cardinalidad, ni a un condicional material. De este modo, se explicita que el "problema" es exclusivo del funcionamiento de la conectiva en este contexto, y que modificar la interpretación de otros símbolos lógicos va a ser siempre una idea desencaminada.

5 Conclusión

Defendimos, en primer lugar, que los operadores proposicionales pueden ser vagos, del mismo modo en que los cuantificadores pueden serlo, entendidos como propiedades cuantitativas de segundo nivel –en este caso, aplicadas a conjuntos de oraciones y no de objetos.

Sin embargo, que puedan ser vistos como predicados no significa que *de hecho* estén funcionando como tales. En tanto conectivas, su vaguedad se manifiesta de un modo particular, que caracterizamos como la propiedad de Anormalidad. Esta propiedad es suficiente para que podamos decir que una conectiva es vaga, pero por lo que dijimos en la sección anterior, quizás por un defecto de la semántica, podría no ser necesaria.

Toda la discusión de esta primera parte ha pretendido entonces establecer la inteligibilidad del concepto de vaguedad aplicado a conectivas. Sin embargo, hay dos cuestiones que esto deja abiertas. Por un lado, no he considerado hasta ahora ningún ejemplo real de operadores de este tipo. Por el otro, lo único que dije acerca de qué lógica sería más adecuada para lidiar con ellas ha sido (i) que no podría ser clásica y (ii) que no es necesario que sea difusa.

En la segunda parte veremos que una respuesta a la primera cuestión restringe notablemente las posibles respuestas a la segunda. En particular porque, como vimos en la sección anterior, la paradoja puede formularse sin apelar a conectivas más allá de la conectiva vaga en cuestión.

PARTE II

Tonk

- Capítulo 5 -

Tonk

1 Introducción

Hasta el presente capítulo no hemos de hecho mostrado la existencia de conectivas vagas más que como un experimento teórico. Sin embargo, la asociación de la anormalidad con la vaguedad no es una tesis formal, sino conceptual. Esto quiere decir que si no nos permite dar cuenta de fenómenos en alguna medida reales, la empresa pierde su sentido. Un objetivo de máxima, en tanto estoy entendiendo que el propósito de la lógica es la modelización de *usos* existentes en el lenguaje natural, sería encontrar correlatos naturales de estos operadores. Esto no será lo que haré en esta segunda parte, sino que voy a perseguir el objetivo más modesto de mostrar que hay al menos *menciones* de conectivas vagas. Esto es, quiero argumentar que de hecho la teorización acerca de conectivas vagas forma parte del discurso filosófico, aunque no en estos términos, y que entenderlas como tales debería cambiar nuestra perspectiva sobre ellas.

En este capítulo presentaré la discusión sobre Tonk, y luego argumentaré que se trata de un ejemplo "real" de conectiva vaga. En la sección 2 comenzaremos por contextualizar la discusión en relación al debate acerca del inferencialismo lógico. En la sección 3 voy a presentar a Tonk, y explicar por qué fue originalmente concebida como una *reductio* de la posición inferencialista. Por último, en la sección 4 revisaremos brevemente la solución tradicional, basada en el requisito de armonía entre reglas de introducción y eliminación de las conectivas.

2 Inferencialismo

El inferencialismo es una teoría del significado, cuyo punto de partida es que se trata de un fenómeno externo y práctico, en oposición a la tesis representacionalista, según la cual el lenguaje adquiere su contenido a través de una relación especial de referencia entre los elementos del vocabulario y conceptos dentro de nuestras mentes.

El término fue acuñado por Brandom (1994), quien encuentra tendencias inferencialistas ya en filósofos modernos ingleses post-cartesianos, e identifica como referentes directos contemporáneos a Wittgenstein, Frege y Sellars. El aporte wittgensteiniano proviene de *Investigaciones filosóficas* (1953), en donde –en algún sentido- se retracta de la posición representacionalista del *Tractatus* (1921), y ofrece el modelo de significado construido sobre el concepto de juegos de lenguaje. En Sellars (1953) –y quizás Frege[6]- (1879) es ya no sólo la dimensión pragmática, sino la inferencia en particular, la que aparece confiriendo significado.

Pensar al significado como determinado exclusivamente por el uso permite salvar muchos de los escollos que se presentan a las teorías tradicionales. En primer lugar, es complicado explicar la eficacia y normatividad del lenguaje cuando se parte del individuo y luego se pretende llegar a la comunidad a partir de la mera agregación de sujetos -cuyos estados mentales son privados y se encuentran aislados unos de los otros. En cambio, si el significado es algo de acceso público, este problema se desarticula.

En segundo lugar, es preciso dar cuenta de qué diferencia hay entre un hablante por un lado y un termostato o un loro por el otro, a la hora de informar sobre los propios estados perceptuales. Según Sellars (1953), apelar a estados conscientes no resulta iluminador, como sí lo es el hecho de que los primeros y no los segundos tienen la facultad de establecer vínculos inferenciales entre los informes empíricos que reportan (por ejemplo, de concluir a partir de que algo es rojo, que no es azul).

Por último, el inferencialismo responde a una inclinación anti-realista, que desconfía de la posibilidad de resolver problemas filosóficos mediante la mera postulación de entidades abstractas que cumplan el rol deseado. En este sentido, evitaría la sobrepoblación ontológica innecesaria de sus rivales representacionalistas. En el caso de Dummett (1975b), por ejemplo, el anti-realismo inferencialista tiene como consecuencia la adopción de la lógica intuicionista. La razón de esto es que la verdad de un enunciado matemático no depende de entidades platónicas, sino de la posibilidad de ofrecer una prueba constructiva de él, y una prueba constructiva de una disyunción deberá ser una prueba constructiva de alguno de sus disyuntos. Sin embargo, hay instancias de $A \vee \neg A$ para las cuáles no tendremos una prueba de ninguna de las dos.

---

[6] El caso de Frege es el más complejo, puesto que las nociones de verdad y referencia juegan un rol crucial. Para una discusión sobre si la posición de Frege es o no representacionalista, ver Brandom (2000)

Existen muchas variedades de inferencialismo. En general, el contenido de la mayoría de las expresiones proviene, de inferencias materiales, y los argumentos formalmente válidos constituyen sólo un caso particular de inferencias, que concierne al significado de un pequeño fragmento del vocabulario. Aquí nos ocuparemos sólo de la versión restringida de la tesis, que es el inferencialismo de teoría de la prueba.

En su tesis doctoral de (1934), Gentzen introduce dos innovaciones que revolucionarían el modo de pensar y producir demostraciones: el cálculo de deducción natural y el de secuentes. Una de las ideas a la base de esto es justamente la caracterización del significado en términos meramente inferenciales: cada conectiva recibe una regla de introducción y una de eliminación, donde la primera funciona como definición de la operación, y la segunda permite extraer las consecuencias de esa definición.

A diferencia de los sistemas axiomáticos previamente existentes, un sistema de deducción natural posee dos características que dan pie a la posibilidad de basar en él una teoría del significado. En primer lugar, la deducción natural viene a emular el modo en que efectivamente razonamos en nuestras derivaciones –en particular, habilita el razonamiento hipotético, por medio de la introducción de supuestos.

Es por ese carácter intuitivo que, desde el punto de vista epistémico, las pruebas en deducción natural son más fáciles de producir y, al mismo tiempo, ilustran de modo más aprehensible el vínculo entre premisas y conclusión. Dado que en última instancia lo que pretendemos es dar cuenta del significado en el lenguaje que de hecho usamos, cualquier modelo formal debe estar conectado con la práctica real para que el inferencialista pueda conferirle poder explicativo. La deducción natural pretende justamente tender ese puente (en Steinberger (2011) esto se llama *principio de fidelidad* [*answerability*]).

En segundo lugar, en un sistema axiomático necesariamente habrá principios que involucren a más de un símbolo, con lo cual parece imposible lograr una segmentación atómica del significado de cada uno de ellos. El hecho de que en un sistema de deducción natural cada conectiva pueda ser caracterizada mediante reglas puras abre el camino a la posibilidad de un inferencialismo que no esté comprometido con el holismo.

En la próxima sección veremos de qué modo Prior pone en jaque este paraíso inferencialista, en tan sólo dos páginas.

3 Un pasaje en la lanchita inferencial

El problema de Tonk no es generalmente considerado como parte de la familia de las paradojas, aunque tiene muchos elementos en común con ellas. La idea propuesta por Prior (1960) es mostrar cómo la tesis inferencialista que mencionábamos en la introducción nos obliga a aceptar la significatividad de esta conectiva, presentada aquí mediante reglas de deducción natural:

$A \vdash A \otimes B$ (⊗In) $A \otimes B \vdash B$ (⊗Elim)

Pero es difícil aceptar la significatividad de Tonk, puesto que nos permite inferir cualquier cosa a partir de cualquier otra:

i. A

ii. $A \otimes B$ (⊗In)

iii. B (⊗Elim)

Es por ello que el inferencialismo se ve forzado a abandonar el permisivismo absoluto, y a imponer alguna restricción adicional a las reglas aceptables.

Belnap (1962) es el primero en notar que introducir a Tonk dentro de un sistema de deducción natural nos hace perder de vista el rol que juegan los principios estructurales a la hora de definir el significado del vocabulario lógico. Consideremos entonces a la versión de las reglas para ⊗ pero para un cálculo de secuentes:

$$\frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \otimes B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (\otimes \mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \otimes B, \Delta} \ (\otimes \mathrm{D})$$

Y formulamos con ellas la derivación del secuente trivial $A \Rightarrow B$:

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A \otimes B} \quad \dfrac{B \Rightarrow B}{A \otimes B \Rightarrow B}}{A \Rightarrow B}$$

(Id)

(⊗I), (⊗D)

(Corte)

Puesto de esta manera, vemos explícitamente que no sólo son las reglas de Tonk, sino también los principios estructurales de identidad y transitividad que están siendo utilizados en la prueba.

3.1 Conservatividad

Una vez que entendemos las cosas de esta manera, el requisito de mínima de significatividad puede formularse del siguiente modo:

Definición (*Condición de Conservatividad*) Una conectiva ⊙ es significativa en un contexto de deducibilidad S si y sólo si el sistema S* que resulta de agregar las reglas de ⊙ a S es conservativo sobre S –es decir, si no prueba ningún nuevo secuente en el lenguaje de S.

La clave de la conservatividad es que establece una cota superior: su propósito es dictar que el significado no esté sobredeterminado, en el sentido de que el nuevo vocabulario no debería intervenir con el sentido previamente establecido de lo que es una deducción. De acuerdo con esto y lo que dijimos más arriba sobre el contexto de deducibilidad involucrado en la prueba de $A \Rightarrow B$, Tonk no puede ser significativa en ningún contexto transitivo. Respecto de la identidad, no está en realidad jugando un papel esencial, sino que sólo cumple la función de darle algún punto de partida a la prueba. Es decir, lo crucial es que el sistema no sea vacío.

Hay dos maneras de especificar el requisito de conservatividad, dependiendo de cuál sea el sistema de base:

Definición (*Conservatividad 1*) Un símbolo ⊙ definido en el sistema *puro* BC por el agregado del conjunto de reglas R es significativo sólo si BC+R es una extensión conservativa de BC.

Definición (*Conservatividad 2*) Un símbolo ⊙ definido en el sistema *lógico* S por el agregado del conjunto del conjunto de reglas R es significativo sólo si S+R es una extensión conservativa de S.

Para cualquiera de las dos definiciones, si el sistema de base no es trivial, la conservatividad ofrece además un corolario de consistencia relativa. En el caso de Belnap, como lo que él está proponiendo es en particular la adopción de (Conservatividad 1), este corolario es de hecho el aspecto fundamental de la condición. La razón es que -en tanto esquemas-, los secuentes que prueba BC carecen de conectivas "visibles". Por ejemplo, si el sistema es un cálculo estructural completo, los secuentes que sí pruebe serán todos los que compartan fórmulas a la izquierda y a la derecha, y los que no pruebe serán los que no. Es decir, que –nuevamente, en términos esquemáticos- básicamente si un sistema no es conservativo sobre un cálculo puro, es porque prueba $A \Rightarrow B$.

(Conservatividad 2), por otro lado, sí excede el mero corolario de no trivialidad, y de adoptarla deberíamos rechazar expresiones que habitualmente empleamos. Para el caso de la negación, si lo que tenemos previamente es un lenguaje proposicional intuicionista, la adición de una negación clásica permite probar por ejemplo la ley de Peirce $((A\to B)\to A)\to A$.

Para el caso de la verdad, si contamos con un lenguaje de primer orden clásico con identidad, podemos probar la existencia de dos objetos distintos, valiéndonos sólo de dos instancias del esquema T, y sin necesidad de asumir que los nombres refieren a códigos de oraciones, ni mucho menos la aritmética. De hecho, ni siquiera se precisan los axiomas de la identidad, dado que incluso sin ellos sería cierto que todos los modelos de la teoría tienen al menos dos elementos, uno que está dentro de la extensión de *Tr* y uno que no. Es por estos motivos que, de adoptarse esta conservatividad fuerte, no se lo hace como condición de la significatividad *tout court*, sino quizás como condición de logicidad.

3.2 Unicidad

El segundo requisito que propone Belnap es la cota inferior de la significatividad:

Definición (*Condición de Unicidad*) Un símbolo n-ario $\odot$ definido en el sistema de lógica S por el agregado del conjunto de reglas R es significativo sólo si está definido de modo único, es decir, sólo si para cualquier otro símbolo $\odot^*$ cuyas reglas son iguales a R, pero con las ocurrencias de $\odot$ reemplazadas por ocurrencias de $\odot^*$, es cierto que:

- $\Gamma, A \vdash \Delta$ si y solo si $\Gamma, A[\odot^*/\odot]\vdash \Delta$
- $\Gamma \vdash A, \Delta$ si y solo si $\Gamma \vdash A[\odot^*/\odot], \Delta$

donde $A[\odot^*/\odot]$ es el resultado de posiblemente reemplazar en A alguna ocurrencia de $\odot$ por $\odot^*$.

Las reglas de Tonk, tal como fueron presentadas originalmente, no sólo fallan el primero de los requisitos de Belnap, sino también el segundo: suponiendo que tengamos otra conectiva $\otimes^*$ que obedezca las mismas reglas que Tonk, podremos (trivialmente) probar $A\otimes B\Rightarrow A\otimes B$ y $A\otimes^* B\Rightarrow A\otimes^* B$, pero no podremos probar $A\otimes B \Rightarrow A\otimes^* B$ ni $A\otimes^* B \Rightarrow A\otimes B$.

(⊗I) y (⊗D) imitan, respectivamente, una de las reglas para la conjunción y una para la disyunción. Sin embargo, aunque ⊗ tiene un sabor "conjuntivo-disyuntivo", no es exactamente una combinación entre ambas cosas; en particular, ⊗ no es conmutativo, en el sentido de que $A \otimes B$ y $B \otimes A$ no son siempre intersustituibles - aunque sí son de hecho interderivables.

Pero nada relevante para el problema de Tonk depende de esta no-conmutatividad. Si bien no se necesita más que media conjunción a la izquierda y media disyunción a la derecha para probar la trivialidad, también podemos pensar en la conectiva que surge de tener ambas reglas completas. En lugar de agregar dos reglas más, vamos a considerar las versiones más compactas, que se conocen como "reglas multiplicativas" (diremos más sobre esto en los siguientes capítulos). Llamaremos a la conectiva que queda definida de ese modo *Funk*:

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \oplus B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\oplus\mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B, \Delta}\ (\oplus\mathrm{D})$$

Funk, a diferencia de Tonk, sí está únicamente definida. En la próxima sección mostraremos brevemente cuál es la salida inferencialista tradicional al problema planteado por conectivas como esta.

4 Armonía

La respuesta usual a Tonk y sus parientes consiste en modalizar de algún modo la afirmación de que *cualquier* conjunto de reglas establece el significado de un símbolo, y el desafío es encontrar buenas condiciones, que sean además aceptables desde un punto de vista inferencialista (lo cual excluye, por ejemplo, nociones modelo-teóricas).

El origen del concepto de *Armonía* puede rastrearse a Gentzen (1934), aunque el nombre proviene de Dummett (1973), quien identifica dos condiciones de uso de una oración: las condiciones en las cuales es posible afirmarla, y las condiciones en las cuales pueden afirmarse cosas a partir de ella. El primer aspecto del significado se funda en la posición verificacionista de Dummett, mientras que el segundo aporta el componente pragmatista. La idea de la armonía consiste en la existencia de cierto tipo de consonancia entre ambos principios.

Un modo posible de entender esa consonancia es el *principio de inversión* de Prawitz (1965), que establece que se debe poder derivar de una fórmula compleja sólo aquello que se pueda derivar de sus bases. Cuando dos reglas respetan el principio de inversión, son armónicas, y si son armónicas, son conservativas en el sentido de Belnap.

Existen diversos modos de articular la idea de Prawitz, pero aquí presentaremos sólo uno de ellos, conocido como *armonía de eliminación generalizada*. La idea es, en primer lugar, que las reglas de introducción de una conectiva deben obtenerse a partir de las de eliminación, mediante la siguiente transformación (ilustrado sólo para el caso de conectivas con una sola regla de introducción):

$$\dfrac{A_1, \ldots A_k}{\odot(B_1 \ldots B_n)}\ (\odot\mathrm{I}) \qquad \twoheadrightarrow \qquad \dfrac{\odot(B_1 \ldots B_n) \quad \begin{array}{c}[A_1]\\ \Pi_m\\ C\end{array} \ \ldots \ \begin{array}{c}[A_k]\\ \Pi_r\\ C\end{array}}{C}\ (\odot\mathrm{GE})$$

Aquí los corchetes indican que la fórmula se encuentra supuesta, las rayas horizontales indican la aplicación de una regla y las Π indican una rama de una derivación. Una conectiva caracterizada por reglas de este tipo permite la reducción de los *detours*, es decir –las subderivaciones en las cuales se introduce una conectiva para luego eliminarla - lo cual se realiza del modo que indicaremos a continuación. En primer lugar, partimos de una derivación defectuosa:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \ldots \Pi_k\\ A_1 \ldots A_k\end{array}}{\odot(B_1 \ldots B_n)} \qquad \begin{array}{c}[A_1]\\ \Pi_m\\ C\end{array} \ \ldots \ \begin{array}{c}[A_k]\\ \Pi_r\\ C\end{array}}{C}$$

En este esquema observamos una prueba de la fórmula C que requiere usar la introducción de $\odot$ -en la rama de la izquierda- y luego su eliminación –para el paso final. Recordemos que esto es exactamente lo que lleva a trivialidad en el caso de Tonk: el hecho de poder extraer de la fórmula compleja más información de la que podíamos obtener de las premisas necesarias para afirmarla. En este ejemplo, dado que las reglas son armónicas -a diferencia de las de Tonk- podemos reducir el *detour*, esto es, generar una prueba sin él:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A_1\\ \Pi_m\end{array}}{C}$$

En este caso hay más de una reducción posible, aunque alcanza con que toda fórmula que tiene una prueba pueda tener al menos una prueba normal, esto es, carente de *detours*.

Los procesos de reducción generan solamente una normalización *local*, dado que, en este caso, Π_1 y Π_m podrían a su vez no ser normales. Lo único que logramos es, dado un nudo de este tipo, una receta para desatarlo, lo cual sólo garantiza que todo nudo pueda desatarse si la lógica es estructural. Este escollo no es imposible de salvar, y el lector interesado puede encontrar una salida posible en el desarrollo de definiciones de armonía para lógicas subestructurales que hace Hjortland (2014).

Sin embargo, las mismas lógicas subestructurales abren otra posible salida a la cuestión de Tonk, que permite olvidarse del problema casi por completo, y adoptar una actitud más permisivista respecto del significado.

5 Conclusión

Si bien Tonk ha sido originalmente propuesta como el ejemplo paradigmático de una conectiva inaceptable, la posición contextualista de Belnap nos indica que es efectivamente posible incorporarla a ciertos sistemas lógicos, a cambio de renunciar a principios estructurales. Durante mucho tiempo, una respuesta de este tipo quedó inexplorada, a causa de lo radical que parecía ser una revisión de las propiedades fundamentales de la relación de consecuencia. Sin embargo, desarrollos relativamente recientes, fundamentalmente vinculados al tratamiento de paradojas semánticas, han posicionado a los sistemas de este tipo como una alternativa entre otras.

Vamos a dedicar los próximos dos capítulos a presentar primero las lógicas subestructurales en general, y en segundo lugar la lógica no-transitiva en particular. Una vez armadas con estas herramientas técnicas, regresaremos al problema de Tonk, para el cual ofreceré una solución en el capítulo 8.

A modo de adelanto, vale la pena quizás notar que si bien he descartado en el capítulo 2 la propuesta de entender a la vaguedad como conflación, la conectiva en favor de cuya vaguedad voy a argumentar es la misma que ofrecía Ripley como ejemplo de conectiva conflacionada. Sin embargo, mis razones para considerarla tal no serán de orden pragmático sino semántico, en función de una interpretación anormal.

- Capítulo 6 -

Lógica Subestructural y Paradojas

1 Introducción

Cuando, Gentzen introduce el cálculo de secuentes -como veíamos en el capítulo anterior- lo hace meramente como un instrumento técnico, en contraposición a la riqueza formal y filosófica con que se presenta a la deducción natural. Su motivación principal se origina en la publicación que pocos años antes –en (1930)- hace Gödel de sus resultados de incompletitud de la aritmética. En particular, el segundo teorema de Gödel establece la imposibilidad de probar, usando recursos aritméticos, la consistencia de la propia teoría. El objetivo de encontrar esa prueba de consistencia es lo que conduce a Gentzen a demostrar su *Haupsatz.* Lo que este resultado establece es que la regla de Corte es eliminable –razón por la cual hoy se conoce como *Teorema de Eliminación de Corte* para la lógica clásica:

Definición (*Regla Eliminable*) Una regla es eliminable si y sólo si todo secuente con prueba tiene una demostración que prescinde de ella.

La regla de Corte –suponiendo que las operacionales sean sólo reglas de introducción, como es usual, y como es SCL y los otros sistemas que presentábamos en la introducción- es la única que permite que haya fórmulas que "desaparezcan" a lo largo de una derivación. Por ende, si ella es eliminable en un sistema, se sigue que este posee la propiedad de subformula:

Definición (*Propiedad de subformula*) Un sistema S posee la propiedad de subfórmula si y sólo si todas las fórmulas que aparecen en una derivación son subfórmulas de alguna fórmula del secuente-conclusión.

Asimismo, de la propiedad de subformula se sigue que el sistema es consistente, entendido esto como que no puede probarse en él el secuente vacío $\Rightarrow$ (es decir, que todo se sigue de todo).

Más allá de las intenciones originales de Gentzen vinculadas a la aritmética, la creación del cálculo de secuentes abrió un campo novedoso, no sólo en términos de teoría de la prueba, sino también para el área de las lógicas no-clásicas. La explicitación de las reglas estructurales hace evidente la posibilidad de abandonarlas, dando lugar a la familia de las lógicas subestructurales.

En (1944), poco tiempo después de que Gentzen diera a conocer su cálculo de secuentes, Oiva Ketonen propone reemplazar las reglas de la conjunción a la izquierda y disyunción a la derecha por las siguientes versiones únicas:

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (\wedge \mathrm{I} \times) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} \ (\vee \mathrm{D} \times)$$

Es sencillo probar que estas reglas multiplicativas que mencionábamos en el capítulo son equivalentes a las propuestas por Gentzen. Sin embargo, para probar su equivalencia, es preciso utilizar las reglas de Contracción y Monotonía. Este descubrimiento da el puntapié a la exploración de los resultados de abandonar principios estructurales, con distintas motivaciones.

Respecto de Contracción, para que las reglas sean siquiera formulables, es indispensable, desde el punto de vista técnico, que los secuentes no sean entendidos meramente como conjuntos, sino como multiconjuntos o secuencias, dado que en un conjunto no tiene sentido la idea de que un elemento aparece “dos veces”. Y desde el punto de vista conceptual, esto quiere decir que las fórmulas no pueden entenderse como expresando proposiciones, sino, por ejemplo, tipos de información, donde cada ocurrencia de una fórmula es a su vez un recurso informacional concreto.

Por otro lado, algunas de las motivaciones del abandono de Monotonía tienen que ver con pruritos relevantistas: no sólo debe haber un vínculo formal entre premisas y conclusión, sino que también debe haber una ligazón entre los contenidos. Entendiendo la consecuencia lógica de esta manera, aunque valga $\Gamma \Rightarrow \Delta$, podría no valer $\Gamma, A \Rightarrow \Delta$ porque el contenido de A podría no tener nada que ver con el de Δ. En este sentido, todas las premisas deben ser usadas para la obtención de la conclusión.

Por ejemplo, si rechazamos (MonI) podemos eludir las paradojas del condicional, como la paradoja positiva (en la prueba de la izquierda); por otro lado, rechazar (MonD) nos permite rechazar el principio (EFSQ), que puede ser considerado problemático por los mismos fundamentos de relevancia, o por ejemplo también por motivos dialeteístas (en la prueba de la derecha):.

$\underline{A \Rightarrow A}$		$\underline{A \Rightarrow A}$	
$\underline{A, B \Rightarrow A}$	(MonI)	$\underline{\neg A, A \Rightarrow}$	($\neg$I)
$\underline{A \Rightarrow A \rightarrow B}$	($\rightarrow$D)	$\underline{\neg A, A \Rightarrow B}$	(MonD)
$\Rightarrow A \rightarrow (A \rightarrow B)$	($\rightarrow$D)	$\underline{A \Rightarrow \neg A \rightarrow B}$	($\rightarrow$D)
		$\Rightarrow A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$	($\rightarrow$D)

Del abandono de Corte e Identidad nos ocuparemos en extensión en el siguiente capítulo. En el presente, veremos cómo puede ayudar deshacerse de Contracción o Monotonía para solucionar paradojas. En la siguiente sección presentaremos de modo más o menos breve un panorama general del tratamiento que estos sistemas dan a las paradojas más tradicionales. En la sección 3 presentaremos en cambio la paradoja de la validez, que –en caso de ser una paradoja genuina- representa un argumento mucho más concluyente a favor de los enfoques subestructurales, ya que no se trata meramente de una solución mejor o más uniforme, sino de la única posible.

2 Paradojas operacionales

2.1 Paradojas semánticas

El *Principio de Solución Uniforme* es la idea de que diversas manifestaciones de un mismo fenómeno problemático, deberían recibir igual respuesta. Una objeción usualmente dirigida contra algunas teorías paraconsistentes consiste en su tratamiento divergente de la Paradoja del Mentiroso y la Paradoja de Curry:

(κ) Si κ es verdadera, todo es verdadero.

Una derivación formal de la trivialidad en un cálculo de secuentes es por ejemplo la siguiente:

$\underline{T\ulcorner\kappa\urcorner \Rightarrow T\ulcorner\kappa\urcorner \quad \bot \Rightarrow \bot}$			
$\underline{T\ulcorner\kappa\urcorner \rightarrow \bot,\ T\ulcorner\kappa\urcorner \Rightarrow \bot}$	($\rightarrow$I)		
$\underline{\kappa,\ T\ulcorner\kappa\urcorner \Rightarrow \bot}$	(κ)		
$\underline{T\ulcorner\kappa\urcorner,\ T\ulcorner\kappa\urcorner \Rightarrow \bot}$	(TI)	$\underline{T\ulcorner\kappa\urcorner \Rightarrow T\ulcorner\kappa\urcorner \quad \bot \Rightarrow \bot}$	
$\underline{T\ulcorner\kappa\urcorner \Rightarrow \bot}$	(ContrI)	$\underline{T\ulcorner\kappa\urcorner \rightarrow \bot,\ T\ulcorner\kappa\urcorner \Rightarrow \bot}$	($\rightarrow$I)
$\underline{\Rightarrow T\ulcorner\kappa\urcorner \rightarrow \bot}$	($\rightarrow$D)	$\underline{\kappa,\ T\ulcorner\kappa\urcorner \Rightarrow \bot}$	(κ)

$\Rightarrow\kappa$	(κ)	$T\ulcorner\kappa\urcorner, T\ulcorner\kappa\urcorner\Rightarrow\bot$	(TI)
$\Rightarrow T\ulcorner\kappa\urcorner$	(TD)	$T\ulcorner\kappa\urcorner\Rightarrow\bot$	(ContrI)
$\Rightarrow$	(Corte)		
$\Gamma\Rightarrow\Delta$	(Mon)		

En primer lugar, si el condicional involucrado es el condicional material de **LP**, κ y λ son efectivamente variantes notacionales de la misma antinomia: la negación de **LP** puede definirse como $A\rightarrow\bot$. Para ese condicional, la solución a la paradoja de Curry es simplemente asignarle el valor ½.

Sin embargo, las teorías paraconsistentes –como por ejemplo Priest (2017)- suelen contar con otro condicional que obedezca Modus Ponens. La reacción a esta versión de la paradoja tiene que ver en general con abandonar contracción, lo cual hace que Curry y el mentiroso pasen a tener soluciones divergentes. A esto, Priest (2010) responde que de hecho Curry es, a pesar de las apariencias, un fenómeno *sui generis*. La razón es que el mentiroso –al igual que la mayoría de las paradojas de autoreferencia, como la de Russell- son instancias de un esquema general, llamado *Inclosure*. El *inclosure* es una relación entre dos predicados T y D, y una función f, que se caracteriza mediante los siguientes tres principios:

1. Hay un conjunto Ω tal que $\Omega=\{a: Ta\}$ y $D\Omega$ (Existencia)
2. Si $\Gamma\subseteq\Omega$ y $D\Omega$
   a. $f(\Gamma)\notin\Gamma$ (Trascendencia)
   b. $f(\Gamma)\in\Omega$ (Clausura)

La instancia del esquema que corresponde a la paradoja del mentiroso es aquella en la cual T es el predicado de verdad y D el de definibilidad. De este modo, f resulta ser una función que toma conjuntos definibles de oraciones verdaderas y ofrece como resultado una oración verdadera que no pertenece a él. El caso paradójico es el "límite", la oración $f(\Omega)$, que es una oración verdadera que no es verdadera.

La oración de Curry en sentido esquemático no encajaría en este esquema, dado que lo que se deriva de ella no necesariamente es una contradicción, el consecuente podría ser cualquier cosa –incluso una oración verdadera.

Sin embargo, no todos los autores abonan a la teoría particular del *inclosure*, y a que Curry no sea de hecho un caso del esquema –ver por ejemplo Beall (2014) como un ejemplo de un defensor de la paraconsistencia que se opone a ello. Y el hecho de que ambas paradojas involucran (a) al predicado de verdad y (b) a una oración autoreferencial, parece ser evidencia no despreciable de que se trata de un mismo fenómeno.

Un tratamiento homogéneo de ambas oraciones es, por ende, una ventaja importante para cualquier teoría de la verdad. Todas las teorías subestructurales pueden evitar este problema, puesto que no localizan el error en el condicional o la negación, y puesto que las derivaciones de todas las paradojas requieren de todos los principios estructurales, como vemos por ejemplo en la siguiente derivación de trivialidad a partir de λ:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Tr\ulcorner\lambda\urcorner \Rightarrow Tr\ulcorner\lambda\urcorner}{\Rightarrow Tr\ulcorner\lambda\urcorner,\ \neg Tr\ulcorner\lambda\urcorner}\,(\neg I)}{\Rightarrow\lambda,\ \neg Tr\ulcorner\lambda\urcorner}\,(T)}{\Rightarrow\lambda,\ \lambda}\,(\lambda)}{\Rightarrow\lambda}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Tr\ulcorner\lambda\urcorner \Rightarrow Tr\ulcorner\lambda\urcorner}{Tr\ulcorner\lambda\urcorner,\ \neg Tr\ulcorner\lambda\urcorner \Rightarrow}\,(\neg D)}{\lambda,\ \neg Tr\ulcorner\lambda\urcorner \Rightarrow}\,(T)}{\lambda,\ \lambda\Rightarrow}\,(\lambda)}{\lambda\Rightarrow}\,(\mathrm{Contrl})}{\Rightarrow}\,(\mathrm{Corte})}{\Gamma\Rightarrow\Delta}\,(\mathrm{Mon})
$$

Evitar monotonía permite que la teoría pueda no ser trivial, a pesar de derivar el secuente vacío. No existe hasta el momento otra teoría que solucione paradojas semánticas valiéndose de este recurso, con excepción del proyecto que actualmente está desarrollando Bruno Da Ré.

Teorías de la verdad no contractivas, por su parte, son mucho más abundantes. En Zardini (2011) se desarrolla la teoría **IKω**, que consiste en un cálculo que tiene tanto sus reglas estructurales como operacionales en versión multiplicativa. En Mares & Paoli (2013), por el contrario, se sostiene que el problema de la lógica clásica radica en una falacia de equivocación entre las conectivas aditivas y multiplicativas, y por ende el sistema que se prefiere es la lógica lineal, que contiene los dos tipos de operaciones, y que abandona no sólo Contracción sino también Monotonía. En Beall y Murzi (2013) podemos encontrar una defensa de una solución no contractiva como respuesta unificada tanto para los Currys tradicionales como para los de validez.

2.2 Sorites

La identidad estructural entre las paradojas semánticas y las de vaguedad, es una tesis más controvertida que la uniformidad entre Curry y el Mentiroso, aunque no carece de defensores. Priest (2010) considera que de hecho Sorites sí es una paradoja de *inclosure*. El predicado *T* en este caso sería el predicado vago en cuestión (y *D* es una condición vacua). La función *f* toma conjuntos Γ de cosas que son T, y nos ofrece la primera cosa del dominio que no esté en Γ. La "contradicción en el límite" surgiría cuando Γ es el conjunto de todas las cosas determinadamente rojas. En ese caso, $f(\Gamma)$ no debería ser rojo ($f(\Gamma)\notin\Omega$), pero por Tolerancia, debería serlo ($f(\Gamma)\in\Omega$).

El argumento no deja de generar extrañeza. Después de todo, como nota Beall (2014), así como no toda instancia de Curry deriva una contradicción, no toda instancia de Sorites lo hace. No obstante, hay una diferencia crucial. Incluso cuando la oración derivada sea verdadera, como por ejemplo "Beyoncé nació en Houston, Texas", podemos ver que hay algo mal en probarla a partir de "Si esta oración es verdadera, Beyoncé nació en Houston, Texas". Por el contrario, en el caso de Sorites, todas las oraciones verdaderas que probamos parecen estar razonablemente establecidas a partir de Tolerancia. El problema no es que estemos usando un mal recurso, sino que nos estamos extralimitando. En cualquier caso, incluso si se trata de fenómenos disímiles, la solución uniforme, si bien no ya un requisito, no deja de ser un resultado agradable, aunque más no sea por cuestiones de parsimonia.

Existe una sola propuesta no contractiva hasta el momento, que es la de Slaney (2010). La inspiración proviene, según él, de la solución difusa, de la cual propone conservar los aspectos positivos –i.e., el hecho de que hay grados de alejamiento de la verdad, que cuando se acumulan pueden llevar a un error grave- y abandonar aquellos problemáticos –i.e., la artificial precisión de los valores de verdad numéricos, su orden lineal, la reaparición de la paradoja en el nivel superior. La idea, intuitivamente, es que el principio de inducción no es problemático para usarlo una vez como recurso inferencial, pero para derivar la conclusión absurda precisamos apelar a él muchas veces (más veces, cuantos más objetos tenga la secuencia sorítica).

De variedades no monótonas existen ya dos propuestas, la de Hu (2015) y la de Misiuna (2010). La idea es que podemos razonar soríticamente cuanto querramos (esto es, de modo válido), siempre y cuando no aparezca información que derrote el argumento. Es decir, podemos concluir que este parche de color es amarillo, a partir de tolerancia y del hecho de que es muy semejante a este otro parche amarillo, mientras que no aparezca la información de que también es semejante a este otro parche, que es de color naranja.

3 La paradoja de la validez

Como adelantamos, hay una paradoja en particular que las teorías suboperacionales no pueden resolver, puesto que no hay conectivas involucradas. Veremos que su status es algo más complejo que el de las antinomias tradicionales, quizás en parte porque se trata de una discusión más reciente.

En primer lugar, para poder construir una teoría de la validez es necesario incorporar al lenguaje de la teoría de base algún símbolo que vaya a representar el concepto en cuestión. Las posibilidades son:

(a) Incorporar un operador $A \mapsto B$

(b) Incorporar un predicado $Val(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner)$[7]

Dado que en el segundo caso la relación de validez se predica de nombres de oraciones, necesitamos partir de una teoría con recursos suficientes para expresar verdades acerca del lenguaje, que en principio será la aritmética de Robinson (**Q**). **Q** es igual a la aritmética de Peano (**PA**), con la excepción de que carece de axioma de inducción, y es por ello finitamente axiomatizable. Ya veremos que esta característica no es en este contexto menor.

En segundo lugar, puesto que las paradojas suelen surgir por medio de oraciones circulares, si elegimos la vía de (a) debemos incorporar también un predicado veritativo que permita la autoreferencia, pues de lo contrario la teoría resultante sería consistente sólo por ser expresivamente muy pobre. Al mismo tiempo, es necesario tomar las precauciones adecuadas para evitar adscribir una paradoja a la validez, cuando en realidad es la verdad la que está generando problemas.

La siguiente decisión a tomar se refiere a los principios propios de la teoría de la validez que vamos a agregar a **Q**. Una de las fortalezas de la paradoja del mentiroso radica en que los principios que regulan el predicado *Tr* y de los cuales ella se deriva son requisitos mínimos. El Esquema-T no requiere que tomemos decisiones que conciernan a la naturaleza de la verdad. En relación a la validez, sin embargo, no hay acuerdo en la literatura respecto del concepto que se está tratando de rescatar y que puede ser sensible a paradojas.

Vamos a considerar tres posibilidades: en la sección (3.1), qué ocurre con el concepto de consecuencia lógica clásica; en la sección (3.2), qué ocurre con un concepto no-clásico de consecuencia; y en la sección

[7] Parte de la literatura sobre el tema se centra en un predicado monádico de validez lógica en lugar de uno diádico de implicación. Los resultados son esencialmente los mismos.

(3.3), qué ocurre si tratamos de incorporar un predicado que represente validez en un sentido más amplio que el puramente lógico.

3.1 Validez es validez lógica clásica

La respuesta más inmediata es que lo que se busca es un predicado $Val(\ulcorner A\urcorner,\ulcorner B\urcorner)$ o un operador $A\mapsto B$ tales que dichas fórmulas resulten verdaderas sii $A\vdash_L B$, en donde es importante notar que el subíndice del símbolo $\vdash$ indica que la derivación sólo utiliza axiomas o reglas de inferencia pertenecientes a la lógica pura de primer orden.

3.1.1 Validez como predicado

Como es usual, vamos a obtener la teoría **QV** incorporando a **Q** axiomas o reglas que funcionen para introducir y eliminar el nuevo predicado del lenguaje:

Si $A \vdash_L B$ entonces $\vdash_{QV} Val(\ulcorner A\urcorner,\ulcorner B\urcorner)$	(VP)
$A, Val(\ulcorner A\urcorner,\ulcorner B\urcorner)\vdash_{QV} B$	(VD)

Beall y Murzi (2013) y Priest (2014) sostienen que de la aceptación de estos principios surge una paradoja análoga a la paradoja de Curry. Mediante el lema de diagonalización, podemos obtener una oración μ que dice de ella misma que implica una contradicción. La prueba de $\perp$ sería entonces la siguiente (en un sistema de deducción natural, como presentada originalmente):

1.	$\mu\leftrightarrow Val(\ulcorner\mu\urcorner,\ulcorner\perp\urcorner)$	Diagonalización
2.	μ	Sup
3.	$Val(\ulcorner\mu\urcorner,\ulcorner\perp\urcorner)$	(MP) (1) y (2)
4.	$\perp$	(VD) (2) y (3)
5.	$Val(\ulcorner\mu\urcorner,\ulcorner\perp\urcorner)$	(VP) (2)-(4)
6.	μ	(MP) (1) y (5)
7.	$\perp$	(VD) (5) y (6)

El problema, sin embargo, radica en que la aplicación de (VP) es ilegítima. En primer lugar, la derivación de $\perp$ a partir de μ supone el lema de diagonalización, con lo cual no se trata de una derivación en lógica pura, sino que implica principios aritméticos.

Esta cuestión puede no obstante subsanarse, y ello es gracias al hecho de que **Q** es finitamente axiomatizable. Esto permite que el supuesto pueda, mediante un truco técnico, "ser descargado" antes de la aplicación de (VP), como muestra Cook (2014). Sea *conj*(x,y) la función que representa la conjunción[8] y Q la conjunción de todos los axiomas de **Q**. Tomamos entonces el predicado $Val((conj(x,\ulcorner Q\urcorner),\ulcorner\perp\urcorner)$ y aplicamos el lema de diagonalización. El resultado es $\mu_2\leftrightarrow Val(conj(\ulcorner\mu_2\urcorner,\ulcorner Q\urcorner),\ulcorner\perp\urcorner)$, lo cual es equivalente a

$$\vdash_{QV} \mu_2\leftrightarrow Val(\ulcorner\mu_2\wedge Q\urcorner, \ulcorner\perp\urcorner)$$

La oración μ_2 obtenida de ese modo dice que de ella y la aritmética se sigue una contradicción. Podemos ahora reformular la presunta paradoja utilizando la nueva oración de Curry μ_2:

1.	$\vdash_{QV} \mu_2\leftrightarrow Val(\ulcorner\mu_2\wedge Q\urcorner,\ulcorner\perp\urcorner)$	Diagonalización
2.	$\mu_2\wedge Q$	Sup
3.	μ_2	E$\wedge$ (2)
4.	Q	E$\wedge$ (2)
5.	$\mu_2\leftrightarrow Val(\ulcorner\mu_2\wedge Q\urcorner,\ulcorner\perp\urcorner)$	de (4) (instancia de diagonalización)
6.	$Val(\ulcorner\mu_2\wedge Q\urcorner,\ulcorner\perp\urcorner)$	(MP) (3) y (5)
7.	$\perp$	(VD) (2) y (6)
8.	$\vdash_{QV} \mu_2\leftrightarrow Val(\ulcorner\mu_2\wedge Q\urcorner,\ulcorner\perp\urcorner)$	(VP) (2)-(7)
9.	$\vdash_{QV} \mu_2$	(MP) (8) y (1)
10.	$\vdash_{QV} \mu_2\wedge Q$	I$\wedge$ (9)
11.	$\vdash_{QV}\perp$	(VD) (8) y (10)

La prueba ha mejorado, pero sigue sin ser correcta, como nota Cook (2014). La estrategia para mostrarlo es la siguiente: la aritmética ya contiene un predicado que representa débilmente la relación de validez, con lo cual si logramos mostrar que dicho predicado obedece reglas análogas a (VP) y (VD), habremos probado que la teoría **QV** es consistente -bajo el supuesto de que **Q** también lo sea.

[8] Es decir, la función primitiva recursiva que arroja el código de Gödel de la conjunción entre las oraciones que codifican *x* e *y*.

El predicado $Prf_{\varnothing}(c, \ulcorner B \urcorner)$ significa que c es el número de Gödel de una prueba de la fórmula B. Esta relación es primitiva recursiva (ya que siempre podemos decidir si una secuencia es prueba de una fórmula), con lo cual es capturada por la aritmética. A partir de ese predicado podemos definir otro predicado $Bew_{\varnothing}(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner)$ que signifique validez del siguiente modo:

$$Bew_{\varnothing}(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner) \stackrel{\text{def}}{=} \exists z Prf_{\varnothing}(z, cond(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner))$$

donde "*cond*" es una función análoga a "*conj*", pero para el condicional. La fórmula expresa la idea de que hay alguna secuencia que prueba el condicional $A \rightarrow B$, lo cual es equivalente, teorema de la deducción mediante, a decir que el argumento de A a B es válido.

$Bew_{\varnothing}(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner)$ es una fórmula Σ_1[9], y **Q** es una teoría Σ_1-completa, es decir, que prueba todas las fórmulas verdaderas de esa clase. Por ende, sabemos que **Q** valida (BP):

$$\text{Si } A \vdash_{L} B \text{ entonces } \vdash_{Q} Bew_{\varnothing}(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner) \qquad \text{(BP)}$$

En segundo lugar, también podemos probar que **Q** es consistente con (BD) (análoga a (VD)). Para ello, necesitamos apelar a una teoría más poderosa (en particular, no finitamente axiomatizable), que extienda a **Q**. Consideremos entonces a **PA**. Se llama *Principio de reflexión* a una oración que exprese la corrección de una teoría -es decir, que todas las cosas que la teoría prueba son ciertas. Utilizando el predicado diádico con el que venimos trabajando, esto equivale a decir que los argumentos que prueba una teoría preservan verdad:

$$Bew_{T}(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

Nótese que estos principios equivalen (teorema de la deducción mediante) a la regla (BD). **PA** prueba todos los principios de reflexión para sus subteorías finitamente axiomatizables, con lo cual prueba los principios de reflexión para la lógica:

$$\vdash_{PA} Bew_{\varnothing}(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

Esto implica que si agregamos dichos principios a **Q**, la teoría resultante va a tener modelo (bajo el supuesto de que **PA** lo tiene). Y por ende, **QV** es una teoría consistente[10].

---

[9] Una fórmula es Σ_1 cuando empieza por un bloque de cuantificadores existenciales que no es seguido por más cuantificadores.

[10] Por el mismo motivo, formular la teoría de la validez con **PA** como teoría base no cambia el resultado de consistencia.

¿Dónde está entonces el error en la supuesta derivación de la paradoja? El problema es que si bien la aplicación de (VP) ya no implica recursos aritméticos, sigue sin ser una derivación lógica –que es lo que la regla requiere- puesto que para obtener $\perp$ en el paso (7) utilizamos (VD), que es una regla propia de la teoría de la validez y no de la lógica de primer orden.

En este punto valdría preguntarse si no es posible repetir el truco de incluir a la aritmética en la elaboración de la oración de Curry. La idea sería generar una oración que dijera de sí misma que de ella, la aritmética y cierta instancia de (VD) se sigue una contradicción. Después de todo, no es la regla general la que necesitamos, sino sólo el caso que se aplique a la oración en cuestión. No obstante, esta vez el truco no puede funcionar.

El motivo es que debemos seleccionar la instancia relevante para armar el predicado *antes* de aplicar el lema de diagonalización. Por ejemplo, supongamos que tomamos como instancia de (VD) la siguiente oración, asumiendo que μ_3 será nuestra oración paradójica:

$$\text{(V)} \qquad Val(\ulcorner\mu_3\urcorner,\ulcorner\perp\urcorner)\rightarrow(\mu_3\rightarrow\perp)$$

El predicado sobre el cual vamos a diagonalizar sería entonces $Val(conj((conj(x,\ulcorner Q\urcorner)\ulcorner V\urcorner)),\ulcorner\perp\urcorner)$, lo cual es equivalente a $Val(\ulcorner Q\wedge x\wedge V\urcorner,\ulcorner\perp\urcorner)$. Pero el lema de diagonalización nos indica que existe *alguna* oración μ_4 tal que:

$\vdash_{QV} \mu_4\leftrightarrow Val(\ulcorner Q\wedge\mu_4\wedge V\urcorner,\ulcorner\perp\urcorner)$

Y esa oración μ_4 no será μ_3, con lo cual la instancia que incluimos en la construcción de la oración no es la que necesitábamos.

3.1.2 ¿Son (VD) y (VP) válidas?

Lo dicho en la sección precedente descansa sobre un supuesto implícito, que es que (VD) y (VP) no pueden ser reglas de la lógica pura. Podríamos preguntarnos, como hace Cook (2014), cuál es el fundamento de dicho supuesto, y si es de hecho correcto. Su respuesta es que sí lo es, y el motivo radica en la idea de que la consecuencia lógica no es meramente preservación de verdad, sino preservación de verdad *en virtud de la* *forma.* Esto quiere decir que una regla o axioma, para ser válidos, deben tolerar cierta permutación de sus términos no lógicos. De modo un poco más riguroso:

Principio de sustitutividad: Dada una expresión primitiva no lógica b y una –posiblemente compleja- expresión *c* del mismo tipo que *b*, si $A_1 \vdash A_2$ entonces $A_1[b/c] \vdash A_2\ [b/c]$, donde $[b/c]$ es el resultado de reemplazar cada aparición de *b* por *c*.

A partir del principio y (VD) y (VP) puede probarse el siguiente resultado absurdo. Sea *s* la función sucesor y s^n la aplicación de esa función *n* veces:

1.	$A_1 \vdash_{QV} A_2$	Supuesto
2.	$\vdash_{QV} Val(\ulcorner A_1 \urcorner, \ulcorner A_2 \urcorner)$	(VP)
3.	$\vdash_{QV} Val(s^n 0, s^m 0)$	
4.	$\vdash_{QV} Val(s^n r, s^m r)$	Sustitutividad
5.	$\vdash_{QV} Val(\ulcorner A_1 \urcorner + r, \ulcorner A_2 \urcorner + r)$	
6.	$B_1 \vdash_{QV} B_2$	

Esto es, a partir de un caso de validez probamos otro caso de validez que no tiene por qué darse. La moraleja, según Cook, no es que *Val* no pueda ser un predicado lógico -como lo es la identidad- sino que (VD) y (VP) en particular no son reglas válidas, puesto que dependen de las características particulares del sistema de codificación de oraciones.

3.1.3 Validez como operador

Algunos autores consideran que la validez genera paradojas cuando se incorpora a $\mathcal{L}_Q$ un operador $\mapsto$ y se extiende **Q** a una teoría $\mathbf{Q}_{\mapsto}$ incorporando reglas análogas a las que presentamos para el predicado Val:

(VP_{op})	Si $A \vdash_{Q\mapsto} B$ entonces $\vdash_{Q\mapsto} A \mapsto B$
(VD_{op})	$A, A \mapsto B \vdash_{Q\mapsto} B$

Como indica Cook (2014), si se considera que **S5** es la lógica modal que captura el concepto de necesidad lógica, entonces las reglas para el operador de validez son a su vez válidas (es por eso que el subíndice $\mathbf{Q}_{\mapsto}$ ahora se encuentra en ambos martillos en (VP_{OP})). Sin embargo, sigue sin producirse una paradoja, puesto que para obtener autoreferencia es necesario aumentar $\mathcal{L}_{Q\mapsto}$ con un predicado veritativo. La presunta paradoja que encontramos en Whittle (2004), Shapiro (2010) y Weber (2013) sólo se obtiene si consideramos que ese predicado obedece el Esquema-T. Sea $\mathbf{Q}_{\mapsto}\mathbf{Tr}$ la teoría resultante de extender $\mathbf{Q}_{\mapsto}$ con el Esquema-T:

1.	$\mu_6 \leftrightarrow (Tr(\ulcorner\mu_6\urcorner) \mapsto \perp)$	Diag
2.	$\quad Tr(\ulcorner\mu_6\urcorner)$	Sup
3.	$\quad Tr(\ulcorner\mu_6\urcorner) \mapsto \perp$	Esquema-T
4.	$\quad \perp$	VD_{op} (2) y (3)
5.	$Tr(\ulcorner\mu_6\urcorner) \mapsto \perp$	VP_{op} (2)-(4)
6.	$Tr(\ulcorner\mu_6\urcorner)$	Esquema-T
7.	$\perp$	VD_{op}

La aplicación de VP_{op} en (5) supone una derivación que incluye al Esquema-T, y por ende, es ilegítima. Vale la pena aclarar que el artículo de Whittle está específicamente dirigido en contra del dialeteísmo, y Priest *sí sostiene* que el Esquema-T es lógicamente válido, con lo cual la paradoja se produce en ese contexto particular. Asimismo, un argumento análogo al que ofrecimos en contra de la validez de las reglas para *Val* puede ofrecerse para los axiomas de la verdad (ver Cook (2012)).

3.2 Validez es validez lógica no-clásica

Ciertas lógicas tienen por objetivo preservar el Esquema-T de modo irrestricto y al mismo tiempo validar (MP), como es el caso de la teoría paracompleta de Field (2008) o la paraconsistente de Priest (1987). Estos sistemas eluden la paradoja de Curry invalidando el teorema de la deducción, de modo que a partir de (MP) no pueda probarse (PMP):

$$\text{(PMP)} \qquad (A\wedge(A\rightarrow B))\rightarrow B$$

La inclusión del predicado de validez vuelve a reinstaurar este problema.

Para verlo, extendemos el lenguaje $\mathcal{L}_Q$ con un predicado monádico *Tr* y uno diádico *Val*. Obtenemos la teoría **QV*** agregando a **Q** el Esquema-T, (VP) y la versión axiomática de (VD):

$$(VD_{AX}) \qquad Val(\ulcorner A\urcorner, \ulcorner B\urcorner)\rightarrow(A\rightarrow B)$$

Puesto que, como dijimos, ya no vale el teorema de la deducción, (VD) como regla y como axioma no resultan equivalentes, y de hecho (VD) no es suficiente para probar la contradicción. Sin embargo, el segundo parece igual de plausible que la primera, en tanto expresa, como ya dijimos, la idea de que la validez es preservación de verdad. La lógica subyacente a **QV*** puede ser cualquiera de las mencionadas. La paradoja resultante no se deriva a partir de la oración que dice que la inferencia de una contradicción a ella es válida, sino vía la tradicional oración de Curry, que dice de sí misma que si es verdadera, implica una contradicción:

1.	$\vdash_{QV*} \kappa \leftrightarrow (Tr(\ulcorner\kappa\urcorner) \rightarrow \bot)$	Diagonalización
2.	$\vdash_{QV*} Val(\ulcorner(\kappa\rightarrow\bot)\wedge\kappa\urcorner, \ulcorner\bot\urcorner) \rightarrow (((\kappa\rightarrow\bot)\wedge\kappa)\rightarrow\bot)$	(VD_{AX})
3.	$(\kappa\rightarrow\bot)\wedge\kappa \vdash_{QV*} \bot$	la teoría valida (MP)
4.	$\vdash_{QV*} Val(\ulcorner(\kappa\rightarrow\bot)\wedge\kappa\urcorner, \ulcorner\bot\urcorner)$	(VP) en (3)
5.	$\vdash_{QV*} ((\kappa\rightarrow\bot)\wedge\kappa)\rightarrow\bot$	(MP) en (2) y (4)

Nótese que (5) es (PMP), con lo cual puede derivarse $\bot$ del modo usual para la paradoja de Curry. No hay aquí ninguna aplicación ilegítima de las reglas, y por lo tanto nos encontramos con que la validez sí genera paradojas cuando es entendida dentro de alguna de estas teorías y combinada con un predicado de verdad. Esto ha llevado a ciertos autores (como Priest (2013)) a defender lógicas no-contractivas y a otros, como Field (2008), a rechazar (VD_{AX}), y defender una concepción de la validez que no suponga entenderla como preservación de verdad.

¿Por qué no defenderse agregando (VD) como regla en lugar de como axioma? La motivación de estas teorías es justamente que las reglas para la verdad no son suficientes y es preciso rescatar el Esquema-T como bicondicional. Si se vieran obligados a dar una respuesta distinta en el caso de la validez, parece entonces injustificado abandonar una teoría como la de Kripke, que sí considera suficientes a las reglas para verdad, y que resulta consistente al extenderla tanto con (VD) como con (VD_{AX}).

3.3 Validez ampliada

Varios autores (Murzi y Shapiro (2013), Shapiro (2013)) hacen referencia a la paradoja de validez como una antinomia que afecta a un concepto más amplio de validez que el lógico. Shapiro caracteriza a ese nuevo concepto de Validez* como aplicándose a aquellos argumentos que se obtienen por lógica, principios para la verdad, o principios para la validez*. Esta caracterización es claramente circular e inadecuada ¿Cómo sabemos que las reglas de validez* preservan validez*? Podría pensarse que se trata de un problema análogo a la circularidad de la justificación de la deducción, pero ello no es así. La caracterización semántica de validez lógica como preservación de verdad en todo modelo es independiente de las reglas particulares. Es por eso que podemos preguntarnos de modo no trivial si determinada regla posee esa característica o no.

En Murzi y Shapiro (2013) obtenemos una mejor definición del concepto en cuestión, a saber, la idea de preservación de verdad en toda circunstancia posible. Sin embargo, esto todavía no es suficiente. Por ejemplo ¿debemos considerar como una circunstancia posible aquella en la cual *Val* significa, por ejemplo, "ser más fácil de entender que"? Claramente (VD) y (VP) no preservan verdad si consideramos esas circunstancias (del hecho de que *A* sea verdadera y sea más fácil de entender que *B* no se sigue que *B* sea verdadera). Al menos el significado de *Val* debe quedar fijo. También deberían mantenerse fijas las interpretaciones de los nombres de las oraciones, o de lo contrario, caeríamos en la objeción de Cook. Parecería entonces que el concepto de Validez* se identifica con el de analiticidad.

En este caso, la paradoja de validez es un problema real, aunque no novedoso, puesto que se trata del teorema probado por Montague en (1974). Murzi y Shapiro argumentan que no debe tomarse a la paradoja de Validez* como indicando que el concepto debe ser rechazado por incoherente, dado que forma parte de nuestra teoría *naïve* de la validez. No es tampoco eso lo que Montague concluye en su artículo, sino que en su lugar presenta la antinomia como argumento en contra de la posibilidad de representar el operador de necesidad como predicado. No hay entonces una imposibilidad de conservar las reglas intuitivas para la validez*, sino una imposibilidad de conservarlas para ella entendida como predicado. Sabemos que las reglas son lógicamente válidas (si la validez lógica es caracterizada por el sistema modal **S5**), y por ende también sabemos que son válidas*, independientemente de qué contemos como circunstancia posible.

Frente a esto, uno podría preguntarse por qué no es entonces esa la conclusión que extraemos del Mentiroso. Las razones son que si se trata a la verdad como operador (i) se pierde una de sus principales funciones, a saber, expresar generalizaciones y (ii) la paradoja se evita sólo por una limitación expresiva: carecemos de los medios de generar la autoreferencia necesaria para siquiera formular la oración del mentiroso. En el caso de la validez, si contamos con un predicado veritativo, la posibilidad de autoreferencia sigue presente, y la de la generalización también.

¿Surge la paradoja de la Validez* si agregamos a los operadores el predicado veritativo? Bueno, ello depende de qué principios lo regulen, y cuál sea el estatus de esos principios. Una teoría de la Validez* debería contar sólo con axiomas analíticos. La intuición de que el Esquema-T es analítico proviene de la idea de que constituye la definición del predicado. Esto es lo que Gupta y Belnap (1993) llaman *Tesis de la significación*.

Sin embargo, el Esquema-T original, formulado en términos de un bicondicional, genera los conocidos problemas. Es por ello que surgen propuestas que disocian la tesis de la significación de la idea de que una teoría de la verdad deba implicar los bicondicionales-T (la "tesis de la implicación"). En el caso de Gupta y Belnap (1993), lo que es analítico es la definición de verdad que establece una regla de revisión. En el caso de Kripke (1975), el significado de *Tr* está caracterizado inferencialmente por las correspondientes reglas de introducción y eliminación. Para que la paradoja de la Validez* surja, entonces, necesitamos que (VD_{op}) y (VP_{op}) se apliquen a instancias de los bicondicionales-T, y ello no será legítimo si no los consideramos analíticos.

4 Conclusión

Hemos visto cómo las teorías subestructurales son más uniformes que las suboperacionales, puesto que apelan a un único recurso para resolver todas las paradojas, tanto las semánticas –del tipo de Curry o de tipo del mentiroso- como las de la vaguedad.

Además, existen paradojas que no involucran ninguna conectiva y que sólo pueden resolverse apelando a lógicas subestructurales , como es el caso de la paradoja de la validez para ciertas lógicas no-clásicas, o para teorías de la preservación de verdad analítica.

El caso de Tonk, que es el que fundamentalmente nos interesa trata aquí, pertenece en algún sentido a este segundo grupo, dado que no requiere de reglas para otras conectivas. Es verdad que considerarla una paradoja depende de que sus reglas resulten intuitivas. Este no ha sido el sentimiento que en general ha despertado esta conectiva; a lo sumo, lo que pretende preservarse es la posibilidad de definir un símbolo apelando a cualquier tipo de regla. Es decir, lo valioso no sería ⊗ en sí mismo, sino el método inferencialista del que nace. Yo sí considero que vale la pena intentar preservar Tonk, puesto que su problematicidad, como veremos, proviene del hecho de ser una conectiva vaga. Por ende, si no excluimos a los predicados vagos por generar inconsistencias en ciertos contextos, no deberíamos hacerlo con ⊗.

Además, algo curioso es que el de Tonk quizás sea el único caso en donde la regla de Contracción no juega ningún rol –razón por la cual no retomaremos la discusión sobre lógicas no contractivas. Respecto de monotonía diremos algo en el capítulo 10, aunque nuestra opción predilecta será el abandono de Corte, a lo cual nos abocaremos en el próximo capítulo.

- Capítulo 7 -

ST

1 Introducción

Las primeras apariciones contemporáneas de lógicas no transitivas las ubica Paoli en las actas de un simposio de la Sociedad Aristotélica de 1958, en los textos de Geach y Lewy. Más recientemente, ellas se han convertido en una de las alternativas más populares como solución a las paradojas dentro del campo subestructural.

El primero en proponer un enfoque de este tipo es Tennant (1982), quien sostiene que si bien tenemos una prueba normal de $\Rightarrow\neg Tr\ulcorner\lambda\urcorner$ y una prueba normal de $\neg Tr\ulcorner\lambda\urcorner\Rightarrow\perp$, no podemos combinarlas puesto que el resultado es no-normalizable. En la actualidad, los principales defensores de la falla de transitividad son un conjunto de autores –auto-identficados como CERvR: Cobreros, Egré, Ripley y van Rooij- que han publicado ocho artículos sobre distintos cuestiones relacionadas con enfoques no-transitivos de la vaguedad, en general en el marco de la lógica que se conoce como **ST**.

En la siguiente sección presentaremos **ST** de modo modelo-teórico y como teoría de la prueba. En la sección 3 veremos cómo es el análisis que se ofrece de la paradoja de Sorites, y lo compararemos con la respuesta Supervaluacionista. Por último, en la sección 4 volveremos al problema del capítulo 4 acerca de cómo definir normalidad, de modo que se aplique al menos a estos casos de lógicas no-tarskianas.

A lo largo del capítulo discutiremos también a **TS**, la lógica (meta) dual no reflexiva de **ST**. Si bien nuestras simpatías están alineadas con la falla de transitividad, **TS** presenta características formales interesantes que vale la pena considerar.

2 Semántica y Teoría de la prueba para ST

ST tiene la ventaja de ser muy sencillamente caracterizable. Desde el punto de vista de la teoría de la prueba, basta con tomar el cálculo de secuentes clásico que presentamos en la introducción, sin la regla de corte. El hecho de que Corte sea, a diferencia de las otras reglas estructurales, eliminable en los sistemas de lógica clásica, trae como consecuencia no sólo la posibilidad de una prueba de consistencia *à la* Gentzen, sino también el hecho de que el sistema sin Corte no pierde ninguno de los secuentes probados. Esto significa que se conservan todas las valideces, contradicciones e inferencias clásicas. Es decir, que al menos respecto de su lógica de primer nivel, **ST** no es más que la lógica clásica.

La preservación de los secuentes clásicos es una de las credenciales que exhibe **ST** para distinguirse respecto de sus competidoras. El fundamento de esto se conoce como *máxima de mutilación mínima*, que puede ya encontrarse en Quine (1970), y más recientemente ha sido retomada por autores tales como Williamson (2015), Hjortland (2017), Priest (2016) y Russell (2015). La idea es que la lógica clásica constituye la teoría por default, y que, si la evidencia nos forzara a abandonarla, entonces la alternativa que implique el menor grado de revisión debe ser preferida frente a sus rivales

El nombre "**ST**" proviene de la teoría de modelos que se usa para interpretar los secuentes, y que se llama "estricto-tolerante" (*strict-tolerant* en inglés). La semántica estricto-tolerante se construye sobre las p-matrices de Frankowski (2004), y fue propuesta originalmente por CERvR (2012a) y desarrollada por ejemplo en. (2013), (2015a), (2015b) y (2016). Está constituida por funciones que no sólo son trivaluadas, sino que además son muy familiares: se trata de exactamente las mismas que en **K3** y **LP**.

La diferencia con estas lógicas trivaluadas más tradicionales aparece en la interpretación pretendida del tercer valor, y la relación de consecuencia lógica que ella dictamina. Al valor 1 lo llamamos *verdad estricta*, al valor 0, *falsedad estricta* y al valor ½, *verdad tolerante* o *falsedad tolerante*. Es decir, el tercer valor no es incompatible con la verdad y la falsedad, sino que tiene algo de ambos, lo cual acerca en este sentido a **ST** un poco más a **LP** que a **K3**. Sin embargo, ½ no funciona exactamente como la verdad –como sucede con un glut- dado que no es un valor designado. De hecho, la noción de consecuencia lógica no apela en absoluto a valores designados:

Definición (*Consecuencia Lógica en* **ST**) $\Gamma \vDash_{ST} \Delta$ si y sólo si en toda valuación, todas las fórmulas de Γ valen 1 sólo si alguna fórmula de Δ no vale 0.

Nótese que una valuación que asigna 1 a todas las premisas, ½ a alguna conclusión y 0 a ninguna no es un contramodelo de **ST** (aunque sí lo es de **K3**), y que tampoco lo es una valuación que asigna ½ a alguna premisa, 0 a ninguna y 0 a todas las conclusiones (que sí lo es de **LP**). El aspecto más intuitivo de esta definición radica en el hecho de que comparte la noción de contraejemplo con la lógica clásica, esto es, sólo el caso en que las premisas son estrictamente verdaderas y la conclusión estrictamente falsa invalida un argumento.

La lógica **ST** es correcta y completa respecto de los modelos estricto-tolerantes, lo cual representa una gran ventaja respecto de otros sistemas subestructurales, que carecen de interpretaciones veritativo-funcionales de las conectivas (y en algún sentido acerca a **ST** a los sistemas suboperacionales).

A esta altura, vale la pena mencionar a la lógica no reflexiva **TS**, desarrollada por French en (2016). Desde el punto de vista de la teoría de la prueba, partimos también del sistema clásico, pero en lugar de quitarle la regla de Corte, le quitamos los axiomas de Identidad. El resultado, claro está, es una lógica vacía, puesto que ninguna prueba en un sistema de secuentes puede empezar sin axiomas. Sin embargo, esto no quiere decir que sea inútil: al tener reglas, si formulamos alguna teoría agregando secuentes iniciales, el sistema nos permitirá derivar consecuencias de ellos.

La situación de **TS** –argumenta French- es análoga a la de **K3**: se trata de una lógica que no tiene tautologías, pero que no por eso no puede usarse como base para otras teorías –y es de hecho, una de las alternativas más usuales para formular teorías de la verdad.

Por otro lado, desde el punto de vista de la teoría de modelos, al igual que en **ST**, también podemos dar una semántica que hace correcto y completo al cálculo si a las mismas valuaciones **K3** de antes, las usamos para definir una consecuencia tolerante-estricta:

Definición (*Consecuencia Lógica en* **TS**) $\Gamma \vDash_{TS} \Delta$ si y sólo si en toda valuación, ninguna fórmula de Γ vale 0 sólo si alguna fórmula de Δ vale 1.

Es decir, ahora el contraejemplo de un razonamiento sería que una valuación que nos permitiera pasar de premisas tolerantemente verdaderas a una conclusión tolerantemente falsa. La razón por la cual falla la reflexividad es que las valuaciones que asignan ½ a las premisas y a la conclusión son contraejemplos de **TS**. Hay motivaciones conceptuales de diversos tipos para abandonar la reflexividad, pero la que a mi entender resulta más atractiva es la idea sencilla y ordinaria de que un argumento no puede ser circular. Es decir, que las premisas deben justificar a la conclusión en un sentido más fuerte que la mera preservación de verdad.

3 Vaguedad

3.1 Sorites

Como vimos en la primera parte, hay diversos modos de presentar la paradoja de Sorites, y el principio de tolerancia involucrado. En particular, en el capítulo acerca de la Conflación la veíamos representada apelando a una relación ternaria de distancia entre los objetos. En los textos de CERvR suele presentarse mediante una relación reflexiva y simétrica $\sim_P$ que expresa similaridad respecto de un predicado vago P (por ejemplo, "aparentar tener la misma cantidad de pelos"). Una ventaja de esto respecto de la relación $D^{<x\text{-}y}$ es que no asume que esa relación pueda representarse numéricamente. La siguiente fórmula sería entonces un modo de expresar el Principio de Tolerancia:

$$\textbf{(Tolerancia}\sim\textbf{)} \quad \forall x \forall y (Px \wedge y \sim_P x \rightarrow Py)$$

En Cobreros et al (2012) y Ripley (2013b) podemos encontrar dos clases relevantes de versiones de Sorites formuladas para un cálculo de secuentes. La primera utiliza la siguiente regla:

$$\frac{\Gamma, a \sim_P b \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \quad (\sim\text{drop})$$

que se justifica por el hecho de que las afirmaciones de similaridad son constituyentes del significado del predicado. La derivación procede entonces directamente a partir de afirmaciones de semejanza, tomándolas como premisas:

$$\dfrac{\dfrac{Pa,\, a \sim_P b \Rightarrow Pb}{Pa \Rightarrow Pb} \qquad \dfrac{Pb,\, b \sim_P c \Rightarrow Pc}{Pb \Rightarrow Pc} \qquad \dfrac{Pc,\, c \sim_P d \Rightarrow Pd}{Pc \Rightarrow Pd} \qquad \begin{matrix} \ldots & \text{etc.} \\ \ldots & \text{etc.} \end{matrix}}{Pa \Rightarrow Pe}$$

La otra opción es tomar las afirmaciones de tolerancia como conclusiones, y agregar una regla extra que exprese Tolerancia:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow a \sim_P b, \Delta}{\Gamma, Pa \Rightarrow Pb} \qquad \text{(TolD~)}$$

$$\dfrac{\dfrac{a \sim_P b \Rightarrow a \sim_P b}{Pa \Rightarrow Pb} \qquad \dfrac{b \sim_P c \Rightarrow b \sim_P c}{Pb \Rightarrow Pc} \qquad \dfrac{c \sim_P d \Rightarrow c \sim_P d}{Pc \Rightarrow Pd} \qquad \dfrac{\ldots \quad \text{etc.}}{\ldots \quad \text{etc.}}}{Pa \Rightarrow Pe}$$

En ambas derivaciones, todos los secuentes-premisa constituyen inferencias válidas en **ST**, y el primer paso se obtiene a su vez por una regla válida ((~drop) en un caso y (tolD~) en el otro) y es por ende válido. Sin embargo, la conclusión se obtiene por sucesivas aplicaciones de Corte, con lo cual no se encuentra garantizada en **ST**.

Esta clase de argumentos soríticos es del mismo tipo de la que veíamos al final de la primera parte para las conectivas vagas, en el sentido de que no involucra ninguna operación lógica en particular. En este sentido, al menos en este modo de la paradoja, Sorites comparte con la paradoja de la validez el hecho de que para resolverla, es necesario el abandono de algún principio estructural.

Respecto de la versión tradicional con (Tolerancia~) como principio, se trata –al igual que en la lógica clásica- de un argumento válido, porque (Tolerancia~) es un principio que sólo puede ser evaluado como tolerantemente verdadero.

Podemos notar el aspecto paraconsistente de la propuesta si pensamos en los casos limítrofes, que recibirán valor ½ en todo modelo pretendido del lenguaje vago, con lo cual tanto *Pa* como $\neg$*Pa* van a ser teoremas de la teoría.

3.2 S-valuacionismo

En este punto querría comparar el tratamiento no-transitivo con otro de los tratamientos más populares de la vaguedad, que es la familia de teorías que se agrupa bajo el nombre de *S-valuacionismo*. Como veremos, **ST** tiene todas las ventajas del s-valuacionismo, sin ninguno de sus problemas. Dado que la literatura sobre estas teorías es presentada casi en su totalidad en términos modelo-teóricos, aquí haremos lo mismo. Quien lo desee puede encontrar un sistema de *tableaux* en Cobreros (2013).

Un modelo S-valuacionista para $\mathcal{L}_P$ es entonces un espacio *P*, que no es más que un conjunto de asignaciones clásicas, a veces llamadas *puntos* o *precisificaciones*. Conceptualmente, el espacio representa la idea de que nuestras prácticas no determinan una única interpretación clásica para el lenguaje, sino que dejan abiertas diversas posibilidades, dentro de un rango. En particular, si *p* es una oración que expresa un caso limítrofe de un predicado vago, puede ser considerada tanto verdadera como falsa, sin por ello violar ninguna norma lingüística.

Diferentes relaciones de consecuencia pueden definirse para estos modelos, dependiendo de si consideramos que la situación recién descripta es un caso de sobredeterminación o de subdeterminación[11].

Definición (*Consecuencia Global*) $\Gamma \vDash_{SG} \Delta$ si y solo si, para todo espacio *P*, si toda $A \in \Gamma$ es verdadera en todo punto ν en *P*, entonces alguna $B \in \Delta$ es verdadera en todo ν in *P*.

Definición (*Subconsecuencia*) $\Gamma \vDash_{SB} \Delta$ si y solo si, para todo espacio *P*, si para toda $A \in \Gamma$ hay un punto ν (quizás diferente) en *P* en el que *A* es verdadera, entonces para alguna $B \in \Delta$ hay algún punto ν^* en *P* (quizás diferente) en donde *B* es verdadera.

Los espacios s-valuacionistas son reminiscentes de los modelos para lógicas modales, con la diferencia de que en estos, la consecuencia es usualmente definida de modo *local*, dado que la verdad es entendida como verdad-en-un-mundo, y es ello lo que debe ser preservado en un argumento válido. Aquí, en cambio, los puntos no son mundos sino interpretaciones admisibles, y la verdad es entendida como *superverdad* -verdad en todo punto- o *subverdad* –verdad en algún punto.

El *supervaluacionismo* (**SG**) es la lógica que corresponde a la primera relación de consecuencia. Es usualmente atribuida a Van Fraasen (1966), y ha sido popularizado por Fine (1975) y defendida, entre otros, por Rossanna Keefe (2000), Stewart Shapiro (2006), y Pablo Cobreros (2011). Se trata de una teoría de la vaguedad como indeterminación, puesto que los casos limítrofes no son considerados ni (super)verdaderos ni (super)falsos.

---

[11] Hay de hecho diversas variantes más de la definición de consecuencia. Para un panorama completo ver Varzi (2007) o Cobreros (2011).

El *subvaluacionismo* (**SG**), por otra parte, es la lógica que corresponde a la segunda relación de consecuencia. Si bien no es el miembro más popular de esa familia, es el que de hecho fue el primer tipo de teoría s-valuacionista en aparecer -en Jaśkowski (1948), bajo el nombre de *lógica discursiva*. Dar una semántica para términos vagos era una de las aplicaciones que Jaśkowski tenía en mente, pero el nombre proviene de otra motivación, que es la de modelar la lógica que resulta de la combinación de las afirmaciones de un grupo de participantes en una discusión, que podrían no estar de acuerdo acerca de todo. El subvaluationismo corresponde a una teoría de la vaguedad como sobredeterminación, dado que los casos limítrofes son considerados tanto (sub) verdaderos como (sub) falsos.

Cuando restringimos las definiciones al caso en el cual Γ y Δ son vacíos o sólo contienen una fórmula, **SB** y **SG** coinciden con **CL**. Sin embargo, esa equivalencia se pierde cuando Γ -en el caso del subvaluacionismo- o Δ -en el caso del supervaluacionismo- pueden contener más de una fórmulas. Existe razones para pensar que la validez de argumentos con muchas premisas es más natural (y por ende, más importante de preservar) que la de los argumentos con muchas conclusiones. Por ejemplo, Steinberger (2011) argumenta que directamente estos últimos no existen, puesto que no hay modo de entender a las conclusiones múltiples más que como una única conclusión disyuntiva. Esto implicaría alguna evidencia en favor de **SG** por sobre **SB**. Sin embargo, vale la pena notar que ambas son duales.

Esta divergencia entre argumentos de una y muchas premisas da lugar al siguiente fenómeno:

$$A \wedge \neg A \vDash_{SB} B \qquad \text{pero} \qquad A, \neg A \nvDash_{SB} B$$

$$B \vDash_{SG} A \vee \neg A \qquad \text{pero} \qquad B \nvDash_{SB} A, \neg A$$

Por ende, el subvaluacionismo satisfice la definición de paraconsistencia que ofrecimos en la introducción, aunque por la validez del primero de estos dos argumentos, suele llamársela una lógica *débilmente* paraconsistente. El fenómeno dual sucede con el supervaluacionismo: no satisface la definición usual de paracompletitud, pero dado que sí invalida el segundo argumento, suele considerárselo una teoría *débilmente* paracompleta.

Todos los miembros de la familia s-valuacionista comparten la idea de que a pesar de la existencia de esta especie de falla en el lenguaje, ello no debería obligarnos a rechazar principios clásicos. El modo de lograr esto es la no-composicionalidad: aun cuando haya puntos en donde A es verdadera y puntos en los que no, $A \vee \neg A$

será verdadera en todos, puesto que en el segundo caso, será verdadera $\neg A$. Del mismo modo, $A\wedge\neg A$ será falsa en todo punto.

ST tiene en principio por sobre **SG** y **SB** la misma ventaja que tiene por sobre cualquier propuesta no fuertemente paraconsistente, que es la posibilidad de validar no trivialmente a la tolerancia. En cualquier semántica s-valuacionista, el principio de tolerancia resultará falso en toda precisificación. En algún sentido, esto es incluso peor que lo que sucede en una lógica trivaluada estándar en donde al menos es evaluado como ½.

Esto podría remediarse parcialmente si en lugar de ser modelos clásicos, los puntos del espacio fueran modelos por ejemplo de **K3**. Nadie hasta donde sé ha implementado una propuesta de este tipo, probablemente por el hecho de que la lógica resultante no sería la clásica, sino que va a copiar a la lógica propia de los modelos que conforman las precisificaciones. Con lo cual, el costo de incorporar esta modificación es que se pierde uno de los aspectos atractivos de la semántica. En **SG** sólo se logra que el principio de Tolerancia no sea insatisfacible, aunque en **SB** al menos sí obtendríamos la validez del principio.

Sin embargo, hay otra virtud de **ST** -que no ha sido notada hasta el momento. Las semánticas s-valuacionistas tienen como objetivo conservar la lógica clásica, pero ello como parte de una idea más general, que es la de que hay principios del lenguaje -ya provisto de su interpretación pretendida- cuyo valor de verdad no querríamos que se viera afectado por la existencia de casos limítrofes. Estos principios se conocen como *conexiones penumbrales*. La idea es, por ejemplo, que a pesar de que los predicados de color o de franja etaria sean vagos, oraciones del siguiente tipo deberían ser verdaderas:

Si algo es bordó, entonces es rojo.

Si alguien es un bebé, entonces no es un adulto.

En las semánticas paracompletas, estas oraciones tienen instancias que valen ½, y por ende no son verdaderas (i.e., los casos en los cuales ese alguien es un caso limítrofe de ser un bebé o de ser bordó). En las semánticas paraconsistentes, en tanto ½ es un valor designado, sí resultan verdaderas, pero so pena de invalidar Modus Ponens.

¿Qué pasa con las conexiones penumbrales falsas? Así como la existencia de casos limítrofes no debería interferir con la verdad de oraciones generales acerca de la rojez, tampoco debería hacerlo con la falsedad de esas oraciones generales. Para los universales, esto no es un problema, dado que sólo necesitamos una instancia falsa para que sean falsos.

En el caso de los existenciales, la presencia de una instancia tolerantemente verdadera es suficiente para arruinar su falsedad. Sin embargo, es raro pensar que esto pueda representar un problema real. Por ejemplo, para que una oración como $\exists x(Fx \wedge Px)$ valga ½ debe haber algún objeto que satisfaga tolerantemente tanto Fx como Px, y en ese caso no es claro que debamos considerar falsa a la oración. Para oraciones del tipo $\exists x(Px \vee Fx)$ sí alcanza con que haya un caso limítrofe de, por ejemplo, Px, pero tampoco parece ser algo malo.

Además de las conexiones penumbrales, hay otro vínculo que conecta a **ST** y los S-valuacionismos, que es el hecho de que ambas teorías abandonan principios clásicos al nivel metainferencial. Vamos a desarrollar esto en detalle en la parte III, pero a modo de ilustración podemos decir que, del mismo modo en que **ST** abandona Corte, por ejemplo el supervaluacionismo abandona la regla de la disyunción a la izquierda. Si $\square$ es un operador de determinación que significa que la fórmula a la que se aplica es superverdadera, entonces el siguiente es un contraejemplo a ($\vee$I), como ha mostrado Williamson (1994):

$$\frac{p \Rightarrow \square p \vee \square \neg p \qquad \neg p \Rightarrow \square p \vee \square \neg p}{p \vee \neg p \Rightarrow \square p \vee \square \neg p}$$

En virtud de esto, propongo la categoría de *lógicas submetainferenciales* para a aquellas que manifiesten este fenómeno. Por supuesto, además de los S-valuacionismos y **ST**, todas las lógicas subestructurales pertenecen a esta clase

4 Anormalidad redefinida

Como adelantamos en la primera parte, la definición de normalidad con la que contamos no puede aplicarse a lógicas que no tengan valores designados. Con lo cual –y dado que justamente nuestros modelos estarán basados en ellas- será necesario modificarla.

La propuesta es pensar en la verdad y la falsedad como valores formadores de contraejemplos. Ser un valor formador de contraejemplos es una relación, no una propiedad absoluta como la de ser designado, con lo cual debemos considerar siempre los valores de a pares, uno para premisas y su complemento para la conclusión.

Para conservar las consideraciones del capítulo 4, vamos a agregar el asterisco -que representaba los elementos no formales que constituían la verdad- también a esta categoría:

Definición (*Normalidad relacional 5*) Una conectiva $\odot$ de $\mathcal{L}$ es normal respecto de su traducción $\odot$* en el lenguaje clásico $\mathcal{L}$* si y sólo si hay alguna tabla que resulta de eliminar las filas y columnas de todos los valores menos uno formador de contraejemplos* para premisas –reetiquetado como 1- y su complemento para la conclusión –reetiquetado como 0- y esa tabla es la tabla de $\odot$*.

Dado que 1 y 0 son formadores de contraejemplos* tanto en **ST** como en **TS**, y las tablas de sus conectivas son las de **K3**, el resultado de la definición es que resultan ser todas normales. Por otro lado, también necesitamos la versión intrínseca, para aplicarla a las nuevas conectivas vagas que surjan:

Definición (*Normalidad intrínseca 5*) Una conectiva $\odot$ de $\mathcal{L}$ es normal si y sólo si hay alguna tabla que resulta de eliminar las filas y columnas de todos los valores menos uno formador de contraejemplos* para premisas –reetiquetado como 1- y su complemento para la conclusión –reetiquetado como 0- y esa tabla sólo tiene 1s y 0s

5 Conclusión

Hemos visto en este capítulo que **ST** es una lógica sencilla, tanto desde el punto de vista de teoría de la prueba como respecto de sus modelos, y que tiene todas las ventajas de sus competidoras a la hora de lidiar con paradojas semánticas.

Respecto de la cuestión que nos compete, cumple con dos características necesarias. En primer lugar, permite construir sobre ella una teoría intuitiva de la vaguedad, que tiene aspectos interesantes de teorías no-clásicas –a saber, la conservación del principio de Tolerancia y de las conexiones penumbrales, y la uniformidad en el tratamiento de las distintas versiones de la paradoja. En particular, permite dar una respuesta a las versiones que no involucran vocabulario más allá de los predicados o conectivas vagos (y quizás, una relación de similaridad). Al mismo tiempo, logra todo ello sin necesidad de abandonar ningún argumento clásicamente válido.

En segundo lugar, si bien su relación de consecuencia lógica no es caracterizable mediante el concepto de valor designado, podemos igualmente modificar la definición de normalidad de modo tal que las conectivas definidas de este modo puedan ser consideradas o no anormales.

Estas dos cuestiones la perfilan como una buena candidata para estar a la base de una teoría del vocabulario vago que incorpore también la vaguedad de los operadores lógicos.

- Capítulo 8 -

Abrazar a Tonk

1 Introducción

Con **ST** a la base, cualquier vocabulario que sea definido mediante reglas de introducción va a producir una extensión conservativa. Este motivo es suficiente para considerarlo un contexto apto para Tonk. Sin embargo, ello por sí solo no nos indica ningún interés particular que la conectiva tenga. En este capítulo presentaremos una interpretación de Tonk en términos de valuaciones de **ST**, y mostraremos que de hecho es, desde ese punto de vista, una conectiva anormal.

Comenzaremos en la sección 2 por repasar otras semánticas valuacionales que se han ofrecido previamente, y mostremos las falencias de ambas. En la sección 3 voy a presentar una nueva interpretación, que logrará evitar los problemas de las anteriores, a cambio de abandonar el determinismo semántico. En la sección 4 voy a probar que el sistema que resulta de agregar las reglas de $\otimes$ al sistema de **ST** es correcto y completo respecto del conjunto de valuaciones de la sección 3. En la sección 5 volveremos sobre las lógicas no monotónicas, y compararemos una posible respuesta de ese tipo con la salida no transitiva. Finalmente, en la sección 6 vamos a unificar la discusión de Tonk con la anormalidad de conectivas y cuantificadores vagos.

2 Otras interpretaciones no transitivas

Primero Cook (2005) y diez años más tarde Fjellstad (2015) han explorado la idea belnapiana de que hay contextos significativos para Tonk. En ambos casos, el esfuerzo está orientado a ofrecer una lógica que esté lo más independientemente motivada que sea posible, aun cuando no se comprometan con ella. Vamos entonces a presentar estas dos alternativas, y explicar cuál es la limitación que presenta cada una.

2.1 Las semánticas incompletas de Cook

La primera persona en dar forma a la afirmación de que la significatividad de Tonk depende de un contexto de deducibilidad es Roy Cook en (2005). Si bien se trata más de un ejercicio teórico que de una defensa convencida, Cook ofrece allí no una sino tres posibles semánticas veritativo-funcionales.

Estrictamente, los sistemas no están presentados funcional sino relacionalmente: hay dos valores semánticos, y cada oración puede vincularse con uno, con ambos, o con ninguno. Sin embargo, el esquema de valuación elegido no es más que el esquema de cuatro valores de **FDE**.

La diferencia crucial proviene de la noción de consecuencia, dado que en vez de pedirse preservación de alguno de los modos de la verdad de premisas a conclusión en toda valuación, se permite además la posibilidad de que se cumpla preservación de no-verdad de conclusión a premisas en toda valuación[12]. A diferencia de lo que ocurre en **CL**, ambas condiciones no son equivalentes. Por el contrario, puede suceder que $\Gamma \vDash \Delta$ porque se preserva verdad de Γ a Δ, que además $\Delta \vDash \Sigma$, porque se preserva no-verdad de Σ a Δ, pero que el argumento de Γ a Σ no preserve ninguna de las dos cosas, y por ende, sea inválido. De este modo, tenemos un contraejemplo a la transitividad, y se abre el espacio para dar la primera interpretación de Tonk, que es la siguiente (donde ¾ representa el cúmulo de valores y ¼ representa el vacío):

$\otimes$	1	¾	¼	0
1	1	¾	1	¾
¾	1	¾	1	¾
¼	¼	0	¼	0
0	¼	0	¼	0

No deberíamos, sin embargo, tomarnos la tabla demasiado en serio, puesto que –como aclara en una nota al pie- hay de hecho 2^{16} opciones para elegir, y todas ellas validan las reglas de inferencia de Prior.

La segunda opción surge de restringir las valuaciones de acuerdo con la siguiente condición:

(Restricción Gappy) Para variables proposicionales, a lo sumo R(0, *p*) o R(1, *p*).

En término funcionales, esto equivaldría a exigirle a las valuaciones que no asignen a las variables proposicionales el valor ¾.

[12] Lo que no puede ocurrir es que se preserve alguna propiedad en algunas valuaciones y otra en otras.

(Restricción Glutty) Para variables proposicionales, al menos R(0, *p*) o R(1, *p*).

Nuevamente, en término funcionales, esto equivaldría a exigirle a las valuaciones que no asignen a las variables proposicionales el valor ¼.

En cualquiera de los dos casos, la tabla resultante sería la siguiente -con el valor ½ interpretado respectivamente como R(*A*, ∅) y como R(*A*, {0,1}):

⊗	1	½	0
1	1	½	½
½	1	½	½
0	0	0	0

Dos cuestiones son importantes de señalar respecto de esta propuesta. La primera es de orden filosófico, y consiste en que, a pesar de ofrecer una clase de modelos para Tonk, Cook no aboga por la idea de que se trate de una conectiva legítima, sino que por el contrario, extrae como moraleja un recordatorio de la máxima de Belnap de que el problema de la siginificatividad debe ser siempre considerado en contexto. Esto quiere decir que si bien a esta altura contamos con modelos de Tonk, aún queda vacante el puesto de sus defensores.

En segundo lugar, y quizás más importante, ninguna de esas 2^{16} tablas hace a las reglas completas, con lo cual ellas resultan suficientes para dar cuenta de las valideces que involucran a Tonk, pero no de sus invalideces.

2.2 La Semántica completa y no reflexiva de Fjellstad

En (2015), Fjellstad argumenta en favor de por qué ninguna lógica reflexiva va a poder ofrecer ese resultado de completitud que mencionábamos en la sección anterior. En particular, toda semántica que podamos ofrecer fallará en que va a carecer de contraejemplos para al menos uno de los secuentes $A{\otimes}B{\Rightarrow}A$ y $B{\Rightarrow}A{\otimes}B$, ninguno de los cuales posee una prueba.

El motivo de esto puede verse notando que no posible en un sistema con ⊗ probar lo que Hacking (1979) llama "Eliminación de Identidad", que consiste en probar las instancias moleculares de $A{\Rightarrow}A$ asumiendo sólo sus instancias proposicionales (volveremos sobre este teorema en la sección 4.2). De ese modo, cualquier sistema reflexivo que incorpore a Tonk, deberá serlo "a la fuerza", esto es, teniendo como axiomas todos los casos de identidad, no sólo los atómicos. La propuesta de Fjellstad será por ende abandonar tanto Corte como Identidad irrestricta, conservando sí las instancias proposicionales.

La semántica consiste en clases de bivaluaciones, que son pares de funciones en {0,1}, una de las cuales viene a interpretar a las premisas y otra a las conclusiones, y que se restringen de acuerdo a las siguientes cláusulas (donde el subíndice indica si son valuaciones de premisas o de conclusión):

- $\nu_P(p) = \nu_C(p)$
- $\nu_P(\neg A)=1 \Leftrightarrow \nu_C(A)=0$
- $\nu_C(\neg A)=1 \Leftrightarrow \nu_P(A)=0$
- $\nu_P(A \rightarrow B)=1 \Leftrightarrow \nu_C(A)=0$ o $\nu_P(B)=1$
- $\nu_C(A \rightarrow B)=1 \Leftrightarrow \nu_P(A)=0$ o $\nu_C(B)=1$
- $\nu_P(A \otimes B)=1 \Leftrightarrow \nu_P(B)=1$
- $\nu_C(A \otimes B)=1 \Leftrightarrow \nu_C(B)=1$

Fjellstad prueba que este sistema es de hecho completo respecto de las reglas de $\otimes$.

Hemos entonces superado los dos problemas técnicos de la propuesta anterior, pero a costo de adoptar una lógica no reflexiva. Puesto que las lógicas no reflexivas son notoriamente débiles, la mutilación de la lógica que requiere la incorporación de Tonk parece ser excesiva para los beneficios reportados. Es por ello que todavía no se logra abrir un espacio para considerarla una conectiva *bona fide*.

3 Una nueva interpretación para Tonk

Mi propuesta parte de la incorporación de Tonk y Funk a **ST**. En lugar de usar exactamente el mismo sistema de la introducción, pero sin Corte, voy a introducir tres modificaciones en los axiomas. Las dos primeras tienen como único objetivo el simplificar las pruebas, y nada sustancial depende de ello. Por un lado, en lugar de tomar el cálculo para el lenguaje completo, tomaremos uno restringido a $\neg$ y $\rightarrow$. Por el otro, en lugar de tener Monotonía como una regla aparte, vamos a incorporarla a la identidad:

$$\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta$$

La tercera cuestión en cambio sí es crucial. Como veíamos que nota Fjellstad, a causa de la no-unicidad de las reglas para Tonk, será imposible que un sistema que las contenga pueda probar un teorema de eliminación de Identidad. Es por ello que nuestro sistema de prueba deberá tener todas las instancias del axioma desde un principio. Es decir, la fórmula *A* debe ser de cualquier complejidad, no necesariamente atómica.

Llamaremos entonces S$\otimes$ y S$\oplus$ a los sistemas que resultan de incorporar a esa base las reglas de $\otimes$ y $\oplus$. En primer lugar, a la hora de dotarlos de una semántica adecuada, debemos considerar cómo hacer para que las reglas de $\otimes$ y $\oplus$ sean *correctas*: queremos que todos los secuentes que pueden ser probados en el sistema resulten válidos. Para ello, es necesario entender qué tipo de restricciones imponen las reglas sobre el conjunto de valuaciones.

En el caso clásico, la lectura disyuntiva de un secuente es la interpretación de una expresión de la forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$ como una afirmación de que o bien alguna fórmula en Γ es falsa, o bien alguna en Δ es verdadera. Una lectura de este tipo pero correspondiente a la semántica de **ST** consistiría en decir que o bien alguna fórmula de Γ es tolerantemente falsa, o bien alguna de Δ es tolerantemente verdadera. Podemos entonces usar esta lectura disyuntiva para entender qué es lo que nos piden las reglas del siguiente modo: si alguna de las fórmulas activas a la izquierda (derecha) es tolerantemente falsa (verdadera), entonces la fórmula principal a la izquierda (derecha) es tolerantemente falsa (verdadera).

Para Tonk, esto significa que la regla a la derecha prohíbe aquellos modelos en los cuales $\nu(A) \geq ½$ y $\nu(A \otimes B) = 0$, mientras que la regla a la izquierda prohíbe aquellos en los cuales $\nu(B) \leq ½$ y $\nu(A \otimes B) = 1$. Esto deja cuatro casos completamente determinados:

$\nu(A) \geq ½$ & $\nu(B) \leq ½ \Rightarrow \nu(A \otimes B) = ½$.

Y también cuatro casos parcialmente determinados:

$\nu(A) \geq ½$ & $\nu(B) = 1 \Rightarrow \nu(A \otimes B) \neq 0$

$\nu(A) = 0$ & $\nu(B) \leq ½ \Rightarrow \nu(A \otimes B) \neq 1$

El caso restante está indeterminado completamente, es decir, puede recibir cualquiera de los tres valores sin riesgo de invalidar secuentes con prueba. Gráficamente, podemos representar esta situación del siguiente modo:

⊗	1	½	0
1	{1, ½}	½	½
½	{1, ½}	½	½
0	{1, ½, 0}	{½, 0}	{½, 0}

Es el turno entonces de pensar si podemos reducir estas múltiples tablas a una única, conservando la completitud de la semántica. Respecto de los casos que solo están parcialmente indeterminados, cualquier decisión que tomemos será inofensiva. Por el contrario, para la celda de abajo a la izquierda, si no nos quedamos con el valor 0, el secuente $B \Rightarrow A \otimes B$ carecería de contraejemplo, lo cual es un problema, dado que también carece de prueba. Si en cambio decidimos no quedarnos con el valor 1, sería el secuente $A \otimes B \Rightarrow A$ –que también carece de prueba- el que quedaría sin contraejemplo. Por supuesto, elegir el valor ½ sería la peor opción en este caso, dado que ambos secuentes indeseados resultarían válidos.

Por ende, es necesario conservar ambos tipos de valuaciones. Esto es, el único modo de ofrecer una semántica completa para ⊗ en este contexto es resignar que su valor este dado por una única función de verdad, y en cambio considerar una interpretación no determinista:

⊗	1	½	0
1	1	½	½
½	1	½	½
0	{1, 0}	0	0

Las semánticas no deterministas tienen diversas aplicaciones, como ofrecer interpretaciones bivalentes para lógicas que no lo son –como **K3** y **LP** (ver Rosenblatt (2015))- y son particularmente utilizadas en el campo de las lógicas formales de la inconsistencia –que veremos en el capítulo 12- donde sirven para proveer modelos de sistemas axiomáticos tan débiles que ni siquiera son caracterizables por matrices finitas (ver, por ejemplo, Avron y Lev (2005) o Carnielli y Coniglio (2016))[13].

Usando el mismo procedimiento que para Tonk, podemos considerar las restricciones que imponen las reglas de Funk:

$\nu(A) \leq ½$ o $\nu(B) \leq ½ \Rightarrow \nu(A \oplus B) \leq ½$

$\nu(A) \geq ½$ o $\nu(B) \geq ½ \Rightarrow \nu(A \oplus B) \geq ½$

Esto implica la siguiente n-tabla para ⊕:

[13] Y sirven, por ejemplo, como algoritmos de decisión para esos sistemas.

$\oplus$	1	½	0
1	{½, 1}	½	½
½	½	½	½
0	½	½	{½, 0}

Sin embargo, las reglas de Funk, a diferencia de las de Tonk, son *invertibles*:

Definición (*Regla Invertible*) Una regla es invertible si y sólo si su conversa es admisible.

Definición (*Regla Admisible*) Una regla es *admisible* en S si y sólo si para todas sus instancias, la conclusión puede probarse siempre y cuando puedan probarse las premisas.

Del hecho de que Γ, $A \otimes B \Rightarrow \Delta$ tenga una prueba no se sigue que Γ, $B \Rightarrow \Delta$ la vaya a tener; en particular, $A \otimes B \Rightarrow A \otimes B$ tiene prueba -porque es un axioma "a la fuerza"- pero $B \Rightarrow A \otimes B$ no la tiene. En cambio, en el caso de Funk podríamos tener el axioma de identidad sólo para variables proposicionales y probar por inducción que se cumple para las moleculares.

Volveremos sobre la cuestión de la admisibilidad en el capítulo 11, pero adelantamos que si queremos que la admisibilidad de una regla no se pierda en caso de ulteriores modificaciones del lenguaje, es necesario que tengamos en consideración las restricciones que imponen. Por ende, si sumamos las restricciones de las reglas invertidas, el resultado es la siguiente tabla perfectamente determinista:

$\oplus$	1	½	0
1	1	½	½
½	½	½	½
0	½	½	0

Funk tiene las condiciones de verdad de la conjunción, y las condiciones de falsedad de la disyunción. Esta tabla puede resultar quizás familiar: podemos encontrarla en Humberstone (2003) y en Blamey (1986) – quien llama a la conectiva *interjunción*. Para Humberstone, el interés de la interjunción es sobre todo tener una noción verosimilitud comparativa, para poder decir que, de dos teorías falsas, una es más verdadera que la otra. En ese sentido, "verdad parcial" debería entenderse básicamente como la idea sintáctica de tener una parte verdadera. Blamey, por el contrario, está pensando en la no-exhaustividad de los valores verdadero y falso, por ejemplo, para casos de falla de presuposición (aunque también paradojas y otros modos de indeterminación).

La identificación entre las tablas de verdad no es suficiente para identificar a las conectivas, dado que en ambos autores, la relación de consecuencia es la clásica preservación de 1. Esto es, por supuesto, crucial, dado que bajo esa relación de consecuencia, la tabla de Funk no valida las reglas. Sin embargo, si la verdad responde a una relación estricto-tolerante, quizás la verdad parcial también lo haga.

En cualquier caso, incluso si verdad parcial de hecho respeta una relación de consecuencia no transitiva, eso no es suficiente para establecer que la interjunción en ese contexto sea una conectiva vaga, es decir, anormal. Recordemos que la normalidad podía requerir propiedades adicionales no formales a la hora de considerar a un valor "análogo de la verdad". Verdad estricta es un concepto que tiene esas propiedades; sin embargo, no parece suceder lo mismo con verdad total: no es necesario que una oración tenga todas sus partes verdaderas para que sea correcto creerla/afirmarla, etc.

Todo esto parece indicar que la teoría de la verdad parcial, si bien estructuralmente similar, no es una lógica, con lo cual el concepto de normalidad no se aplicaría a ella. Sin embargo, esta no es la única interpretación posible de Funk, como veremos.

4 Completitud

4.1 Prueba por reducción

Vamos entonces a probar que S⊗ es completo respecto de la clase de modelos. La estrategia de la prueba la tomaremos de Ripley (2012), con una pequeña modificación para dar cuenta del carácter no determinista de la semántica.

La idea es que hay un procedimiento que ofrece, para cada secuente, o bien una prueba o bien una receta para construir un contramodelo. Este procedimiento –llamado reducción- funciona por etapas, determinada por las reglas de las conectivas del siguiente modo

- $\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta$ se reduce a $\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta, A$
- $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A$ se reduce a $\Gamma, A \Rightarrow \Delta, \neg A$
- $\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta$ se reduce a $\Gamma, B, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta$ y $\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta, A$
- $\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B$ se reduce a $\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B, A \rightarrow B$

- $A \otimes B$, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ se reduce a $A \otimes B$, B, $\Gamma \Rightarrow \Delta$
- $\Gamma \Rightarrow A \otimes B$, Δ se reduce a $\Gamma \Rightarrow A \otimes B$, A, Δ

Empezamos tomando el secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ y operando la reducción de todas sus fórmulas (el orden no importa, podemos seguir alguna enumeración si así lo deseamos). El resultado de esta etapa será un árbol con $\Gamma \Rightarrow \Delta$ como raíz. Procedemos entonces a la etapa siguiente, reduciendo los secuentes que han quedado en las hojas, teniendo en cuenta sólo las fórmulas que fueron generadas en la etapa anterior (esto es, no volvemos a considerar las que ya han sido reducidas).

Dado que la cantidad de fórmulas en $\Gamma \Rightarrow \Delta$ es finita, y que la reducción genera nuevas fórmula, pero de cada vez menor complejidad, el proceso eventualmente va a terminar en un árbol cuyas hojas o bien son axiomas –en cuyo caso decimos que están *cerradas*- o bien no lo son –en cuyo caso las llamamos *abiertas*. Si todas las hojas están cerradas, el árbol es una prueba de su raíz. Si queda alguna hoja abierta, entonces la valuación que asigna 1 a todas las variables proposicionales en el prosecuente y 0 a todas las del postsecuente de esa hoja es un contramodelo de $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

A modo de ilustración, consideremos el secuente sin prueba $\neg q \Rightarrow p \rightarrow q$. El resultado final de la reducción es el siguiente árbol, que sólo tiene una rama:

$$\dfrac{\dfrac{\neg q, p \Rightarrow p \rightarrow q, q}{\neg q \Rightarrow p \rightarrow q, q}}{\neg q \Rightarrow p \rightarrow q}$$

Cualquier valuación ν tal que $\nu(p)=1$ y $\nu(q)=0$ será un contramodelo de la raíz.

Nótese que cada paso en el proceso de reducción copia las fórmulas en del secuente reducido a las del nuevo que se genera. Esto no sería necesario si el sistema tuviera la propiedad de Eliminación de la Identidad. Pero como $S\otimes$ no la tiene, podría ser que el axioma necesario para una prueba no fuera un caso atómico de identidad (es decir, Γ, $p \Rightarrow p$, Δ) y si borramos las fórmulas complejas en el camino corremos el riesgo de "sobrereducir". Por ejemplo, supongamos que queremos determinar si $r \otimes (p \otimes q) \Rightarrow (p \otimes q) \otimes s$ tiene o no una prueba. De los dos árboles siguientes, el de la izquierda es el que resulta de no repetir las fórmulas de etapas anteriores y el de la derecha, de sí hacerlo

$$\begin{array}{ll}
\underline{q\Rightarrow p\qquad\qquad\qquad} & \\
\underline{q \Rightarrow p\otimes q\qquad\qquad} & \\
\underline{q\Rightarrow (p\otimes q)\otimes s\qquad} & \underline{p\otimes q\Rightarrow p\otimes q\qquad\qquad} \\
\underline{p\otimes q\Rightarrow (p\otimes q)\otimes s\quad} & \underline{p\otimes q\Rightarrow (p\otimes q)\otimes s\quad} \\
r\otimes(p\otimes q)\Rightarrow (p\otimes q)\otimes s & r\otimes(p\otimes q)\Rightarrow (p\otimes q)\otimes s
\end{array}$$

Como se ve, el secuente tiene de hecho una prueba, que perdemos de vista si no seguimos el proceso adecuado.

Volviendo a la completitud, el problema es, como señala Fjellstad, que para probar que ν es de hecho un contramodelo para todas las fórmulas de $\Gamma\Rightarrow\Delta$ (y no sólo de las atómicas), es necesario proceder por inducción sobre la complejidad. Pero la inducción en el caso de Tonk nos pide que la verdad estricta de *B* sea suficiente para la verdad estricta de $A\otimes B$, y que la falsedad estricta de *A* sea suficiente para la falsedad estricta de $A\otimes B$, lo cual es imposible en el caso en que *B* sea 1 y *A* sea 0.

Recordemos que esta es exactamente la situación que nos empujó a incorporar la indeterminación a la semántica. Es por ello que, aun cuando no vamos a tener la garantía de que la primera valuación que miremos sea el contramodelo buscado, sabemos que habrá otra que haga ese trabajo:

Teorema *(Completitud).* Para todo secuente $\Gamma\Rightarrow\Delta$, tiene un contramodelo o una prueba

Prueba. Si la reducción de $\Gamma\Rightarrow\Delta$ deja todas las ramas cerradas, entonces el árbol es una prueba de $\Gamma\Rightarrow\Delta$. Si hay una rama abierta, sea $\Gamma^*\Rightarrow\Delta^*$ la hoja de una de esas ramas. Probamos por inducción sobre la complejidad de las formulas en $\Gamma^*\Rightarrow\Delta^*$ que hay un contramodelo para $\Gamma^*\Rightarrow\Delta^*$. El caso base es trivial, simplemente tomamos una ν que asigne 1 a toda fórmula atómica de Γ^* y 0 a toda fórmula atómica de Δ^*. Dado que no hay átomos que se compartan entre los dos conjuntos, esa ν debe existir.

Para el paso inductivo, tomamos una ν que sea un contramodelo para todas las fórmulas en $\Gamma^*\Rightarrow\Delta^*$ de complejidad hasta $j \leq k$. Para toda fórmula en Γ^* de complejidad k con $\neg$ o $\rightarrow$ como conectiva principal, la prueba es directa. Sea entonces $A\otimes B$ una formula en Γ^* de complejidad k. Por el proceso de reducción, *B* esta en Γ^*, y dado que su complejidad es menor a k, $\nu(B) = 1$. Si $\nu(A) \geq ½$, entonces $\nu(A\otimes B) = 1$. Si en cambio $\nu(A) = 0$, $\nu(A\otimes B)$ podría ser 0. Pero si lo es, habrá un modelo ν^* que sea igual a ν respecto de todas las fórmulas de complejidad menor a k, dado que la indeterminación permite que cambiemos el valor de $A\otimes B$ sin necesidad de cambiar el de ninguna fórmula de complejidad menor. En ese caso, v' es un contramodelo de todas las fórmulas de complejidad hasta *k*.

Para el caso de fórmulas en Δ^*, el razonamiento es análogo al de Γ^*. Y dado que $\Gamma\Rightarrow\Delta$ está incluido en $\Gamma^*\Rightarrow\Delta^*$, un contramodelo del segundo también lo será del primero. □

Si la completitud es suficiente para garantizar el significado, entonces un sistema que sólo carezca de transitividad debería ser preferido a uno que además no sea reflexivo. Además, en el caso de $S\otimes$ el sistema mismo de base está independientemente motivado, dada la posibilidad de solucionar todas las demás paradojas mediante el abandono de Corte.

Probar que la interpretación de Funk también hace completas a las reglas puede hacerse siguiendo la misma estrategia de reducción, y es incluso más sencillo dado que ya no está la necesidad de ajustar el contramodelo para dar lugar a la indeterminación. La verdad estricta de *A* y *B* es de hecho suficiente para la de $A\oplus B$, y lo mismo sucede con su falsedad.

4.2 ¿Es suficiente la completitud?

Tanto $\otimes$ como $\oplus$ producen extensiones conservativas, pero solamente $\oplus$ está únicamente determinada, en el caso de $\otimes$ sólo tenemos la completitud como límite superior de la significatividad. Desde el punto de vista semántico, esto se manifiesta en el no determinismo: otro símbolo con análogas reglas a la derecha y a la izquierda, aun cuando imponga las mismas condiciones sobre las valuaciones, no tiene por qué co-variar en el caso indeterminado -a menos que explícitamente impongamos esa restricción.

Por un lado, Belnap mismo aclara que Unicidad no es tan esencial como Conservatividad, pero por el otro, es sin dudas necesario que haya *algún* límite a la indeterminación compatible con la significatividad. El mayor permisivismo sería sólo pedir que la conectiva imponga al menos alguna limitación sobre la clase de valuaciones.

La mayor objeción a una posición como esta es, según creo, la que plantea Hacking (1979) -el texto que mencionábamos al principio de este capítulo- en relación a la creatividad de las definiciones. Allí, Hacking pide que un sistema aceptable permita probar no sólo con un teorema de eliminación de Corte, sino también de eliminación de Monotonía y de Identidad. Estos dos últimos teoremas reciben su nombre en analogía con el primero, pero son en verdad propiedades distintas. Al igual que veíamos con la eliminación de la Identidad, lo que demuestra un teorema de eliminación de la Monotonía no es que la regla pueda quitarse del sistema sin alterar los secuentes que tengan prueba, sino que se pueda restringir su aplicación a casos cuyas fórmulas activas sean atómicas. La validez de Monotonía e Identidad para formulas moleculares debería entonces poder ser derivada.

El problema de no tener estos teoremas, según Hacking, tiene que ver con cómo entender a las reglas como definiciones de las conectivas. La idea es que si partimos de un lenguaje sin $\otimes$ y luego lo incorporamos, tenemos también que agregar nuevas instancias de Reflexividad, si queremos que siga valiendo de modo irrestricto:

> ¿Qué tiene de malo tan solo agregar las reglas operacionales, y establecer las reglas estructurales para formulas arbitrarias que puedan involucrar a las conectivas lógicas? Nada, excepto el hecho de que en ese caso no estaríamos definiendo a las constantes lógicas en conexión con un fragmento previo del lenguaje (...). Cuando agregamos sólo reglas conservativas operacionales, por otro lado, nunca agregamos postulados estructurales. Hacking (1979), página 298

Este problema, sin embargo, se evita si ya tenemos un lenguaje completo desde el principio, y en lugar de enriquecerlo aumento su vocabulario, lo que hacemos es agregar interpretaciones en forma de reglas. Esto no es meramente un parche *ad hoc*, dado que de hecho el contexto no puede fijarse estipulando las reglas estructurales sólo para fórmulas atómicas. La razón es que esto implicaría que son las reglas admisibles las que caracterizan al contexto. Pero como Ripley (2018) señala, la preservación de reglas meramente admisibles no es una expectativa razonable. Volveremos sobre esta cuestión en detalle en el capítulo 10.

5 Monotonía

Algo que ocurre cuando consideramos Funk en lugar de Tonk, además del hecho de que ganamos Unicidad, es que perdemos algo de la fuerza original. Así como está la distinción aditivo/multiplicativo para reglas de una premisa, existe la correspondiente distinción entre reglas con contexto compartido y no-compartido o independiente para reglas de más premisas.

Las reglas multiplicativas se agrupan con las de contexto no-compartido, y las aditivas se agrupan con las de contexto compartido puesto que se "aparean bien", en el sentido de que usando las reglas de un mismo grupo puede probarse una versión local de la eliminación de la identidad. Si se toma una de un grupo y otra del otro, sólo se podrá probar apelando a Contracción y Monotonía. Ambos fenómenos están ilustrados en las siguientes derivaciones para el caso de la conjunción, a la izquierda un par que funciona bien, y a la derecha uno que no tanto:

$$\dfrac{\dfrac{p\Rightarrow p \qquad q\Rightarrow q}{p, q \Rightarrow p\wedge q}\ (\wedge\mathrm{D}\times)}{p\wedge q\Rightarrow p\wedge q}\ (\wedge\mathrm{I}\times)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p\Rightarrow p \qquad q\Rightarrow q}{p, q \Rightarrow p\wedge q}\ (\wedge\mathrm{D}\times)}{p\wedge q, q \Rightarrow p\wedge q}\ (\wedge\mathrm{I})}{p\wedge q, q, p \Rightarrow p\wedge q}\ (\mathrm{MonI})}{p\wedge q, p\wedge q \Rightarrow p\wedge q}\ (\wedge\mathrm{I})}{p\wedge q\Rightarrow p\wedge q}\ (\mathrm{ConI})$$

La regla de Corte es una regla de dos premisas, y la que hemos estado usando es la de contextos independientes. Sin embargo, también puede formularse con contexto compartido:

$$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{Corte}+)$$

Y aquí es cuando cobra importancia la regla de Monotonía, que parecía no jugar ningún rol. Una vez que el sistema no es monótono -como veíamos en el capítulo anterior que sucedía con las reglas multiplicativas y aditivas- las reglas con contexto compartido y no-compartido dejan de ser interderivables. En particular, un sistema no-monótono con Tonk puede admitir la presencia de (Corte+) sin volverse trivial:

Contexto no compartido

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A\Rightarrow A\otimes B} \qquad \dfrac{B \Rightarrow B}{A\otimes B\Rightarrow B}}{A \Rightarrow B}$$

Contexto compartido

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A\Rightarrow A\otimes B} \qquad \dfrac{B \Rightarrow B}{A\otimes B\Rightarrow B}}{A \Rightarrow A\otimes B, B \qquad A, A\otimes B\Rightarrow B}\ (\mathrm{Mon})}{A \Rightarrow B}$$

Funk, por su parte, requiere de Monotonía para ser trivial incluso si el sistema cuenta con la versión más fuerte de Corte:

Contexto no compartido

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A, B}}{A \Rightarrow A \oplus B} \qquad \dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow B}\ (\mathrm{Mon})}{A \oplus B \Rightarrow B}}{A \Rightarrow B}$$

Contexto compartido

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A, B}}{A \Rightarrow A \oplus B}}{A \Rightarrow A \oplus B, B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow B}\ (\mathrm{Mon})}{A \oplus B \Rightarrow B}}{A, A \oplus B \Rightarrow B}\ (\mathrm{Mon})}{A \Rightarrow B}$$

Para completar la familia, podemos también preguntarnos qué sucede con la versión aditiva de Funk –esto es, con dos reglas para cada lado:

$$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \oplus_{+} B \Rightarrow \Delta}\ (\oplus_{+}\mathrm{I}) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \oplus_{+} B}\ (\oplus_{+}\mathrm{D})$$

$$\dfrac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \oplus_{+} B \Rightarrow \Delta}\ (\oplus_{+}\mathrm{I}) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \oplus_{+} B}\ (\oplus_{+}\mathrm{D})$$

Esta conectiva se comporta como Tonk, en el sentido de que produce trivialidad con Corte pero no con su versión de contexto compartido, pero al igual que Funk, está definida de modo único, siendo entonces la más fuerte de esta familia. De hecho, tener las dos reglas o bien a la izquierda o bien a la derecha es suficiente para esto, no hace falta tener el set completo de cuatro reglas.

Dado entonces que hay dos contextos compatibles con Tonk y con Funk, vale la pena preguntarse si uno es preferible por sobre el otro. Considero que sí hay algunos motivos –aunque de no demasiado peso- para preferir la ruta no transitiva.

En primer lugar, como hemos dicho, abandonar Corte es que permite la incorporación de *todas* las conectivas de la familia de Tonk, mientras que abandonar Monotonía requiere que además abandonemos Corte. Sin embargo, un teórico relevante podría argüir que la versión con contexto no compartido de Corte es de hecho inaceptable por el hecho de incorporar dentro sí algo de Monotonía.

En segundo lugar, los modelos de la lógica relevante son mucho más complejos que las valuaciones trivalentes. In particular, los cálculos de secuentes tienen modelos muy intrincados, mientras que estructuras de *frame* más sencillas sólo pueden ser caracterizadas por cálculos de Hilbert. Esto hace a la tarea de encontrar una semántica completa una tarea mucho más engorrosa. Esta razón no es realmente muy profunda, aunque a igualdad de condiciones, la simplicidad debe ser una variable considerable a la hora de elegir una lógica.

6 Vaguedad

6.1 Anormalidad y Funk

Tanto Funk como Tonk son conectivas vagas: en ambos casos, por ejemplo, cuando reciben el input ⟨1;0⟩ dan como resultado ½. Dado que ni el no-determinismo ni la no-conmutatividad de Tonk tienen nada que ver con su anormalidad, vamos a concentrarnos en Funk en su lugar.

En primer lugar, vale la pena quizás recordar la distinción entre anormalidad intrínseca –propia de una conectiva tomada aisladamente- y relacional –observable en una conectiva en tanto traducción de una operación clásica. Cuando decimos que Tonk y Funk son anormales, lo decimos en el primero de estos sentidos y no en el segundo, dado que en ambos casos las estamos considerando como conectivas *sui generis*, y no como interpretaciones no-clásicas de conectivas clásicas.

En segundo lugar, veamos cómo sería la representación predicativa de Funk. Por un lado, recordemos que teníamos al conjunto $\tau_\nu(\Psi)$, que era el subconjunto de oraciones de Ψ que eran verdaderas en ν. En el contexto de la semántica estricto-tolerante, una oración $A\in\Psi$ que recibe valor 1en ν pertenece a $\tau_\nu(\Psi)$ en grado 1, si recibe valor ½ pertenece en grado ½, y si recibe valor 0 no pertenece en absoluto. La representación de Funk como un predicado vago de cantidad sería entonces:

$$\nu(funk(\ulcorner A\urcorner,\ulcorner B\urcorner)) = \begin{cases} 1 \text{ si } count_\Sigma(\tau_\nu\{A,B\})=2 \\ 0 \text{ si } count_\Sigma(\tau_\nu\{A,B\})=0 \\ ½ \text{ en otro caso} \end{cases}$$

De modo intuitivo, Funk dice algo así como que aproximadamente dos de sus argumentos son estrictamente verdaderos: resulta estrictamente verdadera cuando ambos lo son, tolerantemente verdadera cuando uno solo lo es, o cuando alguno es sólo tolerantemente verdadero, y falsa cuando ninguno lo es.

En tercer lugar, consideremos la paradoja de Sorites para conectivas que veíamos en la parte I. Como decíamos, a menor aridad del operador, menos atractiva será la paradoja, en el sentido de ser más difícil de identificar dónde está el punto de quiebre. Sin embargo, en este caso hay también un sentido en el que se vuelve más fuerte, puesto que no es necesario el principio de tolerancia. Si recordamos, la derivación de trivialidad en la versión sin el condicional partía de los secuentes

$$A_1,\ldots,A_k \Rightarrow \odot\Psi \qquad\qquad \odot\Psi \Rightarrow B_1,\ldots,B_j$$

que en el caso de Funk serían

$$A \Rightarrow A\oplus B \qquad\qquad A\oplus B \Rightarrow B$$

Con lo cual no hace falta descartar ninguna premisa en el secuente de la izquierda ni ninguna conclusión en el de la derecha para legar a la trivialidad.

En cuarto lugar, es curioso que en Funk se encuentran, por un lado, nuestra propuesta de la vaguedad como anormalidad y por el otro, la propuesta conflacionaria del capítulo 2. Por un lado, porque Funk es exactamente la conflación entre $\wedge$ y $\vee$, y pero también porque si tenemos dos oraciones A y B de un lenguaje preciso que se encuentran conflacionadas, $A\otimes B$ arroja exactamente el valor de su contraparte en el lenguaje difuso.

Podríamos preguntarnos si toda conectiva que resulte de una conflación recibirá una interpretación anormal. La respuesta a esto es negativa. Por ejemplo, veamos el caso de la siguiente conectiva –que llamaremos Monk- que es la dual de Funk, y está definida por las reglas de la conjunción a la derecha y las de la disyunción a la izquierda:

$$\frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A\circledcirc B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\circledcirc L) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A\circledcirc B, \Delta}\ (\circledcirc R)$$

A diferencia de su pariente, Monk sí es conservativa, aunque tampoco es única. Sus interpretaciones clásicas, incluyen la tabla de la conjunción, la de la disyunción y dos intermedias más:

⊚	1	0
1	1	0
0	0	0

⊚	1	0
1	1	1
0	1	0

⊚	1	0
1	1	0
0	1	0

⊚	1	0
1	1	1
0	0	0

El hecho de que haya conectivas conflacionadas que no son anormales nos presenta una versión técnica de la objeción que planteaba en el capítulo 1. Si la conflación no es suficiente para la vaguedad, necesitamos algo más para entender qué es lo que le aporta a nuestra comprensión del fenómeno.

Respecto de las reglas inversas, ellas sí no pueden agregarse a un sistema estructural, como se puede observar en la siguiente demostración:

$\underline{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B} \qquad\qquad \underline{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}$

$\underline{A \odot B \Rightarrow A, B \qquad\qquad\qquad A, B \Rightarrow A \odot B\quad}$

$\underline{A \odot B \Rightarrow A \odot B}$

$\underline{A \Rightarrow A \odot B}$

$A \Rightarrow B$

En **ST**, por el contrario, las inversas son admisibles. Esto sin embargo no alcanza para fijar una única interpretación, hay también muchas tablas para Monk, algunas de ellas anormales, e incluso una de ellas es exactamente la misma que la de Funk:

⊙	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	0
0	1	0	0

⊙	1	½	0
1	1	½	½
½	½	½	½
0	½	½	0

Podemos decir que sus reglas ambiguamente refieren a diversas conectivas, algunas de ellas normales y otras no. Es cierto que serán todas equivalentes entre sí, lo cual es un caso de la situación de no-clausura bajo equivalencia que veíamos en el capítulo 4.

En segundo lugar, la anormalidad por sí sola no puede generar una falla de transitividad, dado que en cualquier lógica tarskiana, ninguna conectiva definida mediante tablas de verdad puede invalidar a Corte. A los sumo, si la lógica ya hacía localmente inválida a Corte, lo que puede suceder es que si era admisible, deje de serlo. Cabe entonces preguntarse si alcanza con que una conectiva sea anormal para que sea vaga, o es además necesario que genere una falla de transitividad.

Si respondiéramos afirmativamente a esta pregunta, todo argumento en favor de **ST** como la mejor alternativa para lidiar con conectivas vagas se volvería casi circular, en tanto ninguna lógica estructural podría siquiera definirlas. Con lo cual, la anormalidad debe ser suficiente, de modo que podamos identificar a las conectivas vagas a través de distintas lógicas, y podamos elegir entre ellas a la que les dé el mejor tratamiento.

Dicho esto, la transitividad debe fallar en algún nivel, para que se produzca la paradoja de Sorites. Si no le atribuimos la responsabilidad de esto a la interacción entre la conectiva vaga y la relación de consecuencia lógica –como hace **ST**- deberemos responsabilizar al condicional, que parece no tener la culpa de nada.

6.2 Cuantificadores

Hemos inspirado nuestra construcción de las conectivas vagas en la existencia de cuantificadores que lo son. Dada la estrecha relación que existe, por ejemplo, entre $\forall$ y $\wedge$, y entre $\exists$ y $\vee$, no sería descabellado pensar que existe un vínculo entre cuantificadores vagos y sus correspondientes conectivas.

Esta correspondencia es sin dudas parte del folklore lógico. A la cita de Peirce que veíamos en el capítulo 3 podemos agregar por ejemplo:

> Es de hecho bastante habitual para los matemáticos y lógicos tomar las conjunciones y disyunciones, tanto finitas como infinitas, como básicas, y definir los cuantificadores como abreviaciones. Todd (1965), página 289.

> "En cierto sentido, los cuantificadores pueden ser considerados como abreviaturas de fórmulas cuyos únicos símbolos lógicos sean conectores. Esto se advierte con toda claridad cuando el dominio o universo de discurso de que se trate en nuestro lenguaje sea finito. Supóngase, por ejemplo, [un universo de tres objetos] (…) la expresión "$\Lambda x P x$" equivale a la expresión "$Pa_1 \wedge Pa_2 \wedge Pa_3$" (…) Pero cuando el universo de discurso es infinito (…) la lógica de predicados se torna radicalmente distinta de la de enunciados" Garrido (1978), páginas 160-161

Algo semejante se dice acerca del predicado de verdad, en su función lógico-lingüística; la idea de Quine (1970) es que usamos $\forall$ para expresar muchas oraciones, cuando ellas poseen la misma forma –como por ejemplo "Tom es mortal", "Juan es mortal", etc- y empleamos el predicado de verdad cuando la relación sintáctica entre ellas es "oblicua" - como por ejemplo *Todos los teoremas de la aritmética son verdaderos* (ver por ejemplo Picollo & Schindler (2017) para una discusión de la relación entre el predicado de verdad y conjunciones y disyunciones infinitas).

Sin embargo, esta idea tan canónica de los cuantificadores como correlato infinitario de operaciones proposicionales no es tan sencilla de articular. Incluso en el nivel finito, cuando se dice que ambas expresiones equivalen, sin dudas no puede tratarse de implicación mutua -o tautologicidad del bicondicional- ya que $\forall x Px$ implica $Pa_1 \wedge Pa_2 \wedge Pa_3$, pero no a la inversa, dado que no todos los modelos finitos tienen tres elementos.

Lo que sí es cierto es que, dada cualquier oración cuantificada que sea interpretada en una clase de modelos de cardinalidad finita, es posible reemplazarla por una oración sin el cuantificador –o bien una conjunción o bien una disyunción iterada. El interés de un proceso de reducción parcial de este tipo radica no tanto en la posibilidad de definir el cuantificador en cuestión, sino con la de eliminarlo del lenguaje de teorías con dominios finitos.

No obstante, claramente no toda teoría posee sólo modelos de cardinalidad finita, y de hecho esto es imposible para teorías formuladas en primer orden. Es por ello que muchas veces se habla de que $\forall$ y $\exists$ son equivalentes a conjunciones y disyunciones infinitarias. Sin embargo, esto sólo puede ser cierto para cuantificadores sustitucionales, como ya veíamos en el capítulo 3 que advertía Peirce. Por ejemplo, si el dominio de un modelo es infinito pero no numerable, puede ocurrir que una afirmación $\forall x A$, donde $\forall$ es interpretado objetualmente, resulte falsa a causa de un objeto carente de nombre que no satisfaga A. En ese caso, la conjunción infinitaria correspondiente $\bigwedge A(a)$ va a ser verdadera, a menos que nuestro lenguaje contenga no sólo fórmulas contablemente infinitas, sino de cardinalidad arbitraria, sumado a un conjunto de nombres de cardinalidad arbitraria también.

Otra opción es decir que la semántica de $\wedge$ es igual a la de $\forall$, puesto que ambos son interpretados por la función de verdad *min* (y lo mismo sucede con $\exists$ y $\vee$ y la función *max*):

$$\nu(A \wedge B) = min(\{\nu(A), \nu(B)\})$$

$$\nu_g(\forall x A) = min(\{\nu_{g'[a/x]}(A)\})$$

Sin embargo, no es obvia la manera en que deberíamos deducir la interpretación correspondiente al universal a partir de la conjunción, al menos si estamos en el contexto de una lógica multivaluada. En el caso de la lógica difusa *min* podría ni siquiera estar bien definido, ya que podríamos tener conjuntos parcialmente ordenados de valores, o conjuntos infinitos, sin que haya ninguno que sea el menor. La respuesta estándar a este problema es usar la generalización *inf* para interpretar a $\forall$.

Sin embargo, existen lógicas difusas con conjunciones interpretadas por otras funciones que no son *min,* basadas en distintas t-normas y sus t-conormas correspondientes:

Definición (*T-Norma*) Una T-norma es una operación que satisface las siguientes condiciones

- Asociatividad
- Conmutatividad
- Monotonía: si $a \leq b$ entonces $\tau(a,c) \leq \tau(b,c)$.
- Neutralidad respecto de 1: $\tau(a,1)=a$

Lo curioso es que las versiones de primer orden de estas distintas lógicas comparten todas la misma interpretación *inf* de los cuantificadores. Thiele (1994) desarrolla un método para obtener el cuantificador correspondiente a una t-norma:

Definición (*T-Cuantificador*) Un cuantificador generalizado es un T-cuantificador si y sólo si:

- Neutralidad: Si $F(y)=1$ para todo $y \neq x$, entonces $\underline{\forall}(F)=x$
- Absorción: Si $F(x)=0$ para algún x, entonces $\underline{\forall}(F)=0$
- Monotonía: Si $F(x) \leq G(x)$ para todo x, entonces $\underline{\forall}(F) \leq \underline{\forall}(G)$
- Conmutatividad y Asociatividad: Si Π es una biyección en el dominio, $\underline{\forall}(\Pi F)=\underline{\forall}(F)$

Sin embargo, estos desarrollos no pueden servirnos, dado que los cuantificadores vagos sin dudas no son T-Cuantificadores. Lo que haremos entonces será adoptar la vía más sencilla, que es la de la teoría de la prueba. Dado que Funk es caracterizada por la regla de la disyunción a la derecha y la de la conjunción a la izquierda, nos valdremos de la equivalencia con los cuantificadores tradicionales para definir el cuantificador correspondiente:

$$\frac{\Gamma, At \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \tilde{\forall} x Ax \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, At}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \tilde{\forall} x Ax}$$

En primer lugar, notemos que, al igual que Funk, $\tilde{\forall}$ también genera trivialidad en sistemas transitivos:

$$\dfrac{\dfrac{Bb \Rightarrow Bb}{\tilde{\forall} x Ax \Rightarrow Bb} \qquad \dfrac{Aa \Rightarrow Aa}{Aa \Rightarrow \tilde{\forall} x Ax}}{Aa \Rightarrow Bb}$$

En segundo lugar, notemos que es de hecho un cuantificador vago, en el sentido del capítulo 2. Por supuesto, dado que es trivial en contextos transitivos, no tendrá una interpretación semántica en términos de valuaciones de Łukasiewicz o Kleene, ni ninguna otra que caracterice una lógica estructural. Sí se puede, desde luego, interpretarlo con modelos de **ST**. La primera regla establece que si alguna instancia es al menos tolerantemente falsa, la oración cuantificada debe serlo, y la segunda establece que si alguna instancia es al menos tolerantemente verdadera, la oración cuantificada debe serlo. Esto nos obliga a que $\not\forall xA$ valga ½ cuando hay instancias de los dos tipos.

Al igual que Funk, las reglas de $\not\forall$ son invertibles, lo cual implica, para la primera regla, que si todas las instancias son estrictamente verdaderas, la oración cuantificada también lo será, y que será falsa si son todas estrictamente falsas. En síntesis:

$\nu(\not\forall xA)=1$ si $\nu(A[c/x])=1$ para todo c

0 si $\nu(A[c/x])=0$ para todo c

½ en el resto de los casos

En su representación predicativa, el cuantificador es entonces la siguiente propiedad numérica difusa de segundo nivel:

$\underline{\not\forall}\Psi =$ 1 si $count_{\Sigma}(\Psi)=card(\mathrm{D})$

0 $count_{\Sigma}(\Psi)=\varnothing$

½ en otro caso

7 Conclusión

Hemos visto a lo largo de esta segunda parte que uno de los ejemplos clásicos de conectiva inaceptable por un lado, deja de ser tal si la consideramos en un contexto no-transitivo, y por el otro, es un ejemplo de conectiva lógica vaga, si adoptamos la caracterización de la vaguedad como anormalidad.

Esto no significa que **ST** sea la única teoría capaz de lidiar con este fenómeno, en el sentido de que cualquier teoría no bivalente puede definir conectivas no-normales. Sin embargo, al igual que sucede con los predicados, esas conectivas no serán tolerantes. Es esto lo que, sobre todas las cosas, posiciona a una teoría no transitiva como la mejor alternativa de la que disponemos.

En esta tesis no he argumentado –ni argumentaré- en contra ni a favor del inferencialismo. Sin embargo, me he valido en gran medida de herramientas modelo-teóricas. En particular, he caracterizado a las conectivas vagas como aquellas que son anormales, lo cual es una característica valuacional. No sólo eso, sino que de hecho no existe, al menos hasta el momento, una caracterización de este concepto en términos de teoría de la prueba. Esto ubica, aunque sea de manera momentánea, a los modelos en situación de ventaja respecto de los sistemas inferenciales.

En la próxima sección, veremos una presunta objeción que se dirige contra esta clase de enfoques. Esto nos dará el puntapié para analizar cómo debemos caracterizar a las lógicas como las que estamos usando para manejar conectivas vagas, en las cuales la acción sucede a nivel metainferencial.

PARTE III

Metavalidez

- Capítulo 9 -

Knot

1 Introducción

Hasta ahora, hemos presentado dos vías por las cuales un inferencialista puede sortear el desafío de Tonk. La primera consiste en sofisticar las condiciones de significatividad de las conectivas, mediante la imposición de requisitos que restringen qué tipo de reglas pueden definirlas. Desde este punto de vista, el inferencialismo es una teoría que se ve amenazada por la presencia de Tonk, y que tiene en el concepto de Armonía un arma para dar batalla.

Por el otro lado, presentamos la alternativa permisivista, que consiste en abandonar la regla de Corte. El inferencialista no-transitivo tiene la ventaja de que no necesita ningún arma en particular, puesto que Tonk no le representa un peligro. Esto, por un lado, es más sencillo que formular condiciones de Armonía, y además tiene la ventaja adicional de que permite resolver una miríada de otras paradojas, apelando siempre al mismo recurso.

Esto indica que el inferencialismo, si bien se ha visto sacudido por la aparición de Tonk, ha podido recuperarse y no corrió la suerte de otras corrientes filosóficas menos afortunadas, como el logicismo fregeano, o el positivismo lógico. No obstante, apelar a modelos nos permite, no sólo quedar a resguardo de posibles conectivas trivializadoras, sino distinguir entre aquellas que son vagas y aquellas que no lo son.

Recientemente, Button (2016) presentó lo que llama un "Tonk para el semanticista", llamado *Knot*. Esta conectiva sería problemática, en tanto provocaría que los sistemas en los que se introduce perdieran metainferencias que eran de otro modo válidas. De existir tal cosa, parecería que mi posición es vulnerable a ella, y que debo entonces ofrecer algún tipo de respuesta, ya sea en términos de condiciones impuestas sobre las valuaciones aceptables –al modo de la Armonía- o bien con una respuesta permisivista del estilo de Ripley

(2015a). En los siguientes capítulos veremos cómo en realidad esta supuesta amenaza no es más que un pseudo-problema, originado en una mala comprensión de la noción metateórica de validez.

En la siguiente sección voy a presentar a Knot, y al argumento de Button de por qué resulta problemática. En la sección 3 ofreceré un cálculo de secuentes que resulta completo y correcto para esa conectiva. Esto implica que, si se trata de un problema genuino, es un problema tanto para el semanticista como para el inferencialista. Sin embargo, dada la concepción de metainferencia que prevalece en teoría de la prueba, la incorporación de Knot no altera el sistema. Por ende, tampoco debe ser un problema para un enfoque modelo teórico.

2 El Tonk del semanticista

Primero que nada, Button presenta una clase de valuaciones tetravaluadas –que llamaremos K-valuaciones- para un lenguaje proposicional –al que llamaremos $\mathcal{L}_{\propto}$– que respetan las mismas tablas que **FDE**, con la excepción de la negación, que tiene un comportamiento de flip-flop también entre los valores no-clásicos, en lugar de dejarlos constantes:

	$\neg$
1	0
⅔	⅓
⅓	⅔
0	1

El otro aspecto que distingue a esta lógica de **FDE** es que la relación de consecuencia se define aquí como preservación del valor 1, en lugar de tomar también a ⅔ como designado.

Algo interesante de esta lógica–como nota Button- es el hecho de que valida todos y sólo los argumentos clásicamente válidos, lo cual le da un aire *prima facie* legítimo. Pero el horror se desata cuando nos atrevemos a definir la siguiente conectiva, bautizada *Knot*:

	$\propto$
1	1
⅔	⅓
⅓	⅔
0	0

Por supuesto, agregar una conectiva caracterizada de modo veritativo funcional no puede resultar en una extensión no conservativa de la teoría de base. Sin embargo, Button argumenta que puede igualmente tener malas consecuencias, dado que, por ejemplo en este caso, provoca la pérdida de las siguientes propiedades:

- Sustitutividad de equivalentes: $p \dashv\vDash \propto p$ y $\vDash p \rightarrow p$ pero $\nvDash p \rightarrow \propto p$.
- ($\rightarrow$D): $p \vDash \propto p$ pero $\nvDash p \rightarrow \propto p$
- ($\vee$I): $p \vDash p \rightarrow \propto p$ y $\neg p \vDash p \rightarrow \propto p$ pero $p \vee \neg p \nvDash p \rightarrow \propto p$
- ($\neg$D): $\neg(p \rightarrow \propto p) \vDash \bot$ pero $\nvDash \neg\neg(p \rightarrow \propto p)$

En primer lugar debemos clarificar cuál es exactamente el problema aquí, dado que se aleja del desafío tradicional de Tonk en varios aspectos. Por un lado, la conservatividad es una relación entre teorías, y ellas pueden ser presentadas de muchas formas. Si trabajamos, por ejemplo, con un sistema axiomático S en un lenguaje $\mathcal{L}_S$, una extensión S* será conservativa si no prueba más $\mathcal{L}_S$-fórmulas que S mismo, es decir, si conserva las $\mathcal{L}_S$-fórmulas sin prueba. Si S es en cambio un cálculo de secuentes, entonces S* debería tener por lo menos los mismos secuentes inválidos compuestos de $\mathcal{L}_S$-fórmulas. Y aunque no haya muchos cálculos diseñados específicamente para metainferencias, podríamos querer conservarlas también. Y así sucesivamente.

Por el otro lado, trabajar en un cálculo de secuentes establece un límite no sólo en aquello que el nuevo vocabulario puede contribuir en relación a las oraciones que la teoría acepta, sino también a las que rechaza. En otras palabras, la teoría resultante no debería negar más $\mathcal{L}_S$-fórmulas que las que niega S. Esto es importante si adherimos a algún tipo de bilateralismo respecto de oraciones. Y nuevamente, este desiderátum puede ser iterado si también sostenemos un bilateralismo respecto de inferencias, metainferencias, etc.

El problema que queremos discutir apunta precisamente a esta última esquina, es decir, a la necesidad de que el nuevo vocabulario lógico con que enriquecemos una teoría respete la validez de metainferencias. Para poder distinguir esta cuestión del concepto tradicional de conservatividad, llamaremos a esta propiedad *preservatividad:*

Definición (*Extensión Preservativa*) Dado un conjunto de símbolos Σ, una teoría S en un lenguaje $\mathcal{L}_S$ y su extension S* en un lenguaje $\mathcal{L}_S \cup \Sigma$, decimos que S* es una extensión preservativa de S si y sólo si toda metainferencia-tipo que puede ser caracterizada por $\mathcal{L}_S$ y que vale en S, también vale en S*.

Se trata de algo así como la conversa de la relación de conservatividad: en lugar de pedirle a la teoría que no pruebe de más, le pedimos que no pruebe de menos. A primera vista, esto puede parecer extraño, dado que una extensión de una teoría no puede quitar lo que ya estaba allí. Sin embargo, como veremos, esto depende de una manera particular de entender, primero, lo que es una metainferencia, y segundo, lo que significa esa expresión vaga "valer en S".

Podemos reformular entonces el problema de Knot para el semanticista diciendo que produce una extensión no preservativa cuando es presentada en términos valuacionales. Y a diferencia de Tonk, carece de un correlato inferencial:

> Así como los semanticistas no se ven afectados por Tonk, tampoco los inferencialistas se ven afectados por Knot. Para ver por qué, nótese que si Knot fuese de algún modo agregado al lenguaje, debería causar la pérdida de otras reglas de inferencia. (…) Sin embargo, el inferencialista estipuló que esas reglas deben valer siempre y sin excepción (…). Podría incluso decir que las condiciones semánticas para Knot no logran definir una conectiva significativa sobre la base de que no se puede caracterizar mediante reglas de deducción natural, dado el significado (inferencialistamente especificado) de las otras conectivas. Button (2016), página 11

Mostraré primero que Knot puede de hecho recibir un significado especificado en términos de teoría de la prueba. Por ende, si resulta ser maligno, será maligno para todos, no sólo para el semanticista. Pero, voy a argumentar a lo largo de los siguientes capítulos, Knot no es de hecho maligno para nadie.

3 Cálculo de secuentes para Knot

La manera más sencilla de darle a Knot una interpretación en términos de reglas de inferencia es generalizar los secuentes tradicionales de modo de poder contemplar su comportamiento particular. Motivado por la necesidad de encontrar un sistema de secuentes para las lógicas finitamente valuadas de Łukasiewicz, Rousseau en (1967) tiene la idea de que si la lógica bivalente es representada por secuentes que tienen dos partes, las lógicas n-valuadas deben poder representarse mediante secuentes de n-lados. En Paoli (2002), por ejemplo, podemos encontrar cálculos de n-lados para cada lógica de Łukasiewicz n-valuada.

Si recordamos la lectura disyuntiva que veíamos en la parte II de esta tesis, un secuente normal afirma que alguna de las fórmulas del prosecuente es falsa, o alguna de las del postsecuente es verdadera. Por ende, un secuente de n-lados afirmará que alguna fórmula de cada posición recibe cada valor.

Un secuente de S$\propto$ va a ser una expresión $\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4$ del metalenguaje, donde cada Γ_i es un conjunto finito de oraciones. La lectura pretendida es que al menos alguna de las fórmulas en el primero conjunto vale 0, o alguna de las del segundo vale ⅓, o alguna de las del tercero vale ⅔, o alguna de las del cuarto vale 1. Voy a presentar reglas sólo para la disyunción y la negación, dado que el condicional y la conjunción pueden definirse del modo usual, como ilustran las siguientes tablas:

$\neg A \vee \neg B$	0	⅓	⅔	1
0	0	⅓	⅔	1
⅓	⅓	⅓	1	1
⅔	⅔	1	⅔	1
1	1	1	1	1

$\neg A \vee B$	1	⅔	⅓	0
0	1	⅔	⅓	0
⅓	1	1	⅓	⅓
⅔	1	⅔	1	⅔
1	1	1	1	1

Este es entonces nuestro sistema S$\propto$:

Identidad

$\Gamma_1, A|\Gamma_2, A|\Gamma_3, A|\Gamma_4, A$

Reglas de monotonía

$$\frac{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4}{\Gamma_1, A|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4} \qquad \frac{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4}{\Gamma_1|\Gamma_2, A|\Gamma_3|\Gamma_4} \qquad \frac{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4}{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3, A|\Gamma_4} \qquad \frac{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4}{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4, A}$$

Reglas de Corte

$$\frac{\Gamma_1, A|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4 \qquad \Gamma_1|\Gamma_2, A|\Gamma_3|\Gamma_4}{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4} \qquad \frac{\Gamma_1, A|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4, \qquad \Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3, A|\Gamma_4}{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4}$$

$$\frac{\Gamma_1, A|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4 \qquad \Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4, A}{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4}$$

$$\frac{\Gamma_1|\Gamma_2, A|\Gamma_3|\Gamma_4, \qquad \Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3, A|\Gamma_4}{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4} \qquad \frac{\Gamma_1|\Gamma_2, A|\Gamma_3|\Gamma_4, \qquad \Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4, A}{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4}$$

$$\frac{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3, A|\Gamma_4 \qquad \Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4, A}{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4}$$

Reglas de la Negación

$$\frac{\Gamma_1, A|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4}{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4, \neg A} \qquad \frac{\Gamma_1|\Gamma_2, A|\Gamma_3|\Gamma_4}{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3, \neg A|\Gamma_4} \qquad \frac{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3, A|\Gamma_4}{\Gamma_1|\Gamma_2, \neg A|\Gamma_3|\Gamma_4} \qquad \frac{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4, A}{\Gamma_1, \neg A|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4}$$

Reglas de la Disyunción

$$\frac{\Gamma_1, A|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4 \qquad \Gamma_1, B|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4}{\Gamma_1, A\vee B|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4}$$

$$\frac{\Gamma_1|\Gamma_2, A, B|\Gamma_3|\Gamma_4, A, B \qquad \Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3, A, B|\Gamma_4, A, B}{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4, A\vee B}$$

$$\frac{\Gamma_1|\Gamma_2, A, B|\Gamma_3|\Gamma_4 \qquad \Gamma_1, B, A|\Gamma_2, B, A|\Gamma_3|\Gamma_4}{\Gamma_1|\Gamma_2, A\vee B|\Gamma_3|\Gamma_4}$$

$$\frac{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3, A, B|\Gamma_4 \qquad \Gamma_1, B, A|\Gamma_2|\Gamma_3, B, A|\Gamma_4}{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3, A\vee B|\Gamma_4}$$

Reglas de Knot

$$\frac{\Gamma_1, A|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4}{\Gamma_1, \propto A|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4} \qquad \frac{\Gamma_1|\Gamma_2, A|\Gamma_3|\Gamma_4}{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3, \propto A|\Gamma_4} \qquad \frac{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3, A|\Gamma_4}{\Gamma_1|\Gamma_2, \propto A|\Gamma_3|\Gamma_4} \qquad \frac{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4, A}{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4, \propto A}$$

Definimos la consecuencia lógica del siguiente modo:

Definición (S$\propto$-consecuencia) $\Gamma \vdash_{\propto} A$ si y sólo si $\vdash_S \Gamma|\Gamma|\Gamma|A$.

Este sistema, al igual que el aparato semántico valuacional, prueba exactamente todos y sólo los argumentos clásicamente válidos.

Teorema (*Corrección*) Si $\Gamma \vdash_{\propto} A$, entonces $\Gamma \vDash_{\propto} A$

Prueba: Los axiomas son válidos y las reglas de inferencia preservan validez. Por ende, por inducción probamos que el sistema es correcto. $\square$

Dado que las reglas son invertibles, podemos probar la completitud mediante el método de árboles de reducción, como lo hicimos con Tonk. El proceso de reducción es exactamente igual, cada fórmula se reduce aplicando la regla que corresponde a su conectiva principal de abajo hacia arriba.

Nótese que, dada nuestra lectura de los secuentes, un contramodelo para $\Delta_1|\Delta_2|\Delta_3|\Delta_4$ es una valuación que otorga a toda fórmula en Δ_1 un valor distinto de 0, a cada fórmula en Δ_2 un valor distinto de ⅓, a cada fórmula en Δ_3 un valor distinto ⅔ y a cada fórmula en Δ_4 un valor distinto de 1. Entonces:

Teorema (*Completitud*) Todo $\mathcal{L}_{\propto}$-argumento tiene un K-contramodelo o una prueba

Prueba. Si en la reducción de $\Gamma|\Gamma|\Gamma|A$ toda rama está cerrada, entonces el árbol es una prueba del secuente. Si hay una rama abierta, sea su hoja $\Delta_1|\Delta_2|\Delta_3|\Delta_4$. Probamos por inducción sobre la complejidad que $\Delta_1|\Delta_2|\Delta_3|\Delta_4$ tiene un contramodelo.

Caso Base: Sea ν una K-valuación que asigna a $p\in\Delta_1$ un valor distinto de 0, a cada $p\in\Delta_2$ un valor distinto de ⅓, a cada $p\in\Delta_3$ un valor distinto ⅔ y a cada $p\in\Delta_4$ un valor distinto de 1. Dado que no hay átomos que se compartan entre los cuatro conjuntos (de otro modo, el secuente sería un axioma) esa ν existe, y es un contramodelo para toda fórmula de complejidad 0 en $\Delta_1|\Delta_2|\Delta_3|\Delta_4$.

Paso Inductivo: Asumimos que hay una ν que es un contramodelo al menos par a las fórmulas en $\Delta_1|\Delta_2|\Delta_3|\Delta_4$ de complejidad $j < k$.

Caso 1: $\neg B\in\Delta_1$ y es de complejidad k.

Por el proceso de reducción, $B\in\Delta_4$ y es de complejidad k-1. Por la hipótesis inductiva, $\nu(B)\neq 1$, y entonces $\nu(\neg B)\neq 0$, con lo cual ν es un contramodelo de $\neg B$ también.

Caso 2: $B\vee C\in\Delta_1$ y es de complejidad k.

Por el proceso de reducción, o B o C están en Δ_1, y ambas son de complejidad menor a k. Por la hipótesis inductiva, $\nu(B)\neq 0$ o $\nu(C)\neq 0$ y entonces $\nu(B\vee C)\neq 0$ con lo cual ν es un contramodelo de $B\vee C$ también.

Caso 3: $\propto B\in\Delta_1$ y es de complejidad k.

Por el proceso de reducción, $B\in\Delta_1$, and y es de complejidad k-1. Por la hipótesis inductiva, $\nu(B)\neq 0$, and then $\nu(\propto B)\neq 0$ con lo cual ν es un contramodelo de $\propto B$ también.

Los otros nueve casos, que corresponden a Δ_2, Δ_3 y Δ_4 son análogos. □

Por ende, por un lado si Knot de hecho puede recibir una interpretación en teoría de la prueba, esa no puede ser la razón por la cual el inferencialista está a salvo de él. Por el otro lado, Button dice que el inferencialista puede excluir a Knot estipulando que es imposible agregar conectivas que causen violaciones de (¬D) y las demás reglas. Esto parece extraño, ya que los sistemas de prueba no precisan de este tipo de cláusulas: las reglas de inferencia confieren permisos que no pueden ser revocados mediante la introducción de nuevos permisos.

Esto por supuesto depende de cómo entendamos a las reglas de inferencia. Si se trata solo de pares de conjuntos de secuentes, entonces sus abstracciones esquemáticas representan sólo reglas admisibles. Los esquemas se comportan en este sentido como si fueran generalizaciones empíricas: podrían dejar de valer en futuras expansiones de la teoría, porque podrían aparecer contraejemplos:

Definición (*Metainferencia esquemática*) Una metainferencia es esquemática si y sólo si todos sus elementos pueden ser obtenidos a partir de uno de ellos –que llamaremos *instancia-esquema*- mediante sustitución uniforme.

En principio, la definición de metainferencia esquemática no exige que dentro del conjunto se encuentren todas las metainferencias-caso que sean instancias sustitucionales. En lo que sigue, las metainferencias esquemáticas que consideremos serán las que sean completas en este sentido.

Lo usual en lógica es considerar que las reglas tienen un carácter normativo, no sólo descriptivo. Esto es, cuando desarrollamos un sistema de prueba en términos de reglas esquemáticas, esperamos que sean no meramente admisibles, sino derivables:

Definición (*Derivabilidad*) Una inferencia esquemática es *derivable* en S si y sólo si, para todas sus instancias, la conclusión puede probarse en el sistema que resulta de agregar las premisas a S.

Esta normatividad implica que o bien tenemos todos los recursos lingüísticos desde un comienzo, y vamos fijando interpretaciones para ellos a medida que sea necesario, o bien cada vez que agregamos un símbolo con nuevas reglas, agregamos también las instancias de las reglas ya existentes. De cualquiera de estas dos maneras, es imposible que el enriquecimiento del lenguaje cause la pérdida de reglas de inferencia.

Por ejemplo, en nuestro sistema sin Knot, la regla (¬D) es meramente admisible:

$$\frac{\Gamma_1, A|\Gamma_2, A|\Gamma_3, A|\Gamma_4}{\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3|\Gamma_4, \neg A}$$

porque los únicos secuentes con prueba que tienen la forma $\Gamma_1, A|\Gamma_2, A|\Gamma_3, A|\Gamma_4$ son aquellos en los cuales A es una contradicción clásica. Si queremos que ($\neg$D) sea derivable, deberíamos añadirla (o algo igual o más fuerte). Y esto no causaría ningún inconveniente, en el sentido de que no obtendríamos un sistema trivial sino una extensión conservativa.

4 Conclusión

Si presentamos a la lógica de Button dentro de un cálculo de secuentes, podemos ver que las metainferencias como ($\neg$D) no son parte del sistema más que como metainferencias admisibles. Las reglas para la negación son de hecho más débiles que eso, y no alcanzan para derivar la regla. Sin embargo, las reglas admisibles no son estables, dado podrían dejar de valer cuando el lenguaje se modifica.

Lo que el inferencialista hace cuando estipula que "las reglas de inferencia deben valer *siempre y sin excepción"* no es otra cosa que tomar a su semántica como siendo caracterizada por el conjunto de reglas derivables, y no por las meramente admisibles. Esto no es una estrategia particular, sino que es la norma a la hora de formular una teoría de la prueba, y en particular cuando ella es un cálculo de secuentes.

Si el semanticista está "perdiendo reglas" al incorporar a Knot, debe ser porque su definición de validez no es lo suficientemente estable. Pero notablemente, Button no se detiene a definir cuál es esa definición de validez metateórica. Por ende, lo que debemos hacer es determinar cuál concepto de metavalidez puede cumplir valuacionalmente el mismo rol que la derivabilidad cumple en teoría de la prueba. Vamos a explicar esto en el capítulo siguiente, y luego volveremos sobre Knot en el capítulo 11.

- Capítulo 10 -

Metavalidez

1 Introducción

Cuando se caracteriza a una lógica valuacionalmente, no suele hacerse en términos de metainferencias. Ninguna de las ventajas que ello reporta en términos inferenciales se traslada a los conjuntos de modelos: ni la necesidad de tener una prueba de eliminación de corte, ni la de caracterizar no-holísticamente el significado de las conectivas, ni facilitar la producción de derivaciones, ni explicitar los supuestos estructurales.

Ello conlleva que las definiciones modelo-teóricas de metavalidez hayan recibido menos atención en la literatura. Pero dado que el presunto problema que presentamos en el capítulo anterior proviene de la invalidación de metainferencias, es preciso aclarar qué significa que una metainferencia sea válida desde el punto de vista valuacional. En particular, es necesario –si el semanticista quiere seguir los pasos del inferencialista- encontrar cuál es el correlato del concepto de derivabilidad.

No obstante, la importancia que tiene entender los conceptos modelo-teóricos de metavalidez va más allá de desarticular la presunta desventaja que la posición semanticista tendría frente a la inferencialista. La metavalidez es justamente el aspecto que distingue a la clase de lógicas submetainferenciales, y en algunos casos, como el de **ST**, el único que lo hace. Por ende, es inevitable comprenderlo si vamos a trabajar con ellas -como he defendido que de hecho deberíamos, si queremos trabajar con vocabulario vago.

En este capítulo presentaremos tres nociones diferentes de metavalidez definida valuacionalmente. En las dos siguientes secciones definiremos los conceptos más naturales, que son los de validez global y local, y mostraremos que ninguno de ellos es la contraparte de derivabilidad. En la sección cuatro analizaremos una tercera alternativa, mucho más compleja, descubierta por Humberstone (1995). Probaremos además que ese concepto sí coincide con derivabilidad, incluso en lógicas subestructurales con **TS** y **ST**.

2 Validez global

Siguiendo la terminología de Pogorzelski –tal como hace Humberstone (2011)- podemos introducir la siguiente definición:

Definición (*Completitud estructural*) Una lógica es estructuralmente completa si y sólo si el conjunto de sus metainferencias esquemáticas admisibles y derivables es el mismo.

Algunas lógicas –como por ejemplo **CL**- tienen algunos cálculos que son estructuralmente completos y otros que no –como por ejemplo, el cálculo con y sin la regla de Corte-, mientras que otras lógicas sólo tienen cálculos que no son estructuralmente completos.

En los casos en los que sí tengamos completitud estructural, podemos encontrar a la contraparte modelo-teórica de la derivabilidad encontrando en verdad la contraparte de la admisibilidad:

Definición (*Metavalidez global*) Una metainferencia es globalmente válida si y solo si la conclusión es V-válida si las premisas lo son, para algún conjunto de valuaciones V.

En sistemas incompletos, las reglas meramente admisibles podrían no ser globalmente válidas. Por ejemplo, tomemos al sistema BC, que es muy incompleto respecto de, por ejemplo, **CL**. Como señala Ripley (2018) en ese sistema, la regla de Swap es admisible, dado que los únicos secuentes que pueden probarse son aquellos en donde las premisas y la conclusión comparten fórmulas

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Delta \Rightarrow \Gamma} \quad \text{(Swap)}$$

Pero Swap es sin dudas globalmente inválida respecto de las **CL**-valuaciones: $A \wedge B \Rightarrow A$ es válido pero $A \Rightarrow A \wedge B$ no lo es. El caso de la lógica clásica no es problemático, dado que existen cálculos completos para ella, pero esto no siempre es así. Siguiendo con Ripley, su objetivo es capturar la relación de validez material del lenguaje natural, la cual incluye inferencias como la que va de "esto es verde" a "esto no es amarillo". Esta teoría no se ha completado y probablemente sólo pueda ser aproximada. En otros casos, la completitud no es siquiera una posibilidad abierta, como sucede con algunas lógicas no clásicas, como Łukasiewicz difusa, o la lógica de segundo orden con modelos full.

Sin embargo, si el sistema sí es completo, la admisibilidad coincide con la metavalidez global:

Hecho 1: Si S es correcto y completo con respecto a V, metavalidez global y admisibilidad coinciden.

Prueba: Sea R una metainferencia globalmente válida, y supongamos que S prueba las premisas de alguna instancia. Por corrección, ellas son válidas, y por ende, la conclusión es válida también. Por lo tanto, por completitud, S prueba la conclusión y la regla es admisible. Para la otra dirección, R es globalmente inválida, eso quiere decir que tiene una instancia tal que sus premisas son válidas pero su conclusión no lo es. Por completitud, S prueba las premisas, y por corrección, no prueba la conclusión. Por lo tanto, la regla es inadmisible. □

Por ende, en los sistemas completos y correctos que son además estructuralmente completos, la derivabilidad coincide con la metavalidez global.

La incompletitud estructural no es en general un problema. Hacer derivables a las reglas que son meramente admisibles no altera el conjunto de secuentes probados, con lo cual la divergencia entre ambos conceptos es en general poco importante. De hecho, no explicitar las reglas admisibles hace que la presentación del cálculo sea más compacta y menos redundante, y también simplifica la prueba de resultados metateóricos.

Sin embargo, como veíamos en el capítulo anterior, si tenemos incompletitud estructural, podría ser que las reglas meramente admisibles dejen de valer al incorporar nuevo vocabulario. Por ende, la metavalidez global coincide con la derivabilidad sólo en casos muy estrictos, que no son los que ocurren en el problema de Knot.

Veremos en la próxima sección otra definición de metavalidez, que es menos usual, pero que podría *prima facie* resultar prometedora como análogo de la derivabilidad.

3 Validez local

Recientemente, Dicher y Paoli (2018) han defendido la siguiente concepción de metavalidez, en contraposición al concepto global:

Definición (*Confirmación*) Una valuación confirma un argumento si y sólo si no es un contramodelo para él.

Definición (*Metavalidez Local*) Una metainferencia es localmente válida si y solo si toda valuación que confirma las premisas, confirma la conclusión.

Su argumento en favor de la localidad parte del hecho de que concepto de validez para metainferencias debe aplicarse a casos y no tipos. La justificación que ofrecen es la siguiente:

> Cuando trabajamos en teorías específicas (como teorías de la vaguedad o la verdad) podríamos estar interesados en si un cierta inferencia o metainferencia es válida, independientemente de si instancia una regla o metaregla válida. Por ejemplo, podríamos querer señalar (la versión de regla de) la equivalencia tarskiana para una oración particular α, sea el Mentiroso, independientemente de que sea una instancia de una regla. Dicher & Paoli (2018), página 9

Es cierto que, por ejemplo, aunque explosión es en general una regla inválida de **LP**, tiene instancias válidas, como $p \wedge \neg p \Rightarrow p$. Una podría estar interesada en esto, más allá de lo que suceda con los tipos generales, ya sea por cuestiones puramente lógicas, o para poder razonar de acuerdo con esas inferencias en los casos en los que esté habilitada.

Sin embargo, definir validez para tipos no impide aplicar el concepto a casos. La verdadera razón por la cual Dicher y Paoli sostienen esto es para luego poder defender la primacía de la metavalidez local con el siguiente argumento:

> (…) esta concepción [global] de validez metainferencial es demasiado débil. Aplicada a **ST**, reivindicaría, por ejemplo, toda metainferencia de una premisa ({S}; S') tal que S sea un secuente **ST**-inválido y S' alguno arbitrario. No tiene mucho sentido perseguir un inventario de este tipo de metainferencias válidas. Dicher & Paoli (2018), página 9

Analicemos el argumento en detalle. En primer lugar, es cierto que, en general, el concepto global es más débil que el local:

Hecho 2: Metavalidez local implica metavalidez Global.

Prueba: Supongamos que la metainferencia-tipo R no es globalmente válida. Entonces, tiene un miembro tal que sus premisas son válidas y su conclusión no lo es. Por ende, hay una valuación que no confirma la conclusión. Pero todas las valuaciones confirman las premisas. Por lo tanto, R tiene un elemento que no es localmente válido, con lo cual ella no es localmente válida. □

La dirección conversa falla vacuamente, por la simple razón de que hay metainferencias tipo que sólo tienen miembros con premisas inválidas, como podría ser una metainferencia cuyo único elemento es:

$$\frac{\Rightarrow p}{\Rightarrow q}$$

Esta inclusión estricta entre los conceptos vale para metainferencias en el sentido más general posible, lo cual incluye a las metainferencias-caso, y también a conjuntos de metainferencias sin ningún tipo de vínculo entre sus elementos. Sin embargo, que la metavalidez global sea más débil que la local no implica que sea *demasiado* débil.

En primer lugar el hecho de que algunas sean globalmente válidas de modo vacuo no invalida el concepto. Por un lado, porque ello no implica que no haya metainferencias que sean globalmente inválidas, con lo cual el concepto dista de ser trivial. Además, así como considerar verdadero a un condicional con antecedente falso no es un problema porque no nos obliga a aceptar el consecuente, reivindicar la validez de la metainferencia de más arriba no es un riesgo, puesto que no sirve para afirmar $\vDash q$.

No solo ello, sino que el concepto de validez global puede ser útil, por ejemplo, para distinguir una lógica de otra. Por ejemplo:

$$\frac{\Rightarrow p \vee \neg p}{\Rightarrow q}$$

Es **K3**-globalmente válida, pero no **CL**-globalmente válida.

Pero no sólo no es cierto que el concepto de validez global sea demasiado débil, sino que la validez local es demasiado fuerte. Un ejemplo de ello es la regla de sustitución uniforme:

Definición (*Sustitución uniforme*) Si un secuente pertenece a una lógica, entonces todo secuente que resulte de sustituir de modo uniforme las variables proposicionales por fórmulas también pertenece.

La regla de sustitución uniforme es una condición de clausura sobre los elementos de una lógica, y es muy habitualmente considerada una condición necesaria para la logicidad de un conjunto de secuentes (aunque no necesariamente sea un requisito para sistemas que no sean puros). Es una regla globalmente válida, pero no lo es localmente, dada por ejemplo la siguiente instancia, en donde el secuente conclusión es el resultado de reemplazar en la premisa *p* por *q*:

$$\frac{\Rightarrow p}{\Rightarrow q}$$

Una razón por la cual la distinción entre la validez global y local no ha recibido suficiente atención tiene que ver con que, en general –dejando de lado los casos como Sustitución Uniforme- las inferencias que suelen considerarse son inferencias esquemáticas:

Hecho 3: En **CL**, metavalidez global implica metavalidez local para metainferencias esquemáticas.

Prueba: Supongamos que R no es localmente válida. Entonces, tiene un miembro tal que hay una valuación ν que confirma cada premisa $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ pero no confirma la conclusión $\Sigma \Rightarrow \Pi$. Tomamos entonces aquella instancia sustitucional de R tal que tiene una tautología en cada *p* tal que $\nu(p)=1$ y una contradicción en cada *p* tal que $\nu(p)=0$. Toda valuación confirma las premisas y ninguna la conclusión de esta instancia, con lo cual es globalmente inválida. Por ende, R lo es. □

En síntesis, para el caso de **CL**, si lo que consideramos son sólo las metainferencias-caso, la metavalidez local es más débil que la global. Por el otro lado, si consideramos todas metainferencias-tipo, resulta demasiado exigente. Por último, si lo que consideramos son sólo metainferencias esquemáticas, ambos conceptos colapsan.

Sin embargo, nuestro interés va más allá de la lógica clásica. Por ejemplo, dijimos en el capítulo 7 que **TS** no es una lógica vacía, porque cuenta con metainferencias válidas. Dado que de hecho sí carece de secuentes válidos, el sentido de metavalidez al que nos referimos sólo puede ser el local. Desde el punto de vista de teoría de la prueba, **TS** no prueba ningún secuente, y admite toda metainferencia, pero deriva sólo algunas.

Dado esto, uno podría pensar que la metavalidez local es la contraparte de la derivabildad. Por supuesto, una de las direcciones de esa equivalencia se obtiene de modo sencillo:

Hecho 4: Si S es correcto y completo respecto de V, derivabilidad implica validez local para metainferencias esquemáticas

Prueba: Sea R una metainferencia esquemática derivable, y sea ν un contramodelo de la conclusión de alguna instancia de sustitución. Por corrección, la conclusión no tiene prueba. Por ende, dado que la regla es derivable, al menos alguna premisa tampoco la tiene. Por lo tanto, por completitud, esa premisa tiene contramodelo. Por ende, la instancia no es globalmente válida, con lo cual tampoco es localmente válida. □

Pero, como veremos en la próxima sección, la dirección conversa no siempre funciona.

4 Validez absolutamente global

En (1995) Humberstone define otro concepto más de validez, a la que llama *validez global*. Aquí, para distinguirla del primer concepto que presentamos, que es el que más usualmente se conoce con ese nombre, llamaremos a esta otra *validez absolutamente global*:

Definición (*Validez absolutamente global*) Una metainferencia es absolutamente globalmente válida (absolutamente g-válida) respecto de un conjunto $\mathbb{V}$ de conjuntos de valuaciones (su *rango global*) si y sólo si preserva V-validez para toda $V \in \mathbb{V}$.

En el caso en el cual $\mathbb{V}$ tiene solo un elemento (el conjunto de valuaciones booleanas, por ejemplo) validez global y absolutamente global coinciden. Por el otro lado, cuando los elementos de $\mathbb{V}$ son sólo los *singletons* de distintas valuaciones, la validez absolutamente global coincide con la local. Lo que hace Humberstone es fijar un $\mathbb{V}$ que es el conjunto de todas las valuaciones en {0,1} –que no necesariamente respetan las cláusulas de las conectivas.

El teorema principal en ese mismo artículo es justamente que la derivabilidad coincide con la validez absolutamente global. A modo de ejemplo, pensemos en SCL, sin Corte, y tomemos la siguiente regla de eliminación, que no es derivable a partir de las de introducción (que formulamos aquí sin contexto para que sea más sencilla la ilustración):

$$\frac{\Rightarrow A\wedge B}{\Rightarrow A}\ (\wedge E) \qquad\qquad \frac{\Rightarrow A \quad \Rightarrow B}{\Rightarrow A\wedge B}\ (\wedge D) \qquad\qquad \frac{A, B \Rightarrow}{A\wedge B \Rightarrow}\ (\wedge I)$$

Podemos ver que esa regla es absolutamente g-inválida. Para ello, basta tomar un conjunto V tal que ninguna fórmula sea, de acuerdo con él, ni una tautología ni una contradicción. Según ese conjunto, tanto ($\wedge$D) como ($\wedge$I) son V-válidas (al igual que el contexto estructural). En particular, la V-validez se cumple vacuamente, sin necesidad de imponer ninguna restricción respecto de la interpretación de $\wedge$. Con lo cual, una valuación tal que $\nu(C)=\mathbf{1}$, $\nu(A)=\mathbf{0}$ y $\nu(A\wedge B)=\mathbf{1}$ para algunas A, B y C puede perfectamente pertenecer a V, aunque no sea correcta dado que $A\wedge B\Rightarrow A$ puede probarse con $\wedge$L y Monotonía. En ese caso, ($\wedge$E) es V-inválida.

La prueba de Humberstone se aplica a cualquier lógica tarskiana. Ya que argumenté en esta tesis a favor de **ST**, que es subestructural, es necesario preguntarse si un resultado análogo puede probarse para ella, o quizás en esos casos sí ocurre que la validez local sea la contraparte de la derivabilidad. La respuesta es que también en el caso de lógicas no-transitivas y no-reflexivas, la validez absolutamente global es la que cumple ese papel, pero para mostrarlo necesitamos antes algunas herramientas formales[14]:

Definición (*Conexión Galois*) Dados dos conjuntos **L** y **V** una función υ: P(**L**)$\rightarrow$P(**V**) tal que $\upsilon(x)=\{y \mid \forall z_{\in x} Rzy\}$ y una función α: P(**V**)$\rightarrow$P(**L**) tal que $\alpha(y)=\{x \mid \forall z_{\in y} Rxz\}$, υ y α forman una conexión galois entre **L** y **V** si y sólo si:

- $x \subseteq \alpha(\upsilon(x))$
- $y \subseteq \upsilon(\alpha(y))$
- $x_1 \subseteq x_2 \Rightarrow \upsilon(x_1) \subseteq \upsilon(x_2)$
- $y_1 \subseteq y_2 \Rightarrow \upsilon(y_1) \subseteq \upsilon(y_2)$

Las dos primeras condiciones indican que, cuando hacemos el camino de ida y vuelta entre **L** y **V**, el conjunto al que regresamos no va a ser más pequeño que aquel del cual salimos. Las segundas dos condiciones son cláusulas de monotonía de las funciones.

El ejemplo clásico de Humberstone (2011) es aquel en el cual **L** es un conjunto de personas, **V** es un conjunto de ciudades, y la función υ me da, para cada subconjunto de personas, las ciudades que todos ellos visitaron, y la función α me da, para cada conjunto de ciudades, las personas que las visitaron a todas.

Las conexiones galois se vinculan con las lógicas a través de una propiedad llamada *absolutez*. Consideremos el caso en que:

- **L** es una lógica
- **V** es un conjunto de valuaciones

[14] Modificamos en la definición de conexión galois ligeramente la elección de variables para conjuntos y funciones, de modo que luego cuando apliquemos la definición al contexto lógico, sea más sencillo de recordar de qué estamos hablando.

- $\upsilon(x)=\{\nu|\ \nu$ no es contraargumento de ningún $\Gamma\Rightarrow\Delta$ en $x\}$
- $\alpha(x)=\{\Gamma\Rightarrow\Delta|\ \Gamma\Rightarrow\Delta$ no tiene ningún contrargumento en $x\}$

Definimos absolutez tanto para conjuntos de argumentos como de valuaciones, en términos de su clausura galois:

Definición (*Lógica absoluta*) Una lógica **L** es absoluta si y sólo si $\mathbf{L}=\alpha(\upsilon(\mathbf{L}))$

Definición (*Espacio de valuaciones absoluto*) Un espacio de valuaciones **V** es absoluto si y sólo si $\mathbf{V}=\upsilon(\alpha(\mathbf{V}))$.

El ejemplo más sencillo de una lógica que *no* está cerrada bajo galois es **CL** con conclusiones simples. Como notó Carnap (1942), $\upsilon(\mathbf{CL})$ tiene como elemento a la valuación trivial, es decir, aquella valuación que le da 1 a todas las fórmulas (y por ende, no puede ser contraejemplo de ningún argumento ni tautología). Cuando la lógica es presentada con conclusiones múltiples, en cambio, sí es absoluta, puesto que tendremos dentro de ella a secuentes que tienen conclusiones vacías y premisas que no lo son, y la valuación trivial sí es un contramodelo de ella.

Para probar que las reglas derivables de **ST** coinciden con las absolutamente g-válidas, lo que haremos será revisar la prueba de Humberstone, e identificar en qué puntos deja de ser aplicable a lógicas subestructurales. Lo primero que es necesario es el siguiente lema:

Lemma (*Humberstone* (1995)). Si $\mathbf{V}=\upsilon(\mathbf{L})$, entonces una metainferencia ρ es absolutamente g-válida si y sólo si **L** está cerrada bajo ρ.

Prueba: Si: Suponemos que una metainferencia es absolutamente g-válida y que las premisas secuente de alguno de sus miembros están en **L**. Por ende, por la clausura galois, las premisas deben ser **V**-válidas y por ende, la conclusión también. Por lo tanto, por la clausura galois nuevamente, la conclusión pertenece a **L**.

Sólo si: Suponemos que **L** está cerrada bajo ρ y que los secuentes premisa de alguno de los miembros de R son **V**-válidos. Por ende, por la clausura galois, pertenecen a **L**, con lo cual también lo hará la conclusión. Por lo tanto, por la clausura galois nuevamente, la conclusión es válida. □

Las valuaciones con las que trabaja Humberstone aquí son bivaluadas, y el primer escollo es que la semántica de **ST** con la que trabajamos es trivaluada. Esto abre dos alternativas: o bien ofrecemos una semántica bivaluada para **ST** (como por ejemplo, hay para **LP**) o bien mostramos que ST es absoluta respecto de una clase de valuaciones trivaluadas.

La primera vía es un camino sin salida, puesto que Hardegree (2005) mostró que sólo las lógicas estructurales pueden estar galois-clausuradas respecto de funciones bivaluadas. Para la segunda opción en cambio, ya tenemos el camino allanado, puesto que French y Ripley (2018) prueban el siguiente teorema:

Teorema (*Clausura galois de **ST** y **TS**.* French & Ripley (2018)) Un conjunto de argumentos está galois cerrado con respect al conjunto de valuaciones trivalentes con una consecuencia estricto-tolerante (tolerante-estricta) si y solo si es reflexiva (transitiva) y monótona.

Esto quiere decir que podemos probar en lema anterior también para **ST** y **TS**. Y eso es todo lo que necesitamos para probar el resultado de completitud:

Teorema (*Meta-Completitud*) Una metainferencia ρ es derivable de un conjunto de metainferencias R si y sólo si su rango absolutamente global está incluido en el de R.

Prueba: Sólo si: Supongamos que el rango absolutamente global de ρ no está incluido en el de R. Entonces, hay una clase **V** tal que cada regla en R preserva V-validez pero ρ no lo hace. Por ende, hay un miembro de ρ tal que las premisas $\{\sigma_1 \ldots \sigma_n\}$ son **V**-válidas pero la σ_{n+1} conclusión no. Sea Σ la clase de todos los secuentes **V**-válidos. $\{\sigma_1 \ldots \sigma_n\} \in \Sigma$ pero $\sigma_{n+1} \notin \Sigma$. Además, Σ es reflexiva (transitiva) y monótona y está cerrada bajo R (dado que todo en R preserva **V**-validez), pero no bajo ρ. Por lo tanto, ρ no es derivable de R.

Si: Supongamos que ρ no es derivable de R. Entonces, hay un conjunto de secuentes cerrados bajo identidad (transitividad) y monotonía que está cerrado bajo R pero no bajo ρ. En particular, sea **L** el más pequeño de esos conjuntos. **L** debe estar cerrado bajo R pero no bajo ρ. Por el lema de Humberstone, todas los miembros de R preservan υ(**L**)-validez pero ρ no. □

5 Estabilidad

La sección precedente nos muestra que hay un concepto que es el análogo modelo-teórico de la derivabilidad, aunque no es la prometedora noción de validez local. Bastaría entonces con pedir que las metainferencias que se consideran válidas sean aquellas que son absolutamente g-válidas, y el problema de Knot se ve resuelto. La solución es que las metainferencias que se "pierden" con la introducción de Knot no eran realmente válidas. Si quien está diseñando la lógica quiere que lo sean, lo que debe hacer no es ser precavido respecto de la incorporación de vocabulario peligroso, sino elegir una semántica diferente.

Sin embargo, el concepto de validez absolutamente global es complejo, y poco iluminador conceptualmente; se trata más que nada de una herramienta formal diseñada *ad hoc* para imitar a la derivabilidad, mientras que para el inferencialista las derivaciones son un elemento crucial del aparato explicativo. Por ende, si bien desde el punto de vista técnico ambas posiciones parecen estar en pie de igualdad, quizás podría argumentarse que el valor filosófico está del lado inferencialista.

No obstante, quizás hemos sido demasiado rápidas en descartar a la consecuencia local en favor de la absolutamente global. Después de todo, lo que importaba del concepto de derivabilidad como caracterización de un conjunto de metainferencias era el hecho de que permitía fijarlas, de modo tal que no puedan dejar de valer una vez que incorporamos un nuevo elemento al vocabulario.

La metavalidez local, si bien no coincide con la derivabilidad de modo general, sí posee esta propiedad de estabilidad. Como argumenta Ripley en (2018), si una regla es válida respecto de una clase de modelos, seguirá siendo válida respecto de cualquier subconjunto de ellos. Esto no sucede con la validez global, ya que eliminar valuaciones puede hacer a las premisas de la metainferencia válidas, invalidándola a ella.

6 Conclusión

A lo largo de este capítulo consideramos tres definiciones de validez distintas, buscando dar con la contraparte modelo-teórica de la derivabilidad. El resultado fue que la definición absolutamente global de metavalidez es la contraparte perfecta, pero que la validez local, a causa de su estabilidad, es suficiente para desarticular el presunto problema de Knot.

Parece entonces que de las tres relaciones de consecuencia metateórica, una tiene valor formal –por su estabilidad-, la otra tiene valor conceptual –por su identificación con la noción de derivabilidad-, y la validez global saldría perdiendo en todos los frentes. Respecto de la validez absolutamente global, no hay mucho más que decir. Sin embargo, respecto de la presunta disputa entre validez local y global, en el siguiente capítulo voy a argumentar, por el contrario, que esta última la que debe ser preferida. En primer lugar, porque es mucho más estable de lo que puede parecer a primera instancia. En segundo lugar, porque la validez local no se encuentra conceptualmente bien fundada, y es demasiado estricta.

- Capítulo 11 -

Validez global reivindicada

1 Introducción

Si vamos a introducir conectivas vagas en un contexto submetainferencial, debemos caracterizarlo apelando a un concepto de metavalidez semántico. La conclusión sorprendente del capítulo anterior fue que el que de hecho es el más popular –es decir, la metavalidez global- es el que peor parado queda frente al problema de la estabilidad. Sin embargo, antes de desterrarla para siempre, es necesario responder dos cuestiones.

En primer lugar está la cuestión de si quizás vale la pena seguir caracterizando la metavalidez globalmente, y admitir a Knot como un riesgo posible. El modo de protegerse sería elegir una serie de metainferencia globalmente válidas como características de la lógica, y luego en algún sentido clausurarlas agregando como requisito que no puede incorporarse ningún vocabulario lógico que provoque la falla de alguna metainferencia. Voy a argumentar en la sección 2 que un desiderátum de ese tipo está infundado.

En segundo lugar está la cuestión de si la validez local tiene la solidez conceptual suficiente para reemplazar al concepto global. En el capítulo anterior hemos visto que la idea de Dicher y Paoli de que la validez global es demasiado débil es exagerada, puesto que sólo se basa en la existencia de casos de validez global trivial, lo cual es algo presente en infinidad de conceptos. No sólo eso, sino que cuando evaluamos metainferencias-tipo en lugar de metainferencias-caso, esos ejemplos vacuos como:

$$\frac{\Rightarrow p}{\Rightarrow q}$$

pasan a ser instancias de metainferencias esquemáticas como:

$$\frac{\Rightarrow A}{\Rightarrow B}$$

que sí tienen contraejemplos, y por ende no son consideradas globalmente válidas.

Esto quiere decir que, dejando de lado la cuestión de la estabilidad, no teníamos razones para desconfiar de la validez global. No sólo eso sino que, como veremos en la sección 3, las bases conceptuales de metavalidez local son endebles.

Por ende, parece que estamos frente a un dilema: la validez global es un mejor concepto, pero carece de la estabilidad suficiente para cumplir con los roles que se le requieren. En la sección 4 mostraré que en verdad la distancia entre validez local y global es fácilmente zanjeable. Esto, por un lado, implica que la presunta rivalidad entre ambos conceptos no reviste demasiada importancia. Sin embargo, incluso cuando no coinciden, tenemos razones para preferir la global a la local.

2 Preservatividad

Sabemos que las metainferencias globalmente válidas podrían fallar si se modifica el lenguaje objeto. Sin embargo, podría ser que, así como le pedimos al vocabulario lógico que sea conservativo, haya que agregar una nueva condición de significatividad que prevenga este tipo de descalabros:

Definición (*Extensión preservativa*) Sean **L** una lógica en un lenguaje $\mathcal{L}$; V un conjunto de valuaciones correctas y completas respecto de **L**; **L*** una extensión de **L** en un lenguaje $\mathcal{L}^*=\mathcal{L}\cup\{\odot\}$; y $V^*\subseteq V$ un conjunto de valuaciones correctas y completas respecto de **L***. Decimos que **L*** es una *extensión preservativa* de **L** si y sólo si para toda metainferencia esquemática de $\mathcal{L}$ globalmente V-válida cuya instancia-esquema sólo contiene fórmulas de $\mathcal{L}$, la metainferencia esquemática de $\mathcal{L}^*$ con la misma instancia-esquema es a su vez globalmente V*-válida.

La definición de preservatividad es inmensamente compleja por el hecho de que, al modificarse el lenguaje, las metainferencias esquemáticas no serán las mismas en una y otra lógica, puesto que habrá nuevas instancias. Sin embargo, la idea es sencilla, y es la de que no se “pierdan” metainferencias válidas.

Como vimos en el capítulo 5, hay (al menos) dos sentidos de conservatividad, que se fundan en distintos principios filosóficos. El primero es el sentido de mínima belnapiano, que resulta fundamental en tanto garantiza la no-trivialidad. La preservatividad, sin embargo, no garantiza ningún tipo de consistencia, con lo cual no podemos basarnos en ello para exigirla.

El segundo sentido que habíamos mostrado es aquel que pedía conservatividad respecto de cualquier sistema de lógica. Esta condición no es una condición básica de la significatividad, sino un criterio de logicidad. La idea es que el vocabulario lógico está atómicamente delimitado por un lado, y es epistémicamente neutral por el otro.

Respecto de lo primero, Dummett (1991) dice por ejemplo que puede haber grupos de predicados empíricos cuyo significado no pueda ser entendido de modo independiente uno del otro. Por ejemplo, incorporar una nueva palabra de color –como "salmón"- puede afectar el modo en que se aplican otras palabras de color previamente existentes –como "naranja" y "rojo". La lógica sería particularmente compartimentada en este sentido, en tanto se ve libre de fenómenos como la ambigüedad o la vaguedad.

Respecto de lo segundo, se supone que la lógica no debería contribuir de modo sustancial a nuestras teorías, en tanto no es "acerca de nada". Es por ello que no deberíamos poder probar hechos no lógicos a partir de la incorporación de recursos no lógicos.

Pero incluso si la posición excepcionalista que planteábamos más arriba es razonable, el problema aparece cuando la lógica supuestamente excede su rol legítimo, *agregando* cosas a nuestras creencias. Lo que no debería pasar es que podamos aprender hechos no-lógicos por razones lógicas. Que seamos *incapaces* de aprender hecho no-lógicos a causa de motivos lógicos no es problemático porque sólo apunta a la insuficiencia de los recursos no lógicos con los que contamos.

Es por esto que no podemos pedir que sean considerados vocabulario lógico legítimo sólo aquellos símbolos que produzcan una extensión preservativa. Pero entonces, la salida al problema de Knot debe ser considerar que las metainferencias eran inválidas previamente a la incorporación de $\propto$. Es decir, que debemos priorizar al concepto local de validez. Sin embargo, como veremos en la próxima sección, ese concepto no está del todo bien fundado.

3 Uniformidad

Dado lo escasas que son en la literatura las discusiones acerca de metavalidez definida modelo-teóricamente, es difícil encontrar argumentos en favor de la metavalidez local, más allá del de Dicher y Paoli –que ya hemos desechado. Según creo, lo mejor que puede decirse sobre este concepto tiene que ver con su uniformidad.

Hay dos tipos de uniformidad entre niveles lógicos que podríamos desear que se cumplieran. El primero tiene que ver con respetar el mismo modo de definir la consecuencia lógica, y el otro con respetar el contenido de esa consecuencia. A continuación veremos ambos casos y argumentaré que, a pesar de las apariencias, la metavalidez local no es más uniforme en ninguno de los sentidos.

3.1 En la forma de la definición

En relación al primer requisito, podríamos argumentar que, dado que estamos tomando a la consecuencia definida para inferencias de primer nivel como una relación local, deberíamos hacer lo mismo con las metainferencias. Es decir, no estamos pidiendo que se preserve la propiedad de ser una tautología, sino de ser verdadera, con lo cual por qué pedirles a las metainferencias que preserven validez y no confirmación.

Un motivo detrás de este desiderátum podría ser el hecho de que la jerarquía de lógicas es, al menos es un sentido potencial, infinita, con lo cual sería imposible tener que "tomar una decisión" respecto de cómo definir la consecuencia en cada nivel. En lugar de eso, debería haber una estructura general de definición, y que se aplique del mismo modo en todos los casos.

Pero la mera analogía no funciona aquí, porque mientras que la verdad juega un papel importante en el rol que las oraciones puedan cumplir en una variedad de contextos, la confirmación no parece tener la misma utilidad. Aprender que el modelo pretendido confirma un argumento no nos garantiza ningún tipo de relación especial con esa inferencia, mientras que aprender que una oración resulta verdadera en ese modelo nos da, por ejemplo, una justificación para afirmarla, creerla, etc. Esto no quiere decir que el concepto de confirmación no sea útil, sino que su interés es fundamentalmente técnico.

Además, detrás de un argumento de este tipo se esconde una confusión. El hecho es que estamos expresando las metainferencias en el metalenguaje, pero la semántica que estamos usando para interpretar esas oraciones es aquella diseñada para el lenguaje objeto. Lo que sucede es que el lenguaje de esa metateoría sólo contiene afirmaciones de validez, del tipo "$\Gamma \Rightarrow \Delta$". Es decir, el metalenguaje es suficientemente pobre como para que no sea necesario apelar a modelos distintos de los de nivel 0 para interpretarlo. Es por eso que la relación metateórica debe ser definida globalmente.

Si además de afirmaciones de validez tuviéramos otras oraciones contingentes, precisaríamos el aparato semántico completo. Esto es lo que hemos mostrado de hecho en el capítulo 6, cuando presentamos la teoría de la validez. Para dicha teoría, la relación de consecuencia de nivel 0 –que es el nivel en el que se hace la metateoría- es local.

3.2 En el resultado de la definición

El segundo requisito de uniformidad consiste en el desideratum de que los principios que guían la lógica en el nivel básico sean los mismos que regulan los niveles superiores. No se trata de un mandato formal, como en el caso anterior, sino de un vínculo de coherencia, algo así como un principio de racionalidad.

El problema aquí es cómo efectuar la comparación entre los distintos niveles. A modo de ilustración, tomemos a **LP** y consideremos la siguiente regla:

$$\frac{\Rightarrow A \qquad \Rightarrow \neg A}{\Rightarrow B} \qquad \text{(Meta Explosión)}$$

Esta regla no es localmente válida en **LP**, dado que hay valuaciones que asignan ½ a p y $\neg p$, pero 0 a q. Sin embargo, no hay una fórmula y su negación que sean las dos teoremas de **LP**, dado que, como ya dijimos, estos coinciden con los de **CL**. Por ende, la regla sí es globalmente válida. Esto podría ser entonces ser tomado como una razón a favor de la validez local, dada la invalidez de Explosión en el nivel de base.

Pero el hecho de que Meta Explosión corresponda con Explosión –y que por ende *deba* fallar- depende de algún tipo de traducción transnivel. Una posibilidad es la siguiente función τ_1 que traduce secuentes a fórmulas (semejante al que encontramos en Barrio et al (2015)):

Definición (*Traducción de secuentes a fórmulas*)

- $\tau_1(\Gamma\Rightarrow\Delta)=\bigwedge\Gamma\rightarrow\bigvee\Delta$, si ni Γ ni Δ son vacíos
- $\tau_1(\Rightarrow\Delta)=\bigvee\Delta$, si Δ no es vacío
- $\tau_1(\Gamma\Rightarrow)=\bigwedge\neg\Gamma$, si Γ no es vacío
- $\tau_1(\Rightarrow)=\bot$

Hay un detalle con esta traducción, que es cómo resolver qué se hace con el secuente vacío. El secuente vacío es un símbolo trivializante del metalenguaje, implica cualquier secuente, en cualquier sentido de implicar que elijamos. Es por ello que es necesario que el lenguaje cuente con una constante de falsedad. No es una opción traducir $\Rightarrow$ como una contradicción cualquiera, dado que en **LP** las contradicciones, como ya sabemos, no son trivializantes.

Para la conversa, utilizamos la siguiente transformación:

Definición (*Traducción de fórmulas a secuentes*)

- $\tau_2(\Gamma)= \{\Rightarrow A | A\in\Gamma\}$, si A es una premisa
- $\tau_2(\Delta)= \Rightarrow\bigvee\Delta$, si Δ es el conjunto de conclusiones

Sobre esta base, la traducción de metainferencias se realiza punto a punto:

Definición (*Intertraducción de metainferencias e inferencias*)

- $\tau_1^i(\langle\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1\ldots\Gamma_n\Rightarrow\Delta_n\ ;\ \Pi\Rightarrow\Sigma\rangle)=\tau_1(\Gamma_1\Rightarrow\Delta_1)\ldots\tau_1(\Gamma_n\Rightarrow\Delta_n)\Rightarrow\tau_1(\Pi\Rightarrow\Sigma)$
- $\tau_2^i(\Gamma\Rightarrow\Delta)=\tau_2(\Gamma)\Rrightarrow\tau_2(\Delta)$

De acuerdo con esta traducción, Explosión y Meta Explosión corresponden una con la otra, y por ende, una lógica que invalide la primera y no la segunda estaría violando el principio de coherencia.

Dada esta función de traducción, y puesto que Meta Explosión es, como dijimos, globalmente válida, la validez local parece ser el concepto que da como resultado una lógica de nivel 2 más coherente con la de nivel 1. Sin embargo, las razones para creer que hay oraciones verdaderas y falsas no implican que haya oraciones que necesariamente lo sean por razones formales, del mismo modo que las razones para aceptar que hay oraciones verdaderas no nos obligan a aceptar que haya tautologías. Por ende, quizás el rechazo de Explosión es de hecho coherente con la aceptación de Meta Explosión. Es decir, la traducción debería conservar τ_1, pero reemplazar τ_2 por:

Definición (*Traducción de fórmulas a secuentes 2*) Dada una p independiente

- $\tau_3(\{A\})= p\Rightarrow A$, si A es una premisa
- $\tau_3(\Delta)= p\Rightarrow\bigvee\Delta$, si Δ es el conjunto de conclusiones

Esta nueva traducción transforma cada instancia de Explosión en una instancia de:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow \neg A}{\Gamma \Rightarrow B} \qquad \text{(Meta Explosión 2)}$$

Que es no sólo localmente inválida, sino también globalmente inválida, dada por ejemplo la siguiente instancia:

$$\frac{p\wedge\neg p \Rightarrow p \qquad p\wedge\neg p \Rightarrow \neg p}{p\wedge\neg p \Rightarrow q}$$

Con lo cual, qué definición de metavalidez sea la más coherente va a depender al menos en parte de la traducción que elijamos. Algo que quizás sea una desventaja de τ_3 es el hecho de que no transforma toda instancia de Meta Explosión 2 en una instancia de Explosión -cosa que sí pasaba con τ_2- sino solamente aquellas en las cuales $\Gamma=\emptyset$. Es decir, solo aquellas que de hecho son también instancias de Meta Explosión. El resto se transforman en una inferencia de la siguiente forma:

$C\rightarrow A$, $C\rightarrow\neg A \Rightarrow C\rightarrow B$

Por ende, es al menos poco claro como comparar niveles dentro de una lógica. En la próxima sección veremos que, afortunadamente, esto afectará poco a la decisión entre metavalidez local y global.

4 Colapso

Hasta aquí he argumentado que la metavalidez global es un concepto filosóficamente más robusto, y que las razones que podrían darse a favor de la validez local son dudosas. Sin embargo, la noción global sigue teniendo el problema de la inestabilidad, que veíamos manifestarse por ejemplo con Knot.

Lo que ahora voy a mostrar es que en realidad no es difícil que recupere esa estabilidad, y de hecho es suficiente con las propiedades que figuran a continuación:

Definición (*Veritativo-funcionalidad*) Una lógica es *veritativo-functional* si y solo si para todo operador proposicional n-ario $\odot$ hay una función $f{:}\tau^n\rightarrow\tau$ tal que $\nu(\odot(A_1,\ldots,A_n))=f(\nu(A_1),\ldots,\nu(A_n))$.

Definición (*Completitud de constantes*) Una lógica es completa respecto de las constantes si y sólo si para todo valor $\mathbf{t}\in\tau$, hay una fórmula $A_{\mathbf{t}}$ que recibe el valor $\mathbf{t}$ en toda valuación.

Dadas estas condiciones, la siguiente es una prueba de la otra dirección de la equivalencia entre validez global y local[15]:

Teorema (*Colapso de validez global y local*) Si una lógica es veritativo-functional y completa respecto de las constantes, validez global implica validez local, para inferencias esquemáticas.

Prueba: Sea ρ una metainferencia localmente inválida. Entonces, hay un miembro de ρ tal que hay una valuación ν que confirma cada premisa $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ pero no confirma la conclusión $\Sigma \Rightarrow \Pi$. Tomamos la instancia sustitucional que asigna $A_{\mathbf{t}}$ a cada variable proposicional tal que $\nu(p)=\mathbf{t}$. Toda valuación confirma las premisas de esta instancia, y ninguna la conclusión, lo cual la hace globalmente inválida. Por ende, ρ es globalmente inválida. □

En algún sentido, este resultado desarma el problema: desde el momento en que la validez global coincide con la local, en tanto la segunda es estable, la primera también lo será. Es decir, que la validez global es mucho menos peligrosa de lo que podía parecer. Por ejemplo, Ripley (2018) sugiere que cada vez que agreguemos reglas a un sistema, debemos chequear que ellas valgan localmente, para evitar así tener que volver a revisar todo el sistema cada vez que modificamos la teoría. Pero esto es así sólo hasta que agreguemos constantes para los valores de verdad. Una vez que esto pasa –y que podría ocurrir desde un primer momento- el riesgo de perder las reglas globales desaparece.

Queda entonces preguntarse qué tan de mínima son esas condiciones, ya que podría ocurrir que (a) no podamos tener veritativo-funcionalidad o (b) no podamos tener completitud de constantes.

Lejos de representar una objeción, la cuestión de (a) apunta en verdad a la preeminencia de la metavalidez global. Tomemos por ejemplo los lenguajes modales, que incluyen operadores que no tienen representaciones veritativo-funcionales. Para estos operadores, típicamente querríamos que las siguientes metainferencia se cumplan:

$$\frac{\Rightarrow A}{\Rightarrow \Box A} \qquad\qquad \frac{\Rightarrow \Diamond A}{\Rightarrow A}$$

[15] Estamos ahora en condiciones de entender en detalle por qué, cuando ofrecimos la semántica para Funk, restringimos las valuaciones de modo que hicieran localmente válidas a las reglas inversas. Por empezar, las reglas inversas eran admisibles, y asumimos que queríamos que lo siguieran siendo. Sin embargo, si una regla admisible resulta localmente inválida, y enriquecemos el lenguaje de modo tal que sea constante-completo, la regla pasará a ser globalmente inválida. Pero entonces, suponiendo que la semántica sea correcta y completa, la regla dejará de ser admisible.

Sin embargo, se trata de metainferencias que presumiblemente serán localmente inválidas, puesto que para que una oración sea verdadera en un espacio modal, en general alcanza con que sea verdadera en el mundo actual. Por ende, que sea verdadera no es suficiente para que sea necesariamente verdadera, ni necesario para que sea posiblemente verdadera. Con lo cual, si hay operadores modales en el lenguaje, la lectura local queda excluida. Sin embargo, no todos los lenguajes no-extensionales son lenguajes modales. Vamos a regresar sobre este problema en el siguiente capítulo.

La cuestión de (b), por el contrario, sí establece una limitación para la metavalidez global. Algunas lógicas son veritativo-funcionales sólo respecto a conjuntos τ incontablemente infinitos, con lo cual es imposible tener en un lenguaje finitario una constante para cada uno de ellos. En algunos casos, podría ser suficiente con incorporar constantes de algún subconjunto contable de ellos para obtener la equivalencia entre validez global y local. Sin embargo, no deja de ser cierto que eso no será así de modo general.

5 Knot de nuevo

Estamos ahora en condiciones de completar la respuesta al problema de Knot. Ya habíamos establecido que lo que ocurría con las reglas como ($\neg$D) es que eran sólo globalmente válidas, y es por ello que dejan de valer cuando se introduce $\propto$. Sin embargo, ahora podemos ver que no había nada especial en Knot, una constante de ⅔ o de ⅓ hubiera cumplido el mismo papel. El problema para el semanticista en ese contexto no es la conectiva en particular, si no el hecho de que tenía la expectativa de que la validez global se comportara establemente en un lenguaje no funcionalmente completo.

No obstante, su caso no está perdido, puesto que si deseaban hacer que ($\neg$D) valiera "siempre y sin excepción", podría haber elegido una negación más fuerte, una que haga a las reglas deseadas no sólo globalmente, sino también localmente válidas:

	$\neg$
1	0
⅔	1
⅓	1
0	1

Esto es exactamente lo que hace el inferencialistas cuando pone explícita la regla en su cálculo. De hecho, fortalecer la negación es todo lo que necesita esta lógica para ser del todo clásica, es decir, no sólo ser clásica respecto de sus tautologías e inferencias, sino en todos los niveles.

El problema de Tonk no es meramente el de la existencia de una conectiva que haga fallar metainferencias admisibles, sino de una que trivializa un sistema estructural. Y obviamente, restringiendo el conjunto de valuaciones disponibles mediante tablas de verdad o condiciones funcionales para las conectivas, podremos agregar valideces, pero nunca validar por ejemplo el argumento de *p* a *q*.

Para ello, lo que deberíamos hacer en cambio es imponer otro tipo de restricciones sobre la clase de modelos aceptables, de modo tal que esta quede vacía. Es decir, debemos imponer condiciones contradictorias para que algo sea una función de valuación, como por ejemplo:

$\nu(\odot A)=1$ si $\nu(A)=0$

$\nu(\odot A)=0$ si $\nu(A)=0$

O las condiciones más populares:

$\nu(A\otimes B)=1$ if $\nu(A)=1$

$\nu(A\otimes B)=0$ if $\nu(B)=0$

6 Conclusión

Hay varias moralejas que extraer de esta discusión. Respecto del problema más general –y más importante- acerca de cómo caracterizar la consecuencia modelo-teórica para metainferencias, creo haber mostrado que la diferencia entre validez local y global no es demasiado relevante, y la verdadera distancia se encuentra entre validez global y absolutamente global. Idealmente deberían coincidir, pero su colapso es más delicado que el del otro par.

La validez local no deja por esto de tener interés técnico. En primer lugar, es sencilla de chequear. En segundo lugar, es estable independientemente del vocabulario. Y por último, en algunas lógicas difusas, puede ser que sea la única definición de consecuencia estable. Sin embargo, conceptualmente, e incluso en el caso en que los conceptos sean coextensionales, es más razonable pedir la preservación de validez que de confirmación.

La segunda moraleja tiene que ver con el modo en que todo ello impacta en la cuestión de Knot. La que creo que es la enseñanza con la que debemos quedarnos es que no hay una diferencia profunda entre enfoques de teoría de la prueba y enfoques modelo-teóricos sobre las conectivas; es simplemente más sencillo evitar las inconsistencias apelando a funciones de verdad que a Armonía. El aprendizaje aquí es ser más precavidas a la hora de darle demasiado peso filosófico a cosas que no son más que herramientas técnicas.

Por último, el resultado de colapso entre metainferencias globales y locales que he probado depende del hecho de que la lógica sea veritativo-funcional. Probar un resultado de correspondencia más general excede el trabajo de esta tesis. Lo que sí haremos es mostrar, en el siguiente capítulo, como el mismo razonamiento puede aplicarse a una familia de lógicas no-extensionales.

◈◈◈

- Capítulo 12 -

Operadores de determinación

◈◈◈

1 Introducción

La relación entre la lógica clásica y la no-clásica está en tensión entre dos fuerzas en conflicto. Por un lado, las lógicas no-clásicas disputan algunos principios clásicos, con lo cual se presentan como teorías rivales (*pace* pluralismo lógico). Por el otro lado, es muy usual que aquellos que las defienden argumenten en favor de su opción preferida en términos del alto grado de clasicidad, como vimos que ocurría con **ST** y los S-valuacionismos. Pero entonces ¿hasta qué punto debe la lógica clásica ser considerada un amigo o un aliado?

Hay, según creo, dos perspectivas en relación a este asunto. Una respuesta naïve es decir que la lógica ideal es la clásica, pero dado que desafortunadamente no podemos tenerla –a causa, por ejemplo, de las paradojas- debemos conformarnos con lo siguiente mejor. Nadie, hasta donde llega mi conocimiento, ha explícitamente defendido una posición tan grosera, pero a veces parece ser lo que está detrás de esas largas listas de inferencias que la propuesta rival se enorgullece de preservar.

La segunda opción es aceptar el hecho de que la teoría correcta puede llegar a ser seriamente divergente (¡podría incluso carecer por completo de inferencias válidas!), y afirmar que los viejos argumentos y leyes pueden seguir siendo, de algún modo, *materialmente válidos*; es decir, correctos respecto a ciertas áreas restringidas de conocimiento. Que la aritmética clásica sea útil/simple/elegante nos dice que hay algo a valorar en la teoría como un todo, pero no nos dice nada acerca de qué partes de esa teoría son lógicas y cuáles no lo son. Con lo cual, podemos tomar al tercero excluido como un principio aritméticamente válido, y terminaremos igual que donde empezamos, sólo que con una partición distinta del espacio de la logicalidad.

Me parece que esta perspectiva es mucho más interesante que la primera, en tanto se toma en serio la revisión de la lógica, y también parece resolver la tensión que mencionábamos antes. Además, en lugar de intentar fortalecer la lógica subyacente, podemos embarcarnos en el proceso que se conoce como *Recaptura Clásica*, y que consiste en la recuperación del razonamiento clásico para esos contextos restringidos.

La recaptura clásica puede hacerse de muchos modos, pero si uno considera que Explosión o Tercero Excluido son características de, digamos, la aritmética, entonces parece que deberían ser parte de la teoría de la misma manera en que lo son los otros axiomas. Para ello, muchas estrategias se basan en incorporar al lenguaje, respectivamente, operadores de consistencia o de determinación.

En el presente capítulo discutiremos dos cuestiones que se presentan a la hora de agregar esta clase de operadores cuando trabajamos con lógicas submetainferenciales, y cuando el vocabulario es vago. El primero de estos problemas tiene que ver con el hecho de que la presencia de estos operadores –al igual que sucedía con Knot- induce la falla de ciertas metainferencias que sin ellos sí eran válidas. Voy entonces a aplicar las consideraciones de los capítulos anteriores acerca de la validez metainferencial, y enmarcarla en el proyecto de recaptura en los distintos niveles.

El segundo problema proviene de la incorporación de conectivas vagas, no sólo a lógicas submetainferenciales, sino a cualquiera que no sea clásica. Lo que voy a mostrar es que una vez que permitimos esta clase de indeterminación en el lenguaje, es díficil contenerla.

La recaptura es un proyecto estrechamente vinculado a las lógicas paraconsistentes. Priest (2006) defiende un método que se llama *lógica mínimamente inconsistente* que consistente en tomar **LP**, pero definir consecuencia lógica como preservación de verdad en los modelos en los cuales las oraciones que reciben valor ½ son la menor cantidad posible. Este método efectúa la recaptura desde la metateoría, pero podría hacerse lo mismo desde adentro de ella. Beall (2013), por ejemplo, define la consistencia como $A \wedge \neg A \vdash \bot$.

De todas estas propuestas paraconsistentes de recaptura, hay una que revierte particular interés, conformada por una familia de sistemas que se ocupan explícitamente de lidiar con operadores que incorporan la consistencia al lenguaje objeto. En la siguiente sección presentaremos algunos de los miembros de esa familia. En la sección 3 probaré los resultados de recaptura para los diversos niveles. Finalmente, en la sección 4 argumentaré por qué el proyecto de recaptura está condenado.

2 LFIs

El origen de las lógicas de la inconsistencia formal (LFIs, por su sigla en inglés) puede rastrearse a los C-sistemas de DaCosta (1959), aunque el término aparece por primera vez en Carnielli & Marcos (2002), englobando no sólo estos sistemas sino una familia mucho más grande de lógicas paraconsistentes.

El proyecto de la recaptura empieza con el problema de cómo marcar a las oraciones privilegiadas, aquellas para las cuales sí valen los principios clásicos. En las teorías fuertemente paracompletas, uno puede agregar las instancias necesarias de tercero excluido como axiomas, y esto no genera ningún inconveniente. Dado esto, uno podría pensar que para las correspondientes teorías paraconsistentes, lo natural es agregar instancias del principio de no contradicción para predicados o proposiciones "clásicos" –es decir, agregar $\neg(A\wedge\neg A)$ para toda A que no sea problemática. Sin embargo, esto puede no ser la mejor idea.

En primer lugar, algunas lógicas paraconsistentes –sin ir más lejos, **LP**- de hecho validan el principio de no contradicción. Como ya habíamos adelantado en la introducción, el conjunto de tautologías de **LP** (entendidas como las oraciones que no reciben nunca valor 0) coincide con el de las clásicas, y por ende, agregar instancias de PNC como axiomas no sirve ningún propósito.

En segundo lugar, la falla de Explosión podría estar motivada por un requisito de buen comportamiento más estricto que la mera no contradicción. Al contrario de la tradición dialeteísta, la razón por la cual los autores que trabajan en LFIs sostienen la invalidez de EFSQ es la existencia de *contradicciones epistémicas* en teorías empíricas, y no la de *contradicciones verdaderas* –cuya existencia encuentran dudosa, si bien no imposible[16]. Una contradicción epistémica sería una oración para la cual tenemos evidencia tanto en favor de su verdad como de su falsedad, lo suficientemente convincente como para llevarnos a aceptarla a ella y a su negación, al menos de modo temporario.[17] Sin embargo, en un escenario tal no estaríamos justificados a aceptar cualquier otra oración:

> (…) podría haber proposiciones sospechosas que no involucren ninguna contradicción. La información que transmite α podría ser muy improbable, o incoherente en relación a la data previa representada por un conjunto Γ de oraciones, incluso si no hay ninguna contradicción formal derivable de α y Γ juntas. Carnielli & Coniglio (2016), página 39

[16] Ver por ejemplo, Carnielli & Rodrigues (2015).
[17] Para una discusión del concepto de contradicción epistemológica y las LFIs, ver Szmuc & Loguercio (2017).

Este segundo motivo es una de las bases en las que se apoya el enfoque en relación a la recaptura clásica seguido por lo que a veces se conoce como la *escuela brasileña de paraconsistencia*. Todas las LFIs tienen en común el hecho de que sus lenguajes contienen conectivas que internalizan la consistencia de las oraciones. Lo que significa esta internalización es que, aunque son paraconsistentes en el sentido que especificamos en la introducción, contienen un operador $\circ$, que permite recapturar Explosión para algunas fórmulas (respetan el principio de Explosión Gentil, o PEG).

En términos más formales:

Definición (*LFI*) Una LFI es una lógica paraconsistente que satisfice lo siguiente:

- Para alguna A y B

  $\circ A, A \not\models_{\mathrm{LFI}} B$

  $\circ A, \neg A \not\models_{\mathrm{LFI}} B$

- Para toda A y B

  $A, \neg A, \circ A \models_{\mathrm{LFI}} B$ (PEG)

La presentación original de las LFIs es más amplia, y considera el caso en que la consistencia de una formula está especificada, no por otra fórmulas, sino quizás por un conjunto de ellas. Dejaremos de lado esta generalización –que no tiene importancia para nuestros intereses- para simplificar la definición. También dejaremos afuera versiones más fuertes y más débiles –que varían la posición de los cuantificadores- también sin comprometer nada de lo que luego diremos.

Vamos a presentar modelo-teóricamente dos ejemplos de LFIs que nos serán útiles, pero sus presentaciones habituales son como sistemas axiomáticos (para un recorrido exhaustivo por ellos, ver por ejemplo Carnielli y Coniglio (2016)).

En primer lugar, tenemos la mínima LFI de las que se basan en **CL**, que se llama **mbC**. Vamos a tomar aquí sólo su fragmento implicacional, para facilitar la comparación con **LP**. **mbC** puede ser caracterizada por la clase de funciones de valuación v:$\mathrm{FOR}_{\mathcal{L}P\circ} \rightarrow \{0,1\}$ –donde 1 es el valor designado- restringidas de acuerdo con las siguientes cláusulas no deterministas.

- $v(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 1$ & $v(B) = 1$
- $v(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 1$ o $v(B) = 1$

- $\nu(\neg A) = 0 \;\; \Rightarrow \nu(\ A) = 1$
- $\nu(\circ A) = 1 \;\; \Rightarrow \nu(A) = 0$ o $\nu(\neg A) = 0$

Este fragmento de **mbC** es una sublógica propia de **LP**: no valida toda tautología clásica, y en particular, hay valuaciones que hacen falso a PNC:

$\neg$	$(A$	$\wedge$	$\neg$	$A)$
{1,0}	1	{0,1}	{0,1}	1
1	0	0	1	0

Esta diferencia puede ser salvada agregando las siguientes restricciones adicionales (ver Rosenblatt (2015)), que validan de Morgan y Doble Negación a la fuerza:

- $\nu(\neg(A\vee B)) = \nu(\neg A\wedge\neg B)$
- $\nu(\neg(A\wedge B)) = \nu(\neg A\vee\neg B)$
- $\nu(\neg\neg A) = \nu(A)$

Ahora el valor de verdad del PNC se hace coincidir con el de PTE: $\nu(\neg(A\wedge\neg A)) = \nu(\neg A\vee\neg\neg A) = \nu(\neg A\vee A)$. Y PTE es tautológico en **mbC**:

A	$\vee$	$\neg$	A
1	1	{0,1}	1
0	1	1	0

La lógica resultante, que es **LP** con un operador de consistencia, es también una LFI.

Por otro lado, así como podemos reforzar la negación de **mbC**, podemos fortalecer su operador de consistencia. En particular, una de las debilidades de este operador es el hecho de que no se propaga, es decir, la consistencia de ciertas fórmulas no garantiza la consistencia de su compuesto. Para alcanzar esta propagación, uno precisa agregar las siguientes restricciones:

- $\nu(\circ A)=1 \;\&\; \nu(\circ B) = 1 \Rightarrow \nu(\circ(A\vee B))=1$
- $\nu(\circ A)=1 \;\&\; \nu(\circ B) = 1 \Rightarrow \nu(\circ(A\wedge B))=1$
- $\nu(\circ A) = 1 \;\; \Rightarrow \nu(\circ\neg A) = 1$
- $\nu(\circ A) = 1 \;\; \Rightarrow \nu(\circ\circ A) = 1$

La lógica resultante se llama **mbCciw**, pero la vamos a llamar cariñosamente **mbC+**. Es la LFI más pequeña tal que su operador de consistencia obedece $\nu(\circ A) = 1 \Leftrightarrow \nu(\neg A) \neq \nu(A)$.

La utilidad de los operadores de consistencia va más allá de la mera posibilidad de expresar la validez restringida de Explosión: sirven para recuperar la lógica clásica en su totalidad. Hay dos modos de hacer esto. El primero es usar al operador para definir nuevas operaciones que se comporten de acuerdo con las reglas o principios deseados. En este caso, una negación fuerte $\sim_C$ (relativa a una fórmulas C usada para producir una constante de falsum definida como sigue: $\sim_C A \stackrel{\text{def}}{=} A \rightarrow (C \wedge (\neg C \wedge \circ C))$. El otro camino es tener a las reglas y principios formulados en el mismo lenguaje, pero restringidos a contextos consistentes mediante premisas adicionales, en lo que se conoce como *teoremas de ajuste de derivabilidad* (DAT)

Aunque desde el punto de vista técnico ambas estrategias son equivalentes, parece haber algún peso filosófico en favor de la segunda. La razón es que es sin dudas obvio que Explosión es válido de acuerdo con *algún* operador; lo que está en discusión es si la negación de nuestro lenguaje natural la valida o no. Por ende, parece más coherente con nuestro proyecto, y con la idea de que la explosividad es una propiedad material, agregar los supuestos de consistencia.

A modo de ejemplo, la siguiente es una manera de recapturar todo argumento clásicamente válido en **mbC+**, de acuerdo con la segunda estrategia. Primero, necesitamos que ambas teorías estén formuladas en el mismo lenguaje, u ofrecer una traducción adecuada entre ambos. En este caso, vamos a tomar a **CL∘** como **CL** formulada con la signatura $\Sigma_{P\circ}$, donde $\circ$ es como una especie de operador de Top, en el sentido de que mapea toda fórmula a 1. La justificación detrás de ello es que, en los lenguajes clásicos, todo es bien comportado, con lo cual afirmar la consistencia de una fórmula debería ser siempre verdadero. Dado que Top es definible en **CL**, hay una traducción entre **CL** y **CL∘**, y podemos cómodamente llamar a **CL∘** "lógica clásica".

Diremos que un modelo de **mbC+** es *clásica con respecto a Γ* si no es el caso de que tanto A como $\neg A$ reciban valor 1, para toda A que sea una subformula de una fórmula en Γ. Si un modelo ν es clásico con respecto a algunas fórmulas, y ν^* es clásico con respecto a un superconjunto de ellas, diremos que ν^* es una *expansión* de ν.

Dado que los modelos clásicos son clásicos respecto de cualquier conjunto, y dado que en todo modelo de **mbC+** que sea clásico con respecto a Γ, todas las fórmulas $\circ A$ tales que $A \in \Gamma$ reciben valor 1, el conjunto de valuaciones de **CL** resulta ser un subconjunto de las de **mbC+**. Sin embargo, no todos los modelos de **mbC+** son clásicos, con lo cual probaremos dos hechos respecto del comportamiento del operador de consistencia, y luego mostraremos cómo se produce la recaptura:

Hecho 5 (*Propagación hacia arriba de la consistencia*) Si un modelo ν de **mbC+** es clásico respecto de un conjunto de variables proposicionales, es clásico respecto de toda fórmula que las contenga sólo a ellas.

Prueba: Por inducción sobre la complejidad de la fórmula. □

Hecho 6 (*Expansión de la consistencia*) Si un modelo ν de **mbC+** es clásico respecto de Γ, entonces dado un superconjunto Π de Γ, ν puede ser expandido a un modelo ν^* equivalente a él respecto de Γ, pero que también es clásico respecto de Π.

Prueba: Sea ν un modelo clásico respecto de Γ, y Π un superconjunto de él. Para toda $p \in \{\Pi\}_p - \{\Gamma\}_p$ si $\nu(p)=\nu(\neg p)$, cambiamos el valor de p a 1 (0). Dada la propagación de la consistencia, este modelo ν^* es clásico respecto de Π. □

Hecho 7 (*Recaptura clásica DAT*) $\Gamma \vDash_{CL\circ} A$ si y sólo si $\circ\{\Gamma\}_p, \circ\{A\}_p, \Gamma \vDash_{mbC+} A$

Prueba. De derecha a izquierda es inmediato por la inclusión del conjunto de modelo de **CL∘**-en los de **mbC+**. De izquierda a derecha, suponemos que hay un contramodelo de **mbC+** para $\circ\{\Gamma\}_p, \circ\{A\}_p, \Gamma \Rightarrow A$, esto es, una ν tal que $\nu(B)=1$ para toda $B \in \Gamma$, $\nu(A)=0$, y que es clásica respecto de $\{\Gamma\}_p \cup \{A\}_p$. Debido a la propagación de la consistencia, ν es clásica respecto de Γ y A. Por ende, debido a la expansión de la consistencia, ν puede ser expandida a una ν^* equivalente a él respecto de Γ y A, pero que es clásico respecto de todas las fórmulas. Por lo tanto, ν^* es un **CL∘**-contramodelo para $\Gamma \Rightarrow A$. □

Aun cuando pueda haber otros conjuntos de fórmulas circuladas que sean suficientes para recuperar un argumento clásico, esta elección parece tener motivación filosófica. Por un lado, nos da una receta general, que funciona para cualquier argumento de esta lógica. Por el otro, el conjunto de variables proposicionales que una teoría acepta fija, de algún modo, aquello acerca de lo cual es la teoría, con lo cual si surge algún tipo de indeterminación, debería ocurrir en el nivel atómico.

3 Recaptura y lógica submetainferencial

A lo largo de esta tesis hemos considerado, por un lado, lógicas subestructurales, y por el otro, a la familia s-valuacionista. Ambos grupos comparten el hecho de que abandonan ciertas metainferencias clásicas -en el caso de **ST**, lo único que de hecho es preciso abandonar. Como ya dijimos, el supervaluacionismo es un poco menos clásico, en el sentido de que los argumentos que se conservan estrictamente son sólo los que tienen conclusiones simples, mientras que en el caso del subvaluacionismo, sólo los que poseen premisas únicas. Por ello, vamos a mostrar primero cómo sería la recaptura de nivel uno en estos casos, para luego pasar al nivel metainferencial

3.1 Recaptura de primer nivel

A pesar de que no es necesario efectuar una recaptura de primer nivel en **ST** -ya que las inferencias válidas son las mismas de **CL**- vamos a empezar definiendo el operador que usaremos luego para las metainferencias. Incorporar un símbolo que se comporte de la manera deseada a **ST** es de hecho muy sencillo, y puede hacerse mediante una función de verdad bivalente:

$\nu(\circ A)$= 1 si y sólo si $\nu(A)$=1 o $\nu(A)$=0

0 en otro caso

En el caso del s-valuacionismo, claramente esto no podrá hacerse de modo extensional. Dado que la semántica de por sí no es veritativo-funcional, $\circ$ deberá ser una especie de operador modal, que indique que la oración a la que se aplica es superverdadera o superfalsa.

La presencia de estos operadores en teorías s-valuacionistas no es inusual, aunque la norma en realidad es incorporar un operador que significa *verdad determinada*, representada con el signo □. El tipo de interpretación que recibe □ depende de cómo se entiendan los casos limítrofes, y en particular, de cuáles sean nuestras ideas acerca de la vaguedad de orden superior. En pos de la simplicidad, asumamos que no existe tal cosa, con lo cual no tenemos que preocuparnos por una posible diferencia entre □*A* y □□*A*. Esto quiere decir que podemos definir la semántica de □ sin necesidad de introducir relaciones de accesibilidad entre los puntos del espacio: □*A* es verdadera en un punto si y sólo si es verdadera en todo punto.

Aquí, en lugar de tomar a □ como primitivo, vamos a seguir utilizando la terminología de las LFIs, y definir al cuadrado del siguiente modo:

$$\Box A \overset{\text{def}}{=} \circ A \wedge A$$

Llamamos **SB∘** a la lógica de los s-modelos para $\mathcal{L}_{P\circ}$, con la interpretación mencionada de ∘, y una relación de consecuencia subvaluacionista. Vamos a continuación a probar resultados de recaptura, y lo haremos sólo para el subvaluacionismo porque (i) es una teoría menos discutida que el supervaluacionismo, pero igualmente interesante, (ii) **SB** es una lógica paraconsistente, con lo cual puede transformarse en una LFI enriqueciendo su lenguaje. **ST**, como dijimos, no precisa recaptura de primer nivel, pero respecto del supervaluacionismo, el proceso dual se aplica sin mayores dificultades.

Es fácil chequear que ∘ satisface los requisitos para ser un operador de consistencia. En primer lugar, no es cierto en general que $\{\circ A, A\}$ y $\{\circ A, \neg A\}$ impliquen cualquier fórmula B, dado que para algunas instancias de A y B, hay modelos en los cuales A es verdadera (falsa) en todo punto, y B en ninguno. En segundo lugar, no hay ningún modelo en el cual $\{\circ A, A, \neg A\}$ sean todas subverdaderas para ningún A, dado que para que $\circ A$ sea subverdadera, es necesario que A o $\neg A$ sean superverdaderas, y la superverdad de una de ellas impide la de la otra. Esto alcanza para que el PEG sea válido, con lo cual **SB∘** resulta ser una LFI.

Queremos entonces probar un resultado similar al que probamos acerca de **mbC+**, y para ello necesitamos que ambas lógicas compartan el lenguaje. Como antes, tomaremos a **CL∘**, cuyos modelos son un subconjunto de los de **SB∘** (i.e., aquellos en los cuales el espacio contiene un solo punto). Para la otra dirección, tenemos que identificar qué modelos de **SB∘** pueden transformarse en clásicos. Llamamos a un modelo de **SB∘** *clásico respecto de Γ* si todos los puntos acuerdan en el valor que asignan a las fórmulas de Γ, y a todas sus subfórmulas. La relación de expansión entre modelos permanece igual.

Hecho 8 (*Propagación de la consistencia hacia arriba*) Si un modelo **SB∘** P es clásico respecto de un conjunto de variables proposicionales, es clásico respecto de toda fórmula que las contenga sólo a ellas.

Prueba: Por inducción sobre la complejidad de la fórmula. □

Hecho 9 (*Expansión de la consistencia*) Si un modelo P de **SB∘** clásico respecto de Γ, entonces dado un superconjunto Π de Γ, P puede ser expandido a un modelo P^* equivalente a él respecto de Γ, pero que también es clásico respecto de Π.

Prueba: Sea P un modelo clásico respecto de Γ, y Π un superconjunto de él. Para toda $p\in\{\Pi\}_p$-$\{\Gamma\}_p$ si hay puntos tales que $\nu_1(p)\neq\nu_2(p)$, reemplazamos ν_2 por otro punto ν_3 en el que el valor de p sea igual a ν_1. Dada la propagación de la consistencia, este espacio P* es clásico respecto de Π. □

Hecho 10 (*Recaptura clásica DAT*) $\Gamma \vDash_{CL\circ} A$ si y sólo si $\circ\{\Gamma\}_p$, $\circ\{A\}_p$, $\Gamma\vDash_{SB\circ}A$

Prueba. De derecha a izquierda es inmediato por la inclusión de los conjuntos de modelos.

De izquierda a derecha, suponemos que hay un contramodelo de **SB∘** para $\circ\{\Gamma\}_p$, $\circ\{A\}_p$, $\Gamma\Rightarrow A$, esto es, un espacio P tal que para toda $B\in\Gamma$, hay un ν en el que $\nu(B)$=1, y $\nu(A)$=0 en toda ν, y que es clásico respecto de $\{\Gamma\}_p\cup\{A\}_p$. Debido a la propagación de la consistencia, P es clásico respecto de Γ y A. Por ende, debido a la expansión de la consistencia, P puede ser expandida a una P^* equivalente a él respecto de Γ y A, pero que es clásico respecto de toda fórmula. Cualquier punto en ese espacio es un **CL∘**-contramodelo para $\Gamma\Rightarrow A$. □

Terminamos esta sección con una breve aclaración. Dado que, de acuerdo con nuestra definición, en **CL∘** $\nu(\Box A)=\nu(A)$, alguien podría temer que estamos traduciendo verdad en **CL∘** como *superverdad* en **SB∘**, lo cual parece desvirtuar la idea detrás de la definición de consecuencia lógica de **SB∘**. Sin embargo, este problema es sólo ilusorio, dado que **CL∘**, es también cierto que $\nu(\Diamond A)=\nu(A)$, donde $\Diamond$ está definido del modo usual a partir de $\Box$. Lo que esto significa es que la verdad colapsa con la superverdad y la subverdad en contextos clásicos, lo cual es perfectamente razonable.

3.2 Recaptura total

Como veíamos en el capítulo 7, Williamson notó que el agregado de operadores modales al supervaluacionismo induce la falla de algunas metainferencias. Ahora que contamos con las distinciones conceptuales apropiadas, podemos decir que la que depende de esos operadores es la falla *global*.

No es entonces sorprendente que el mismo fenómeno ocurra en la lógica dual. Si en **SG** falla ($\vee$I), la correspondiente regla para **SB** sería ($\wedge$D), como muestra la siguiente instancia inválida:

$$\frac{\Diamond\neg p\wedge\Diamond p\Rightarrow\neg p \qquad \Diamond\neg p\wedge\Diamond p\Rightarrow p}{\Diamond\neg p\wedge\Diamond\Rightarrow p\wedge\neg p}$$

Dada la equivalencia previamente mencionada en **CL∘** entre A y $\Diamond A$, la premisa de la conclusión de la metainferencia es una contradicción, con lo cual la regla será **CL∘**-válida.

En el caso de **ST**, la mera incorporación de $\circ$ no genera la falla de ninguna metainferencia global. Sin embargo, sabemos que la regla de Corte es localmente inválida, y que sería globalmente inválida si nuestro lenguaje tuviera por ejemplo una constante de ½, con lo cual la recaptura metainferencial es un proyecto legítimo.

De hecho, no es solamente la transitividad la que se pierde. En (2015) Barrio, Rosenblatt y Tajer, muestran que hay un sentido en el cual **ST** es más cercana a **LP** que a **CL**. En el caso de ellos, el lenguaje no cuenta exactamente con una constante atómica de ½, sino que incorpora un predicado veritativo transparente, junto con oraciones autoreferenciales. El modo de obtener autoreferencia no es mediante una teoría de la sintaxis –por ejemplo, basada en la aritmética, como hacíamos en el capítulo 6- sino metateóricamente, fijando la interpretación de ciertos nombres que refieren a ciertas proposiciones (en particular, $\ulcorner\lambda\urcorner$ como el nombre de la oración $\neg Tr\ulcorner\lambda\urcorner$). Estos términos funcionan como "nombres lógicos", en el sentido de que su interpretación no varía de acuerdo a los modelos, y por ende λ funciona como una constante de ½.

En primer lugar, Barrio et al. (2018) prueban que las metainferencias globalmente válidas de **ST** coinciden con los argumentos válidos de **LP**, apelando a un método de traducción similar al primero que veíamos en el capítulo anterior, En segundo lugar, muestran que los argumentos válidos de **LP** corresponden con lo que llaman la lógica externa de **ST**, es decir el conjunto de reglas derivables de la forma:

$$\frac{\Rightarrow\Gamma}{\Rightarrow\Delta}$$

Que la recaptura en el caso de **ST** es posible fue probado por Barrio, Pailos y Szmuc en (2018). No voy a detenerme en el detalle, pero a modo de ejemplo, podemos ver que la regla de Corte se transforma en la siguiente regla, que ellos llaman *Corte Gentil*:

$$\frac{\Gamma, A\Rightarrow\Delta \qquad \Pi\Rightarrow\Sigma, A \qquad \Rightarrow\circ A}{\Gamma, \Pi\Rightarrow\Sigma, \Delta} \quad \text{(Corte G)}$$

Respecto del supervaluacionismo, sus defensores usualmente responden a la falla de metainferencias clásicas, no proponiendo una recaptura, sino en la línea de Keefe (2000), página 180: "cuando no hay un operador D [□ en nuestra notación] involucrado, las reglas de inferencia clásicas normales permanecen intactas". El problema es, desde el punto de vista del proyecto de recaptura –y a diferencia de lo que ocurre cuando el objetivo es sólo definir los casos limítrofes- que lo que buscábamos era lo contrario a alejarnos de la lógica clásica. Lo que debería ocurrir no es que las reglas clásicas sirvan cuando no hay operadores de consistencia en juego, sino exactamente lo contrario. Parecería que estamos desnudando a un santo para vestir a otro.

Sin embargo, es posible reparar este nuevo problema apelando al mismo operador, y la estrategia es básicamente la misma que antes. Por ejemplo, para recuperar ($\wedge$D), sólo precisamos agregar los siguientes supuestos de consistencia:

$$\frac{\circ\{\Gamma\}_p,\ \circ\{A\}_p,\ \Gamma\Rightarrow A \qquad \circ\{\Gamma\}_p,\ \circ\{B\}_p,\ \Gamma\Rightarrow B}{\circ\{\Gamma\}_p,\ \circ\{A\}_p\ \circ\{B\}_p,\ \Gamma\Rightarrow A\wedge B}$$

Esta metainferencia modificada es ahora globalmente válida. Y de hecho podemos probar fácilmente el siguiente resultado general:

Teorema (*Recaptura total DAT*)

$$\frac{\Gamma_1\Rightarrow A_1 \quad \ldots \quad \Gamma_n\Rightarrow A_n}{\Gamma_1\ldots\Gamma_n\Rightarrow B}$$ es g-**CL∘**-válida si y sólo si

$$\frac{\circ\{\Gamma_1\}_p,\ \circ\{A_1\}_p,\ \Gamma_1\Rightarrow A_1 \quad \ldots \quad \circ\{\Gamma_n\}_p,\ \circ\{A_n\}_p,\ \Gamma_n\Rightarrow A_n}{\circ\{\Gamma_1\}_p,\ldots\ \circ\{\Gamma_n\}_p,\ \circ\{B\}_p,\ \Gamma_1\ldots\Gamma_n\Rightarrow B}$$ es g-**SB∘**-válida

Prueba: De derecha a izquierda, si hay una instancia en la cual las premisas de la primera metainferencia son **CL∘**-válidas pero la conclusión no, entonces (a) por recaptura clásica, las premisas de la segunda metainferencia deben ser **SB∘**-válidas, y (b) por la inclusión de los modelos, la conclusión de la segunda metainferencia debe ser inválida.

De izquierda a derecha, si hay una instancia en la cual las premisas de la segunda metainferencia son **SB∘**-válidas pero la conclusión no, entonces (a) por la inclusión de los modelos, las premisas de la primera metainferencia deben ser **CL∘**-válidas, y (b) por recaptura clásica, la conclusión de la primera metainferencia debe ser **CL∘**-inválida. □

Podría parecer quizás objetable el hecho de que estas versiones modificadas de las reglas no son puras, en el sentido de que las premisas involucran a $\circ$ además de las conectivas a definir. Y si bien no estamos ofreciendo una teoría de la prueba, sino solamente considerando qué metainferencias son válidas y cuáles no, podríamos querer convertir esto en un sistema formal propiamente dicho. Sin embargo, vale la pena recordar cómo habíamos empezado este capítulo, diciendo que, desde este punto de vista, las reglas tienen una validez restringida *porque no son lógicas.* Con lo cual, ($\wedge$D) no sería la verdadera definición de la conjunción, sino un principio materialmente válido que la involucra.

Por ende, parece que podemos evitar el desastre, e incluso más, no necesitamos recursos adicionales para hacerlo ¿Reaparece el problema en cada nivel? Una versión del ejemplo anterior muestra que la respuesta es afirmativa. Tomemos a la doble línea como representando la consecuencia global para metainferencias (tanto las premisas como la conclusión de la metametainferencia no tienen premisas en este caso):

$$\cfrac{\cfrac{}{\Diamond\neg p\wedge\Diamond p\Rightarrow p} \qquad \cfrac{}{\Diamond\neg p\wedge\Diamond p\Rightarrow\neg p}}{\cfrac{}{\Diamond\neg p\wedge\Diamond p\Rightarrow p\wedge\neg p}}$$

Esta metametainferencia es g-**CL∘**-válida pero g-**SB∘**-inválida, pero podemos usar el mismo truco que antes aquí también. Esto quiere decir que, desde el punto de vista técnico, el problema está resuelto. No obstante, resta resolver la cuestión filosófica, que es la pregunta por si valió la pena introducir el operador de recaptura, si el costo fue infectar a los niveles superiores con un problema que estaba ausente en ellos.

3.3 Exonerar al operador de determinación

En teoría, habría dos posibles lecciones que uno podría extraer de esta situación en relación al s-valuacionismo. Por un lado, podría ver la pérdida de metainferencias clásicas como una *reductio* de la posibilidad de la recaptura clásica. La idea sería que el *payoff* de recuperar versiones restringidas de inferencias de primer nivel es negativo, si al hacerlo perdemos inferencias del segundo, aun cuando tengamos los medios para recuperarlas en versión restringida también.

Sin embargo, en el capítulo anterior ya hemos visto que no puede considerarse que las metainferencias globales sean las que caracterizan a la validez metainferencial de modo estable cuando el vocabulario es pobre. Podemos ver que las siguientes inferencias no son localmente válidas en **SB**, **SG** y **ST** respectivamente, sin necesidad de apelar a ningún operador en particular:

$$\frac{\Rightarrow q \qquad \Rightarrow \neg q}{\Rightarrow q \wedge \neg q} \qquad \frac{q \Rightarrow \qquad \neg q \Rightarrow}{q \vee \neg q \Rightarrow} \qquad \frac{\Rightarrow q \qquad q \Rightarrow}{\Rightarrow p}$$

Para verlo, pensemos que un modelo confirma una inferencia en **SB** si o bien hace superfalsa a las premisas o bien subverdadera a la conclusión, y en **SG** si hace o bien hace subfalsa a las premisas o bien superverdadera a la conclusión. Claramente hay en ambos casos modelos que confirman las premisas y ninguno confirma las conclusiones.

Una diferencia notable entre el caso del s-valuacionismo y el de la lógica de Tonk es que las primeras no son veritativo-funcionales. En efecto, el enriquecimiento del vocabulario no se produjo en virtud del agregado de una constante de tercer valor semántico, puesto que no hay funciones trivalentes en juego.

Es cierto que en algún sentido, sí hay un tercer estatus, que es el que tiene una oración que es verdadera en un punto y falsa en otro. Ese estatus no puede ser expresado mediante la negación (al igual que sucede en **LP** y **K3**) sino que es preciso incorporar algo al lenguaje. Pero “expresar” el tercer valor puede significar diversas cosas. Sabemos que si la lógica es veritativo-funcional, basta para expresar los valores que haya oraciones que tengan ese estatus en todo modelo. El análogo a la completitud de constantes en el caso del s-valuacionismo, dado que ya tenemos oraciones que son superverdaderas o superfalsas en todo modelo, sería una oración λ que fuera subverdadera y subfalsa en todo modelo. Si reemplazamos en las inferencias que aparecen más arriba la variable q por λ, el resultado es una metainferencia globalmente inválida.

No obstante, el operador de determinación no es –ni sirve para definir- una constante de ese tipo, del mismo modo en que Knot tampoco lo era. Es decir, la completitud de constantes –o su análogo no-extensional- es condición suficiente pero no necesaria para el colapso entre validez local y global. Sin ir más lejos, las conectivas vagas pueden cumplir ese rol –como es el caso con Tonk y la regla de Corte. Una exploración completa de las condiciones para zanjar esta distancia en lenguajes de diversos tipos es una tarea que dejaré como trabajo futuro.

Antes de pasar a la siguiente sección, vamos a finalizar con una aclaración sobre el resultado de recaptura. Uno podría esperar que **SB∘** valide, no todo argumento **CL∘**-válido, sino todas aquellos que pertenezcan a una teoría formulada con un lenguaje modal *bona fide*, y una noción de consecuencia para inferencias local, como **S5**. Esto implicaría que **SB∘** no es más débil que la lógica clásica, como sucede en nuestro caso, sino incomparables dado que invalida EFSQ, pero valida $\Diamond A \Rightarrow A$, cosa que **S5** no hace. Por ende, para probar un resultado de colapso deberíamos enriquecer las premisas del lado "clásico" también.

No obstante, esta traducción, contrariamente a la que usamos, es más dudosa en este contexto. En **SB∘**, se supone que □ signifique "consistente y verdadero", mientras que en **S5**, donde todo es consistente pero no todo tiene un cuadrado adelante, debe significar algo distinto (tal como verdad necesaria, o algo así). Por ende, incluso si ofrecemos las condiciones para el colapso, no se entiende cuál sería la importancia filosófica de un resultado tal, dado que en última instancia estamos lidiando con conceptos diferentes.

4 Operadores de determinación y conectivas vagas

Todo lo dicho en el presente capítulo demuestra que agregar operadores de consistencia en el contexto de una teoría s-valuacionista o estricto-tolerante no es un problema en sí mismo. Sin embargo, ahora veremos que agregarlos en la presencia de conectivas vagas plantea una cuestión particular.

Como veíamos, la prueba de recaptura clásica supone que agreguemos como premisas todas las variables proposicionales involucradas, con el operador de bola adelante. Esto garantizaba que teníamos un contexto clásico a causa de los resultados previos de propagación y expansión de la consistencia. Pero en presencia de conectivas vagas, ambas fallan:

Hecho 11. En $\mathcal{L}_{\oplus}$, no se cumplen ni propagación ni expansión de la consistencia.

Prueba: Para la propagación, tenemos que si $\nu(p)=1$ y $\nu(q)=0$, resulta que $\nu(p \oplus q)=½$. Por su parte, para la expansión, tomamos el mismo modelo ν, el conjunto $\Gamma=\{p, q\}$ y su superconjunto $\Pi=\{p, q, p\oplus q\}$. No hay ninguna expansión de ν que sea clásica respecto de Π y equivalente a ν respecto de Γ. □

No sólo de hecho fallan en este lenguaje en particular, sino que *tienen* que fallar en cualquiera, debido justamente a la anormalidad.

La falla de propagación y expansión tiene como consecuencia que el agregar las premisas con bola para variables proposicionales no será suficiente para recapturar inferencias. A modo de ilustración, tomemos una teoría paraconsistente como **LP** o **SB**, en la cual falla MP. El siguiente es un ejemplo de una instancia clasicizada de esa inferencia, que sigue siendo inválida, dado que la valuación que asigna 0 a p satisface las premisas y no la conclusión:

$$(p\otimes\neg p)\to p,\ p\otimes\neg p,\ \circ p \Rightarrow p$$

Sin embargo, agregar los átomos circulados no es la única manera posible de efectuar la recaptura. En este ejemplo en particular, si agregamos $\circ(p\otimes\neg p)$ a las premisas, estas dejan de ser satisfacibles, con lo cual la instancia pasa a ser válida. Esto podría sugerir como generalización el agregar siempre las premisas circuladas a la izquierda. Una estrategia de este tipo funcionará en el caso de **LP** o **SB**, en donde los contraejemplos a inferencias clásicas provienen de casos en los cuales las premisas pueden adoptar el valor ½ o subverdadero. No obstante, eso no es cierto de toda lógica que pueda tener conectivas anormales. En el caso de **K3**, los contraejemplos provienen de casos en los cuales la conclusión puede valer ½, con lo cual sería preciso circular las conclusiones.

No sólo eso, sino que en los lenguajes que estamos considerando, sí se cumple la propagación de la consistencia hacia abajo. Esto es, no hay conectivas que reciban valores clásicos a pesar de que ninguno de sus componentes lo hace –como una negación fuerte, por ejemplo. Sin embargo, podríamos perfectamente tener operadores de ese estilo, ya sean normales como vagos. En ese caso, circular las fórmulas complejas no sería suficiente para obtener la clasicidad de las simples.

En este punto, una idea podría ser agregar a la teoría la versión circulada de *todas* las fórmulas del lenguaje, que en los casos que veíamos en las secciones anteriores sí sería sin dudas suficiente. Sin embargo, la teoría resultante podría no tener modelo: por ejemplo, para algunas fórmulas A y $\neg B$ que la teoría pruebe, vamos a tener la fórmula $\circ(A\otimes B)$, que es inconsistente con ellas.

Todo esto no quiere decir que no haya *algún* conjunto de fórmulas que puedan agregarse y que permitan efectuar la recaptura. De hecho, en las LFIs más débiles, como **mbC**, tampoco se cumplen la expansión y la propagación. Sin embargo, no habrá un método general, ello dependerá de cada lenguaje y de cada lógica.

5 Conclusión

En este capítulo he mostrado que el proyecto de recaptura clásica se enfrenta con dos inconvenientes cuando queremos ejecutarlo en el ámbito de una lógica submetainferencial, aunque ambos tienen en algún sentido solución.

El primero de ellos es el hecho de que si partimos de un lenguaje pobre, ciertas inferencias que eran globalmente válidas pueden dejar de serlo. No obstante, este problema tiene dos salidas posibles. Si lo que molesta es la inestabilidad de la validez global, basta con tener un lenguaje rico desde el comienzo, lo cual tanto para **ST** como para los s-valuacionismos es muy fácilmente alcanzable –basta con una constante de ½ o de subverdad y subfalsedad. Si lo que molesta en cambio es la invalidez misma de la metainferencia en cuestión, la salida es simplemente adoptar otra teoría de modelos, una que no invalide siquiera localmente las inferencias deseadas.

El segundo de los problemas afecta a las lógicas submetainferenciales, pero no sólo a ellas, puesto que en realidad proviene de la mera incorporación de conectivas vagas. La cuestión aquí es que, por más robusto y determinista que sea el resto del vocabulario, la presencia de ellas arruina la posibilidad de efectuar una recaptura sencilla, meramente agregando variables proposicionales circuladas.

Sin embargo, más allá de la cuestión técnica, la recaptura en presencia de vocabulario vago toma un cariz particular. Ya no se trata de restringir los contextos a aquellos en donde no haya gente indeterminadamente alta. La indeterminación es, en algún sentido, ineludible, está incrustada en el lenguaje puro. Y quizás por esto mismo es que el proyecto pierde sentido. No sólo eso, sino que si el interés es conservar las inferencias clásicamente válidas, éste puede satisfacerse mediante la adopción de **ST** –ciertamente, con el costo de patear la no-clasicidad un escalón hacia arriba.

Conclusión

A lo largo de esta tesis, he mostrado que el concepto de una conectiva vaga es no sólo inteligible, sino formalmente interesante e iluminador respecto de otras discusiones filosóficas:

- En primer lugar, poniendo sobre la mesa la discusión acerca de cuantificadores vagos. Si no tenemos problema en aceptarlos a ellos, no deberíamos tener problema en aplicar el mismo concepto a sus versiones finitarias, que además son expresables mediante tablas de verdad y no dependen en absoluto del modelo.
- En segundo lugar, mostrando que no es preciso modificar nuestra comprensión previa de lo que es la vaguedad, sino que basta con entender a los operadores lógicos como predicados. De este modo, nos aseguramos que no estamos cambiando de tema al hablar de conectivas vagas, y que en principio podemos trasponer a ellas básicamente cualquier teoría que haya sido desarrollada con predicados en mente.
- En tercer lugar, dando una caracterización formal de la vaguedad de las conectivas en tanto tales –la anormalidad- que le da especificidad, y por ende, interés, al fenómeno.
- En cuarto lugar, mostrando que al pensar en las conectivas vagas como anormales, podemos entender al problema de Tonk bajo una nueva perspectiva.

Al mismo tiempo, he defendido que la lógica no transitiva –y en particular, **ST**- nos provee la mejor herramienta para tratar con conectivas vagas:

- En primer lugar, porque es elegante y sencilla, tanto en su presentación sistemática como en sus modelos.
- En segundo lugar, porque permite resolver las paradojas semánticas operacionales, y al mismo tiempo la paradoja de la validez y toda aquella que no dependa de reglas para las conectivas.

- En segundo lugar, porque permite construir una teoría de la vaguedad que (a) habilita la validez del principio de tolerancia y las conexiones penumbrales y (b) permite dar cuenta de la paradoja de Sorites sin responsabilizar a ninguna conectiva en particular.
- En tercer lugar, porque permite incorporar conectivas vagas que serían trivializadoras para sistemas con Corte, y tratarlas como conectivas vagas.

Y en tanto la adopción de una lógica no transitiva implica el abandono de principios metainferenciales, he sostenido que la relación de consecuencia semántica debe ser entendida globalmente:

- En primer lugar, porque se trata de un concepto fundado, en tanto la preservación de la validez inferencial es un desiderátum razonable, y en tanto es el correlato exacto de la admisibilidad.
- En segundo lugar, porque el concepto local es demasiado fuerte, en tanto invalida la regla de sustitución uniforme, y las reglas para operadores modales, que deberían ser consideradas válidas.
- En tercer lugar, porque a pesar de ser inestable, en la mayoría de los casos esa inestabilidad es fácilmente remediable mediante la incorporación de constantes veritativas.

Por último, he argumentado que el proyecto de recaptura clásica, si bien puede ser llevado a cabo en presencia de vocabulario vago, es puesto en cuestión por él:

- En primer lugar, porque no puede operarse de modo sencillo, agregando como premisa a las teorías que las fórmulas atómicas son todas clásicas.
- En segundo lugar, porque al haber conectivas vagas, deja de tener sentido la idea de restringirse a contextos clásicos.
- En tercer lugar, porque las conectivas vagas motivan la adopción de una lógica que no precisa de ningún operador de consistencia para retener las inferencias clásicas, al menos a nivel inferencial.

Este proyecto significa entonces abrir una nueva puerta a la imprecisión, del mismo modo en que lo hemos hecho cuando permitimos que por la presencia de predicados vagos fallaran primero ciertas inferencias, y luego ciertas metainferencias. No se trata de abandonar la lógica formal y sus herramientas matemáticas en favor de la indeterminación, sino de aprender a domesticarla. Y creo que vale la pena, puesto que cada salto que hemos dado en esa dirección no ha sido más que hacia adelante.

Apéndice

Trabajo futuro

Las siguientes son algunas de las preguntas que este trabajo ha dejado abiertas, y que guiarán posibles trabajos futuros.

(a) Conectivas anormales

Por el hecho de que la mayor parte del trabajo en lógicas no clásicas consiste en generalizar las operaciones tradicionales, de modo que contemplen casos que **CL** no contempla, las conectivas anormales han recibido atención casi nula. Este trabajo ha generado una nueva motivación para estudiarlas, sobre la base de una nueva interpretación de ellas, según la cual son operaciones vagas.

Por otro lado, recordemos que ha quedado pendiente el problema de la mimetización de la vaguedad lógica. Este problema era el que surgía por el hecho de que una expresión intuitivamente vaga –como "aproximadamente 5,5"- podía tener una representación normal en la semántica. Para solucionarlo, probablemente sea necesario desarrollar semánticas bidimensionales.

(b) Lenguaje natural

No deja de ser llamativo que, mientras que los cuantificadores vagos son perfectamente habituales en el lenguaje natural, no parece haber un correlato claro para las conectivas de este tipo. Esto podría recibir distintas explicaciones. Por ejemplo, podría ser que fueran expresiones homófonas a otras y por eso pasen desapercibidas, o podría ser simplemente que por algún motivo sólo se expresen como predicados, o podría ser que sólo ocurran como cuantificadores vagos aplicados a oraciones.

Si bien se trata de un proyecto sumamente interesante, es probable que un análisis de estas cuestiones pertenezca más bien al ámbito de la lingüística que al de la lógica o la filosofía.

(b) Aplicaciones lógicas

Bajo cierto punto de vista, para aceptar a Tonk como una conectiva legítima alcanza con demostrar que puede ser incorporada a algún sistema sin generar trivialidad. Sin embargo, esto no implica que Tonk deba usarse para algo. Podría ser que aunque las conectivas vagas no se presenten habitualmente en el lenguaje natural, puedan cumplir ciertas funciones en teorías formales.

Investigar posibles aplicaciones de Tonk es entonces una tarea que este trabajo deja pendiente. Došen (1989) responde a la pregunta acerca de qué es una conectiva lógica diciendo que se trata del vocabulario que puede en última instancia ser analizado en términos estructurales. Funcionan como signos de puntuación que explicitan en el lenguaje objeto los aspectos básicos de la en las deducción. Sambin et al. (2000) llaman a la idea de que toda constante lógica debe ser introducida mediante ecuaciones que la hagan equivalente a una expresión del metalenguaje *Principio de reflexión*[18].

En el cálculo de **CL**, la conjunción refleja la coma a la izquierda, la disyunción refleja la coma a la derecha, y el condicional refleja la relación de implicación lógica. Respecto de la negación, Došen presenta un sistema con $\perp$ -que refleja el conjunto vacío de conclusiones- y define $\neg$ a partir de *falsum* y el condicional. En **ST**, las reglas de $\wedge$ y $\vee$ son iguales que en **CL**. Esto quiere decir que también reflejan, respectivamente, la coma a la derecha y a la izquierda. Sin embargo, no son las únicas conectivas que cumplen esta función. Funk también lo hace, y no sólo eso, sino que refleja ambas comas a la vez.

Analizar la importancia que pueda tener Funk como reflejo estructural de ST es entonces otra vía de exploración posible.

(d) Caracterización de la normalidad en términos de teoría de la prueba.

A lo largo de este trabajo, he defendido la idea de que tanto la teoría de modelos como la teoría de la prueba son instrumentos para modelizar ciertos fenómenos informales, y que en principio las diferencias entre una y

[18] Que no debe confundirse con el sentido más habitual de *principio de reflexión*, que refiere a oraciones que expresan la corrección de una teoría dentro de la teoría misma, como $A \rightarrow Tr\ulcorner A \urcorner$

otra no revisten mayor profundidad filosófica. No obstante, la primera se encuentra en ventaja en relación al problema de la vaguedad, en tanto es la que nos permite dar una caracterización de la normalidad.

Sin dudas es muy sencillo encarar este proyecto si la teoría de la prueba se construye bajo la forma de secuentes de n-lados. Sin embargo, no es tan claro qué forma tomaría la caracterización si trabajamos con secuentes tradicionales o, peor aún, sistemas axiomáticos o de deducción natural.

(e) Metavalidez

Como vimos en la tercera parte, la completitud de constantes es sólo una condición suficiente para que se produzca el colapso entre validez global y local. Una tarea pendiente es entonces determinar qué otras condiciones suficientes hay.

Bibliografía

Angell, R., (1962) "A Propositional Logic with Subjunctive Conditionals", *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 27: 327–343.

Asenjo, F. (1966) "A calculus of antinomies", Notre Dame journal of formal logic, 7:103-105

Avron, A. and Lev, I. (2005) "Non-Deterministic Multiple-valued Structures", *Journal of Logic and Computation* 15(3): 241-261.

Avron (1991). "Natural 3-valued logics: characterization and proof theory", *Journal of Symbolic Logic*, 56(1): 276-294.

----------(2003), "Classical Gentzen-type Methods in Propositional Many-Valued Logics" Fitting M., Orłowska E. (eds) *Beyond Two: Theory and Applications of Multiple-Valued Logic.* Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol 114. Physica, Heidelberg

Barrio, E., Pailos, D. & Tajer, D. (2015) "The Logic of Strict-Tolerant Logic", *Journal of Philosophical Logic* 44(5): p. 551 – 571

Barrio, E., Pailos, D. & Szmuc, D. (2018) A recovery operator for non-transitive approaches, Draft

Barwise, J., y R. Cooper (1981) "Generalized Quantifiers and Natural Language", *Linguistics and Philosophy*, Vol. 4: 159-219.

Båve, A. (2011) "How to Precisify Quantifiers", *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 40(1): 103-111

Beall, Jc. (2003), *Liars and heaps.* Oxford: Clarendon Press.

---------- (2013) "A simple approach towards recapturing consistent theories in a paraconsistent setting", *Review of Symbolic Logic* Vol. 6(4): 755-764.

---------- (2014) "End of Inclosure", *Mind,* 123(491): 829–849,

Beall, JC & Murzi J. (2013), "Two flavors of curry's paradox", *Journal of Philosophy*, Vol. 110(3): 143–165.

Belnap, N. (1962) "Tonk, Plonk and Plink", *Analysis*, Vol. 22 (6): 130-134.

---------- (1977) "A useful four-valued logic", en Dunn, J.M. y Epstein, G. (eds.), *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, Dordrecht: Reidel, 8–37.

Blamey, S. (1986) "Partial Logic" in Gabbay, D. and Guenthner, F. (eds) *Handbook of philosophical logic, Volume 111: Alternatives in Classical Logic*, pp: 1-70, Springer

Bonnay, D. & Westerståhl, (2012) "Consequence mining", *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 41: 671.

Bradburn, N., & Miles, C. (1979). "Vague Quantifiers", *The Public Opinion Quarterly*, 43(1), 92-101.

Brandom, R. (1994), *Making It Explicit*, Harvard University Press, Cambridge

---------- (2000), *Articulating Reasons*, Harvard University Press, Cambridge

Button, T. (2016) "Knot and Tonk, Nasty connectives on many-valued truth-tables for classical sentential logic", *Analysis,* 76 (1):7-19

Cantwell, J. (2008), "The Logic of Conditional Negation", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 49 (3): 245-260.

Carnap, R. (1942) *Introduction to Semantics*, Studies in Semantics, vol. 1, Harvard University Press.

Carnielli, W. A. and Coniglio, M. (2016) *Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation*, Springer.

Carnielli, W. A., Coniglio, M. and Marcos, J. (2007) "Logics of Formal Inconsistency", in Gabbay, D. and Guenthner, F. (eds), *Handbook of Philosophical Logic (2nd. edition)*, Vol 14: 1–93. Springer.

Carnielli, W. & Marcos, J. (2002) "A taxonomy of C-systems", en Carnielli, W. A., Coniglio M. E., y D'Ottaviano, I. M. L. (eds.), *Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent*, Actas del II World Congress on Paraconsistency, en Juquehy, BR, May 8–12, 2000, vol. 228 de Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, pp 1–94

Carnielli, W. and Rodrigues, A. (2015) "Towards a philosophical understanding of the logics of formal inconsistency", Manuscrito, Vol 38 (2): 155-184

Church, A. (1953) "Non-normal Truth-tables for the Propositional Calculus", *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, Vol. 10: 41-52.

Cobreros, P., Egré, P. et al (2012a) "Tolerant, Classical, Strict", *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 41 (2): 347-385

---------- (2012b) "Tolerance and mixed consequence in the s'valuationist setting", *Studia Logica*, Vol. 100(4): 855-877.

---------- (2013) "Reaching transparent truth", *Mind*, Vol. 122(488): 841-866.

---------- (2015a) "Pragmatic interpretations of vague expressions", *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 44(4):375-393

---------- (2015b) "Vagueness, truth, and permissive consequence", en *Unifying the Philosophy of Truth*, Achourioti, T., Galinon, H., Martínez Fernández, J. y Fujimoto, K. (eds). pp 409-430.

---------- (2016) "Comparing some substructural strategies dealing with vagueness", en *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowlede-Based Systems, Part II: Proceedings of IPMU*, Carvalho, J.P., Lesot, M.J, Kaymak, U., Vieira, S., Bouchon-Meunier, B., y Yager, R. (eds). pp 161-172

Cobreros, P. (2011) "Supervaluationism and Classical Logic" in Nouwen, R., van Rooij, R. et al (eds) *Vagueness in Communication,* Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6517

---------- (2013) "Vagueness: Subvaluationism", *Philosophy Compass* 8/5 472–485

---------- (2015) "Vagueness, Truth and Permissive Consequence" en Achourioti, T., Galinon, H., Fujimoto, K. y Martínez-Fernández, J. (eds.), *Unifying the Philosophy of Truth*, Springer.

Cook, R. (2002), "Vagueness and Mathematical Precision", *Mind, New Series*, Vol. 111(442): 225-247

---------- (2005) "What's Wrong with Tonk(?)", *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 34 (2): 217-226,

---------- (2012) "The T-schema is not a Logical Truth", *Analysis*, 72(2): 231-239.

---------- (2014): "There is no paradox of logical validity!" *Logica Universalis*, vol. 8: 447-467

da Costa, N. C. A. (1959) "Observações sobre o conceito de existencia em matemática (Remarks on the concept of existence in mathematics, in Portuguese)", *Anuário da Sociedade Paranaense de Matemática*, Vol. 2: 16–19.

Deutsch, H. (2010), "Diagonalization and truth functional operators", *Analysis*, 70(2): 215–217.

Dicher, B. and Paoli, F. (2016) "ST, LP, and tolerant metainferences", in G. Ferguson and H. Omori (Eds.), *Graham Priest on Dialetheism and Paraconsistency*, Springer, Berlin

Došen, K. (1989) "Logical Constants as Punctuation Marks", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol.30 (3)

Dummett, M. (1973). *Frege: Philosophy of Language*. Duckworth, London.

---------- (1975a) "Wang's paradox", *Synthese,* vol. 30 (3-4):201--32

---------- (1975b) "The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic" en *Truth and Other Enigmas*. Cambridge: Harvard UP. pp. 215--247.

---------- (1991) The Logical Basis of Metaphysics, Harvard University Press

Dunn, J. M. (1976) "Intuitive semantics for first-degree entailments and `coupled trees'", *Philosophical Studies*, Vol. 29: 149-168.

Edgington, D. (1997), "Vagueness by degrees", en Keefe y Smith (eds), *Vagueness: a reader*, MIT Press

Eklund, M. (2009), "Vagueness and Second-Level Indeterminacy", en Richard Dietz & Sebastiano Moruzzi (eds.), *Cuts and Clouds: Vaguenesss, its Nature and its Logic*. Oxford University Press

Field, H. (2003) "No fact of the matter", *Australasian Journal of Philosophy,* Vol. 81 (4):457 – 480

---------- (2008) *Saving Truth From Paradox,* Oxford University Press, Oxford.

Fine, K. (1975) "Vagueness, truth and logic" *Synthese* 30: 265–300.

Fitting, M. (1986) "Notes on the Mathematical Aspects of Kripke's Theory of Truth", Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol 27 (1):75-88

Fjellstad, A. (2015) "How a semantics for Tonk should be", *The Review of Symbolic Logic*, Vol 8 (3): 488-505.

Frankowski, S. (2004) "Formalization of a plausible inference", *Bulletin of the Section of Logic*, Vol. 33 (1): 41–52.

Frege, G. (1879) "Begriffsschhft, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens", traducido al inglés como "Concept Script, a formal language of pure thought modelled upon that of arithmetic", por S. Bauer-Mengelberg y publicado en J. vanHeijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967.

---------- (1884) "Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl", traducido al inglés como "The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number", por J.L. Austin y publicado en Oxford, Blackwell, segunda edición revisada, 1974.

---------- (1903) "Grundgesezte der Arithmetik, vol. II (GGA)", Jena: Pohle. Parcialmente traducido al ingles por Furth, M. en *The Basic Laws of Arithmetic,* Berkeley, University of California Press, 1967.

French, R. (2016) "Structural Reflexivity and the Paradoxes of Self-Reference", *Ergo*, Vol. 3 (5)

French, R. & Ripley, D. (2018) "Valuations (bi, tri and tetra)", Draft.

Garrido, M. (1978) *Logica simbolica,* Tecnos, Madrid

Gentzen, G. (1934). "Investigations into logical deduction". En Szabo, M. E., (ed),_*The Collected Papers of Gerhard Gentzen,* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1969).

Glöckner, I. (2006) *Fuzzy quantifiers, a computational theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Gödel, K. (1931) "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", *Monatshefte für Mathematik und Physik,* Vol. 38: 173–98. Traducido al inglés como "On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I", en Feferman, S. et al (eds), *Kurt Gödel: Collected Works*. Volumen I. Oxford: Oxford University Press, 1986.

Graff Fara, D. (2000) "Shifting sands: An interest relative theory of vagueness", *Philosophical Topics* 28 (1):45--81

Grim, P. (2005). "The Buried Quantifier: An Account of Vagueness and the Sorites". *Analysis*, 65(2), 95-104.

Grišin, V. N. (1982). "Predicate and set-theoretic calculi based on logic without contractions", Izvestiya: Mathematics, Vol 18 (1): 41-59

Gupta, A. & Belnap, N., (1993), *The revision theory of truth*, Cambridge: The MIT Press.

Hacking (1979) "What is logic?", *The Journal of Philosophy,* 76(6): pp 285-319

Hardegree, G., (2005), "Completeness and super-valuations", *Journal of Philosophical Logic* 34: 81–95

Hjortland, O. (2014) "Proof-Theoretic Harmony in the Substructural Era", draft

---------- (2017) "Theories of truth and the maxim of minimal mutilation", *Synthese,*

Horsten, L. (2011) *The Tarskian turn: Deflationism and axiomatic truth*, MIT Press, Massachusetts

Hu, I. (2015). A generic theory of vagueness (manuscrito).

Humberstone, L. (1995), "Valuational semantics of rule derivability",

---------- (2003) "False Though Partly True: An Experiment in Logic", *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 32 (6): 613-665

---------- (2011), *The connectives*, The MIT press, Cambridge, Massachusetts.

Hyde, D. (2008) *Vagueness, Logic and Ontology,* Aldershot: Ashgate.

---------- (1997) "From heaps and gaps to heaps of gluts" *Mind* 106.424: 641–60.

---------- (2010) "The prospects of a paraconsistent response to vagueness." in Dietz, R. and Moruzzi, S. (eds) *Cuts and Clouds*, New York: Oxford University Press: 385–405.

Jaskowsky, S. (1969) "Propositional calculus for contradictory deductive systems" Studia Logica 24: 143–57. (Originally published in 1948 in Polish in Studia Scientarium Torunensis, Sec. A 11: 55–77).

Keefe, R. (2000) *Theories of Vagueness,* Cambridge, Cambridge University Press.

---------- (2008) "Vagueness: Supervaluationism" Philosophy Compass 3: 315–24

Ketonen O. (1944) "Untersuchungen zum Prädikatenkalkül", Annales Academiae Scientiarum Fennicae, s. A, I, 23.

Koslicki, K. (2003) "The Crooked Path from Vagueness to Four-Dimensionalism", *Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic*, Vol. 114 (1/2) :107-134

Kripke, S. (1975) "Outline of a Theory of Truth," *Journal of Philosophy* 72: 690–716.

Lewis, D. (1986) *On the Plurality of Worlds*, Oxford, Basil Blackwell.

Loguercio, N. and Szmuc, D. (2017) "Remarks on the Epistemic Interpretation of Paraconsistent Logic", Draft.

Łukasiewicz, J., (1920) "O logice trojwartosciowej", *Ruch Filozoficny*, Vol. 5: 170–171, traducido al inglés en *Selected Works*, Borkowski, L. (ed.), Amsterdam: North-Holland and Warsaw: PWN, 1970.

Mares, E. & Paoli, F. (2013) "Logical Consequence and the Paradoxes", *Journal of Philosophical Logic*.

McGee, V. (1990) *Truth, Vagueness, and Paradox*, Hackett, Indianapolis.

---------- (1996) "Logical operations", *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 25 (6):567 - 580

Misiuna, K. (2010), "A certain consequence relation for solving paradoxes of vagueness", *Logique et Analyse*, 53(209): 25–50.

Montague, R. (1973) "The proper treatment of quantification in ordinary English", en Hintikka, K. J. J., Moravcsik, J. M. E. y Suppes, P. (eds.), *Approaches to Natural Language*, Dordrecht: Reidel, 221–242.

---------- (1974) "Syntactical Treatments of Modality, with Corollaries on Reflexion Principles and Finite Axiomatizability", en *Formal Philosophy, Selected Papers of Richard Montague*, pp 286-302, Yale University Press, New Haven and London

Mostowski, A. (1957) "On a generalization of quantifiers", *Fundamenta mathematicae*, Vol. 44: 12-36.

Murzi, J. y Shapiro, L. (2015), "Validity and truth-preservation", en: Achourioti T., Galinon H., Martínez Fernández J., Fujimoto K. (eds) *Unifying the Philosophy of Truth*. Logic, Epistemology, and the Unity of Science, vol 36. Springer, Dordrecht

Negri, S. & von Plato, J. (2001) *Structural Proof Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.

Nelson, E.J. (1930) "Intensional Relations", *Mind*, Vol. 39: 440–453.

Nouwen, R., Van Rooij, R., et al., (2011) *Vagueness in Communication*. Berlin: Springer.

Paoli, F. (2002) *Substructural Logics: a primer*, Kluwer, Dordrecht.

Picollo, L. & Schindler, (2017) "Disquotation and Infinite Conjunctions", *Erkenntnis*.

Peirce, C.S. (1885) "On the Algebra of Logic. A Contribution to the Philosophy of Notation", *American Journal of Mathematics,* Vol. 7: 197–202.

Peters, S. & Westerståhl, D. (2008) *Quantifiers in Language and Logic*, Oxford University Press

Post, E. (1921) "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", *American Journal of Mathematics*, Vol. 43: 163-185

Prawitz, D. (1965). *Natural Deduction*. Almqvist & Wiksell, Stockholm.

Priest, G. (1979) "The logic of paradox", *Journal of Philosophical Logic,* 8(1):219 - 241

---------- (1987), *In contradiction*. Oxford University Press, Oxford

---------- (2004), *A site for sorites*, en Beall (Ed.), *Liars and heaps*. Clarendon Press, Oxford.

---------- (2005) *Doubt truth to be a Liar*, Oxford University Press.

---------- (2006*) In contradiction*, Oxford University Press.

---------- (2008) *An introduction to non-classical logics*, Cambridge University Press, Cambridge.

---------- (2010) "Inclosures, vagueness, and self-reference". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 51(1):69–84.

----------(2014) "Fusion and confusion", *Topoi*, 34(75).

----------(2016) "Logical disputes and the a priori", *Logique et Analyse*, 59(236):347–66.

---------- (2017) "What If? The Exploration of an Idea", *Australasian Journal of Logic,* Vol. 14 (1).

Prior, A. N., (1960) "The Runabout Inference-Ticket", *Analysis*, Vol. 21, No 2: 38-39.

Quine, W. V. (1970). *Philosophy of logic*. Oxford University Press, Oxford.

---------- (1981), "What Price Bivalence?", *The Journal of Philosophy*, Vol. 78(2): 90–95.

Read, S. (2006) "Monism: the one true logic", en D. Devidi and T. Kenyon (eds.), *A Logical Approach to Philosophy*, 193-209, Springer, Dordrecht

Rescher, N. (1962) "Plurality Quantification" reproducido en (2004) "Plurality Quantification Revisited", *Philosophical Inquiry*, Vol. 26 (1-2):1-6

---------- (1968) *Topics in Philosophical Logic*, Synthese Library, Springer Netherlands

Restall, G. (1994) *On Logics Without Contraction*, Ph.D. Thesis, The University of Queensland

---------- (2000) *An Introduction to Substructural Logic*, Routledge.

---------- (2013) "Assertion, denial and non-classical theories", En: Tanaka K., Berto F., Mares E., Paoli F. (eds) *Paraconsistency: Logic and Applications*. Logic, Epistemology, and the Unity of Science, vol 26. Springer, Dordrecht

Ripley, D. (2012) "Conservatively extending classical logic with transparent truth", *The Review of Symbolic Logic* 5 (2): 354-78.

---------- (2013a) "Paradoxes and Failures of Cut", *Australasian Journal of Philosophy*, Vol. 91 (1): 139-164.

----------(2013b) "Revising up: Strengthening Classical logic In the face of Paradox", *Philosophers imprint,* Vol13(5)

---------- (2015a) "Anything goes", *Topoi* Vol. 34 (1): 25-36.

---------- (2015b) "Comparing Substructural theories of truth", *Ergo*, Vol 2(13)

---------- (2017) "Vagueness is a kind of conflation", *Logic and Logical Philosophy*, Vol. 26: 115–135

---------- (2018) "Blurring: An approach to conflation", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 59(2): 171-188

---------- (2018) *Uncut*, draft

Rosenblatt, L. (2015) "Two-valued logics for transparent truth theory", *The Australasian Journal of Logic*, Vol. 12 (1): 44-66

Rousseau G. (1967), "Sequents in many-valued logic. I", *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 60, pp. 23-131.

Russell, B. (1923) “Vagueness”, *Australasian Journal of Philosophy,* vol 1 (2):84 – 92

Russell, G. (2015). “The justification of the basic laws of logic”. *Journal of Philosophical Logic*, 44(6):793–803.

Sambin, G., Battilotti, G., & Faggian, C. (2000) “Basic Logic: Reflection, Symmetry, Visibility”, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 65(3): 979-1013.

Sellars, W. (1953), “Inference and Meaning”, *Mind* 62: 313-338.

Sider, T., (2001) *Four-Dimensionalism*, Oxford, Clarendon Press

---------- (2003), “Against Vague Existence”, *Philosophical Studies* 114: 135–146

Shapiro, S. (2006) *Vagueness in Context*, Oxford, Oxford University Press.

Shapiro, L. (2011): “Deflating logical consequence”, The Philosophical Quarterly 61, 320–42.

---------- (2013) “Validity Curry Strengthened”, *Thought*, 2: 100–107.

---------- (2014) “Naive Structure, Contraction and Paradox”, *Topoi*, 34 (1):75-87

Slaney, J. (2010) “A Logic for Vagueness”, *The Australasian Journal of Logic*, vol. 8

Smith, N. J.J., (2005), “Vagueness as closeness”, *Australasian Journal of Philosophy*, Vol. 83(2)

---------- (2008), *Vagueness and degrees of truth*. Nueva York, Oxford University press.

Solt, S. (2011) “Vagueness in quantity: Two case studies from a linguistic perspective”, en Cintula, P.. Fermueller, C. y Godo, L. (Eds.) *Understanding vagueness. logical, philosophical and linguistic perspectives,* College Publications.

Steinberger, F. (2011) “What Harmony Could and Could Not Be”, *Australasian Journal of philosophy*, 89(4):617-639

Suszko, R. (1977) “The Fregean Axiom and Polish mathematical logic in the 1920”, *Studia Logica*, Vol. 36 (4): 377-380.

Tarski, A. (1935) "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen", *Studia Philosophica*, Vol. 1: 261–405. Traducido al ingles por Woodger, J.H. como "The concept of truth in formalized languages" en *Logic, Semantics, Metamathematics*, Indianapolis: Hackett, 1983.

Tennant, N. (1982) "Proof and Paradox", *Dialectica,* Vol. 36(2), 265–296.

---------- (2010) "Harmony in a sequent setting", Analysis, Vol. 70(3): 462-468

Thiele, H. (1994) "On T-quantifiers and S-quantifiers", *Multiple-Valued Logic Proceedings., Twenty-Fourth International Symposium on*, Boston, MA: 264-269.

Todd, W. (1965) "Infinite conjunctions and disjunctions and the elimination of quantifiers", *Logique et analyse*, Vol. 8(32): 289-300.

Tranchini, (2014) "Harmonising harmony", *The Review of Symbolic Logic,* Vol. 8 (3):411-423

Tye, M. (1990) "Vague Objects", *Mind*, New Series, Vol. 99(396): 535-557

Unger, P. (1979) "There Are No Ordinary Things", *Synthese,* 41: 117-154

Urquhart A., (2001) "Many-valued Logic", en Gabbay, D. y Guenthner, F. (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, 2: 249–295, Kluwer Academic Publishers.

Van Fraassen, B. C. (1966) "Singular Terms, Truth-Value Gaps, and Free Logic", *Journal of Philosophy* 63: 481–495

Varzi, A. (2007) "Supervaluationism and Its Logics", *Mind* 116 :633-676

Wansing H. (2000) "The idea of a proof-theoretic semantics", *Studia Logica*, Vol. 64: 3-20

Weber, Z. (2014) "Naive validity", *The Philosophical Quarterly*, 64(264): 99-114.

Whittle, B. (2004) "Dialetheism, logical consequence and hierarchy", *Analysis* 64(4): 318–26.

Williamson, T. (1994) *Vagueness*, London, Routledge.

---------- (2015). "Semantic paradoxes and abductive methodology". en Armour-Garb, B. (ed) *The Relevance of the Liar*. OUP, Oxford.

Wittgenstein, L. (1953), *Philosophical Investigations*, Macmillan Publishing Company

---------- (1921), *Logisch-Philosophische Abhandlung*, Annalen der Naturphilosophie, 14

Wójcicki, R. (1970) "Some remarks on the consequence operation in sentential logics", *Fundamenta Mathematica*, Vol. 68: 269–279

Wright, C. (1975) "On the coherence of vague predicates", *Synthese*, Vol. 30 (3-4):325--65

Yablo, S. (1993) "Paradox without Self-Reference", *Analysis,* Vol. 53: 251-252

Zadeh, L.A. (1983), "A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 9 (1): 149–184.

Zardini, E. (2011) "Paradox without contra(di)ction", *The review of symbolic logic*, 4 (5): 498-535.