Resolució de problemes i mètode de raonament en l'educació matemàtica

Joan Miralles de I. i Jaume Paradís*

Temps d'Educació, 22 2n semestre, 1999

Investigació i ensenyament de la matemàtica

El procés d'invenció matemàtica —creació de noves eines de raonament— neix de la necessitat d'aquestes eines quan un individu es planteja com resoldre un determinat problema. Pot tractar-se d'un problema nou, o bé d'un que ja ha estat resolt però la resolució del qual no és prou satisfactòria, ja sigui perquè dubtem de la seva consistència lògica o perquè busquem un camí més elegant, és a dir, que requereixi recursos més senzills des del punt de vista lògic o operatiu, la qual cosa ens permetrà de validar-ne la coherència amb més seguretat.

Originàriament, aquest procés està radicalment allunyat de tot rigor, tal com l'entenem els matemàtics. L'investigador matemàtic, i probablement tot investigador científic, primer conjectura on vol arribar, després força el raonament fins a arribar-hi o bé modifica les conjectures inicials per la via de matisar-les i, a mesura que el camí va quedant desbrossat de dubtes, el raonament original es va consolidant fins a obtenir un producte acabat, lògicament coherent, que és el resultat que finalment es publica.

Sembla aconsellable, doncs, que les bases del procés d'invenció matemàtica no siguin essencialment diferents de les de l'aprenentatge de la matemàtica. Les diferències se centrarien en la direcció de l'aprenentatge per part d'una persona, el professor, que hauria de guiar uns processos de creació per part dels alumnes, i les formes d'aquesta direcció de l'aprenentatge entrarien en el camp de la didàctica de la matemàtica. Però des del punt de vista subjectiu de l'alumne, hauria de ser ell qui, a partir de la resolució de problemes, anés trobant progressivament les eines teòriques que es pretén que arribi a conèixer.

La realitat escolar, però, està profundament allunyada d'aquest esquema. En alguns casos per inèrcia, però en la majoria per simple desconeixement dels processos d'invenció matemàtica, les classes de matemàtica, des del començament de Secundària fins a la universitat, es converteixen

* Joan Miralles de I. i Jaume Paradís són professors de Matemàtica Aplicada al Departament d'Economia i Empresa de la Universitat Pompeu Fabra.

Adreça professional: Ramon Trias Fargas, 25-27. 08005 Barcelona. Correu electrònic: joan.miralles@econ.upf.es i jaume.paradis@econ.upf.es

en quelcom molt semblant a una simple exposició de resultats tancats, dels quals no se'n coneixen ni els processos que hi han portat, ni la utilitat, ni la relació amb d'altres. L'aprenentatge de la matemàtica es converteix així en un àrid camí cap a la repetició d'uns resultats que no se sap d'on procedeixen i la raó de ser dels quals no es coneix. La pregunta clàssica que formulen, de vegades amb crispació, aquells alumnes que encara no s'han convertit totalment en autòmats, *I això per a què serveix?*, és una demostració de la manca de sentit que té la matemàtica apresa d'aquesta manera. Aleshores es produeix la gran perversió: el que hauria de ser l'educació matemàtica es converteix en un contracte de dimissions; el professor ha dimitit des de fa temps de la seva capacitat de contestar aquella pregunta i l'alumne, en adonar-se que és molt més fàcil repetir el que ha dit el professor que plantejar preguntes incòmodes, dimiteix de la seva capacitat d'aprendre matemàtica.

Condició necessària per poder rectificar aquesta situació és el coneixement dels processos d'invenció matemàtica per part dels docents. I aquí hi juga un paper important el coneixement de la història de la ciència en general, i en particular de la història de la matemàtica. No es tracta ja de l'aplicació de l'anomenat *principi genètic*,[1] sinó d'un autèntic coneixement de la matemàtica, que és molt més el coneixement dels processos que han portat a les conclusions que no pas el de les conclusions mateixes.

La matemàtica està tan incrustada en el cos de l'ensenyament que gairebé se'ns fa impensable poder prescindir-ne. Hi ha moltes raons que porten a pensar que la matemàtica ha de jugar un paper clau en l'aprenentatge de les diferents ciències. D'una banda, hi ha el fet que la matemàtica esdevé el llenguatge natural on s'expressen les diferents lleis de tipus científic; però hi ha un argument molt poderós que fa de la matemàtica un referent central en l'ensenyament: proporciona els elements essencials sobre els quals es construeix l'art del raonament. Diferents matemàtics s'han referit a la forma de treballar per tal de fer la recerca en matemàtiques. Des d'*El mètode* d'Arquímedes [3] fins al *Discours de la Méthode* de Descartes [6] i, més recentment, l'*Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique* de J. Hadamard [11] s'ha intentat abordar el problema de la creativitat en matemàtiques. Tots ells són referents que cal tenir presents a l'hora d'organitzar l'aprenentatge d'aquesta ciència. En aquest article invitem els lectors a reflexionar sobre el paper de la matemàtica en l'ensenyament prenent com a referent l'evolució de la matemàtica al llarg de la història.

(1) El principi genètic postula que el desenvolupament de l'intel·lecte humà reprodueix, des de la infantesa, els passos que ha seguit l'evolució històrica dels conceptes matemàtics. Va néixer a cavall dels segles XIX i XX. Benchara Branford publicà el 1908 un esquema de l'evolució de la matemàtica des dels principis dels temps, acompanyat de les etapes del desenvolupament escolar [8].

Una ullada a la història de la matemàtica

Els primers coneixements matemàtics es van vertebrar al voltant d'una pràctica rudimentària de tipus aritmètic i geomètric. Aquest primer saber matemàtic tenia una finalitat eminentment pràctica, gairebé comptable, però ben aviat esdevingué una font de poder en mans dels sacerdots de la cort faraònica per predir els creixements anuals del Nil, i determinar la nova configuració dels camps de conreu que emergien de les terres inundades. Aquesta doble finalitat *pràctica* i *de poder* ja no seria mai més abandonada en el transcurs de la història. No cal dir que la importància d'aquest primer saber matemàtic feia necessari l'arbitri d'un sistema de transmissió d'aquest coneixement que es reduïa exclusivament a una àrea específica de les classes dominants: en el cas d'Egipte, la transmissió d'aquests coneixements es feia dins dels estaments religiosos.

En mans de la civilització grega, la matemàtica va assolir un nou estadi i al mateix temps una nova funció. En efecte, els grecs cercaren des de ben aviat una explicació més aprofundida de per què es donaven certes propietats matemàtiques, el coneixement de les quals provenia de l'herència babilònica, índia i egípcia. No en tenien prou amb saber que el triangle de costats 3, 4, 5 era un triangle rectangle: pretenien poder formular un resultat de tipus general que caracteritzés tots els triangles rectangles mitjançant una relació ben específica i determinada entre les longituds dels seus costats. Aquesta actitud requeria un enfocament diferent a l'hora de fer matemàtiques. Calia un mètode de raonament que expliqués de forma incontestable la validesa d'un resultat general. No n'hi havia prou a comprovar que allò era vàlid per a uns quants casos concrets: s'imposava la necessitat de trobar noves formes de raonament, allò que avui entenem per *demostració*. Per primera vegada, la matemàtica quedava indissolublement vinculada al *raonament*. La nova concepció donava un gir a la funció pràctica de la matemàtica, que esdevenia així una eina de coneixement del món. Els *Elements* d'Euclides seria un bell producte d'aquesta nova concepció, però ni de bon tros l'únic. Amb la civilització grega, per tant, la matemàtica deixà de ser un conjunt desorganitzat de resultats concrets per esdevenir un cos de teoria que organitzava resultats generals de tipus aritmètic i geomètric en forma de teoremes i demostracions. Però, des d'una perspectiva de l'educació matemàtica, ens interessa aprofundir sobre la forma com s'arribà a aquest coneixement organitzat. En aquest sentit, és molt important posar l'accent en el fet que la matemàtica es va desenvolupar a partir de la necessitat de resoldre problemes, per arribar posteriorment a la formulació de problemes més generals.

En l'origen de la matemàtica hi trobem els problemes. Segons Dieudonné —un dels representants més notables del grup Bourbaki— en l'article *Matemáticas vacías y matemáticas significativas* [1] l'origen de les teories matemàtiques és en els mètodes de resolució dels problemes que es plantegen, admetent que alguns apareixen en l'àmbit de les aplicacions de tipus pràctic o de tipus físic, però assenyalant que d'altres són deguts exclusivament a la curiositat de l'intel·lecte de l'ésser humà, com és el cas de la col·lecció de problemes aritmètics d'anàlisi indeterminada extrets de l'obra de Diofant i els innombrables problemes i conjectures degudes a Erdös.

Fins a quin punt els problemes són el principal motor de l'origen de les teories matemàtiques ho mostra el paper que van jugar els antics problemes de la matemàtica grega en la revolució matemàtica que s'originà en el Renaixement. Destaquem els problemes sobre el traçat de tangents que conté el llibre de les *Còniques* [2] d'Apol·loni.[2] Fou el punt de partida dels geòmetres europeus que atacaren els problemes geomètrics previs al descobriment, per part de Fermat i Descartes, de la geometria analítica. El mateix llibre de problemes aritmètics de Diofant [7] esdevingué la prova de foc que emprà Vieta[3] per avaluar la potència del nou càlcul literal que havia exposat a la seva *Isagoge* [26], el 1591. Posteriorment, Fermat, i més tard Euler, s'encarregarien de generalitzar alguns dels problemes anteriors, creant les bases de la teoria de nombres.

El mateix Descartes, a la primera part de la *Geométrie*,[4] afirma que aquesta obra reuneix els nous mètodes de resolució matemàtica com a conseqüència del fet que es va interessar per la resolució d'un problema contingut en la *Col·lecció matemàtica de Papus* [19]. Però ens equivocaríem si penséssim que l'obra matemàtica més genial de Descartes era per si mateixa un objectiu de la curiositat matemàtica del filòsof francès. El principal objectiu de Descartes el constituïa *El mètode*, on volia reunir les regles principals del raonament que conduïen, ben aplicades, al descobriment científic.[5] A més, i per tal de validar els bons resultats d'aquestes regles, exhibia el seu fruit relatiu als nous mètodes de resolució en geometria i àlgebra i, simultàniament, en edició conjunta, exposava els resultats assolits en el problema de la refracció i reflexió de la llum.

(2) Per tal de posar en relleu el model que durant el Renaixement representà Apol·loni com a geòmetra, esmentarem que foren molts els matemàtics de l'època que reivindicaren ser hereus del seu estil sota el nom d'Apollonius Gallus [F. Vieta], Apollonius Belga [Adrianus Romanus], Apollonius Redivivus [Marino Ghetaldi]...

(3) Matemàtic francès que resolgué de forma més general els problemes de Diofant mitjançant el nou llenguatge algebraic en l'obra *Zeteticorum libri quinque* (1593).

(4) Pot consultar-se la recent i excel·lent traducció al català comentada per Josep Pla i Pelegrí Viader [6].

(5) És molt suggeridor el contingut del llibre *El sueño de Descartes* [5], en què es fa un paral·lelisme entre l'objectiu de Descartes de reduir tota l'adquisició del coneixement a unes regles i el funcionament generalitzat dels ordinadors en el món actual. Una altra referència és *Los sueños de la razón* [18], de H. Pagels, en què s'aprofundeix el mateix tema, afegint-li les ciències de la complexitat.

Els problemes: una eina més poderosa que la teoria

Val la pena entretenir-nos una mica en l'anàlisi de l'entorn matemàtic que va envoltar la creació de la geometria analítica per tal de veure fins a quin punt, un cop creades les bases d'aquesta teoria, els problemes seguien constituint el centre de gravetat de la creació matemàtica.

Els orígens de la geometria analítica tenen dues referències ben delimitades. L'una és l'obra de Fermat *Isagoge ad locos planos,*[6] on s'exposen de manera molt clara i didàctica les equacions algebraiques de segon grau corresponents a les còniques, i les de primer grau corresponents a les rectes. Aquesta obra, com totes les de Fermat, no s'editià fins a molt més tard de la seva creació l'any 1629, però era coneguda per la correspondència que Fermat mantenia amb els matemàtics de París, particularment amb Pascal i Roberval. Quan Fermat rep de part de Mersenne les galerades de la *Geométrie* de Descartes, reconeix els mateixos fonaments de la geometria analítica que ell havia treballat i fa observar que alguns dels mètodes algèbrics de Descartes per al traçat de tangents no són tan generals com dóna a entendre el filòsof francès. Així neix una llarga controvèrsia matemàtica en la qual tots dos grans genis intercanvien propostes de resolució de problemes consistents en traçats de tangents de corbes gens fàcils. El que està en joc no és la preeminència de la geometria analítica —que tots dos passen per alt—, sinó la potència dels mètodes algebraics de resolució de problemes propis del càlcul infinitesimal, una branca de la matemàtica que pugnava per obrir-se pas i constituir-se en l'eix central de la creació matemàtica. No oblidem que Fermat, seguint les passes de Vieta, havia cercat un model matemàtic per explicar el fenomen de la refracció de la llum. El model de Fermat per a la determinació del recorregut de la llum es basava a minimitzar el temps d'arribada d'un punt a un altre quan les velocitats de la llum en els medis eren diferents: aquests eren els mètodes de *maxima et minima* que ara aplicava als problemes del traçat de tangents.

En aquesta polèmica entre dos gegants de la matemàtica —són dues de les espatlles sobre les quals s'enfilaria Newton per veure-hi encara més lluny[7]— tenim un exemple ben clar de la mesura precisa del valor dels mètodes matemàtics quan aquests són sotmesos a la prova de foc de la resolució de problemes. S'acaba de crear una nova teoria, la geometria analítica, i no es limiten a fer exercicis d'aplicació de la teoria, sinó que es continuen creant matemàtiques a partir dels nous problemes que no resol la teoria, empenyent les matemàtiques cap a la generació d'allò

(6) *Isagoge*: exordi, introducció.
(7) Recordem la cèlebre frase de Newton: *si he vist més lluny que no pas els altres, és perquè m'he enfilat damunt les espatlles dels gegants.*

que, a final d'aquell segle, es reconeixeria com els rudiments del càlcul infinitesimal.

Els problemes: font d'investigació i d'aprenentatge

És un fet indiscutible que la matemàtica desenvolupa un paper auxiliar com a instrument per entendre els fenòmens físics. En la mesura que vulguem estudiar, per posar un exemple, la trajectòria aparent del Sol, requerim tot un aparell matemàtic sense el qual difícilment podem arribar a cap conclusió. El problema que se'ns planteja és el següent: *en quin ordre cal organitzar el coneixement matemàtic per fer front a qualsevol problema de la física?* Existeix una dialèctica entre els problemes de l'entorn físic i els coneixements matemàtics en el següent sentit: l'intent de resolució del problema crea unes matemàtiques específiques, però aquestes, al mateix temps, són instrument per a la resolució d'altres problemes.

La qüestió metodològica de fons rau en la pregunta següent: *podem aprendre els mètodes matemàtics i els seus resultats al marge de l'anàlisi dels problemes vinculats a aquest tipus de matemàtica?* La resposta, naturalment, és afirmativa, però no sembla aconsellable utilitzar aquesta metodologia. En aquest sentit, són aclaridors els comentaris que fa Maurici Loi en el prefaci del llibre *Pensar la matemàtica* [1, p. 8]:

> «Aïllar una teoria d'aquell moviment d'idees que l'ha introduïda i de les intencions que l'han acompanyada, considerar-la únicament com un cos de teoremes que cal demostrar, equival a substituir un pensament viu i significatiu per un pensament mort, ignorant l'estremiment de la ment que el concep [...]»

Retornem al problema que hem plantejat abans sobre l'estudi de l'òrbita aparent del Sol. Aquest problema ens proporciona una font molt rica de petits problemes sobre els quals construir una part de la trigonometria, quedant de passada justificada aquesta com un poderós auxiliar de mesura indirecta dels angles. Inicialment, per abordar el problema no ens cal ni pissarra, ni guix, ni paper. En tenim prou a plantar un pal segons la vertical (un obelisc en miniatura, seguint la tradició dels antics). Podem estudiar l'alçada del Sol a cada hora a partir de l'allargament de l'ombra que projecta el pal, i plantejar com a problema la relació entre l'angle i l'allargament de l'ombra amb la intenció d'introduir-nos en l'estudi de les raons trigonomètriques. La riquesa del problema és prou gran per proporcionar-nos un ventall d'informacions de tipus matemàtic (en els equinoccis, l'ombra del pal descriu una recta, però en les altres èpoques de l'any la corba descrita és una branca d'hipèrbola...). L'estudi pot culminar en un projecte de construcció d'un rellotge de sol, fent front a la diversitat de problemes que això comporta.

Aquesta forma de procedir a l'hora d'organitzar l'aprenentatge de la matemàtica troba un referent molt apropiat en el llibre *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas* de Gerald Holton [13], on aquest autor presenta una alternativa a l'estudi clàssic de la física, partint per a cada un dels temes del plantejament de problemes adequats. En matemàtiques, poden ser molt útils les línies de treball de Puig Adam [21], Felix Klein [14], Lebesgue [15] i Lancelot Hogben [12].

Malauradament, en l'educació matemàtica és freqüent assignar als problemes un paper purament auxiliar. Esquemàticament, els problemes es fan servir simplement com a test per copsar fins a quin punt un alumne ha entès la teoria. O, dit d'una altra manera, els problemes tenen un paper subsidiari en el sentit que serveixen per poder aplicar els mètodes de resolució que genera la teoria matemàtica exposada prèviament.

De fet, aquesta manera de pensar barreja sovint dues eines en la pràctica de les matemàtiques: els problemes i els exercicis. Per tal d'evitar confusions a l'hora d'organitzar un programa d'ensenyament de matemàtiques, tot i que pot semblar evident, val la pena establir uns criteris de diferenciació entre una i altra eina. Un problema de matemàtiques és un enunciat en què es demana que s'esbrini un resultat a partir d'un conjunt d'informacions que es proporcionen. El problema és tal quan, un cop conegut l'enunciat, no és immediat el camí que cal seguir per trobar-ne la solució. En la resolució d'un problema de matemàtiques caldrà posar en joc un conjunt ampli de recursos matemàtics més propis de l'heurística, el tempteig i la intuïció que no pas dels mètodes que sorgeixen d'aquesta o aquesta altra teoria que s'acaba de veure. En la matemàtica, els problemes tenen una funció ben específica: el desenvolupament del raonament matemàtic. Els exercicis, en canvi, tenen una funció molt més limitada: exercitar-se en l'ús d'uns procediments resolutius específics per a determinades qüestions.

La diferenciació que acabem d'establir és essencial en l'educació matemàtica. L'elecció dels problemes s'ha de fer amb molta cura i és essencial graduar el nivell de dificultat a l'hora de proposar-los als nostres alumnes. Compartim l'afirmació continguda a [16, p. 10-11]:

> «Probablement, la lliçó més important que cal aprendre és que estar encallat o bloquejat en un problema és una situació molt digna, que constitueix, a més, una part essencial del procés de millora del raonament [...] No has de permetre que les qüestions difícils, que semblen resistir-se a tota solució possible, et desanimin. De fet, es pot aprendre molt més d'un intent fallit que de qüestions resoltes amb tota rapidesa i sense dificultats [...].»

El paper dels problemes en el desenvolupament de la matemàtica

És un fet inqüestionable que sense problemes no es fan matemàtiques. Tanmateix, abans d'entrar en l'enfocament docent, vegem alguns exemples d'antics problemes que van generar algunes parts de la matemàtica que avui qualifiquem d'elemental. Un dels problemes que van plantejar-se els grecs fou el de la mesura de les magnituds: longituds, àrees, angles, temps... Pot semblar-nos un problema elemental, però fou una qüestió essencial per a l'aprofundiment dels diferents conceptes que hi intervenen.

Pel que fa a la mesura de longituds, durant molt de temps es va creure que, un cop establerta una unitat de mesura i les seves parts fraccionàries enteres, es disposava d'un univers numèric capaç d'abastar la mesura de qualsevol magnitud establerta. El principi intuïtiu que dóna suport a aquesta confiança és el fet que l'univers dels trencats és dens en l'ordenació numèrica que s'hi estableix. És a dir, entre dos trencats a, b sempre podem construir un trencat intermedi $(a+b)/2$ i, com que podem iterar indefinidament el procés, sembla que podrem assolir mitjançant aquests nombres qualsevol mesura intermèdia. El descobriment pitagòric de la incommensurabilitat de la diagonal del quadrat al seu costat suposà una profunda crisi de les concepcions matemàtiques dels grecs. Fou la necessitat de refinar els conceptes matemàtics relatius al problema de la incommensurabilitat el que portà Èudox a establir la seva teoria de les proporcions, que Euclides integrà en els seus *Elements*.

Un altre exemple és la mesura dels angles, amb relació a les necessitats de l'astronomia: es tracta de determinar amb certa precisió la posició de qualsevol astre en el firmament. El problema consisteix a mesurar l'angle d'alçada, cosa que podem fer de manera indirecta mitjançant la projecció d'aquest astre en una superfície plana.[8] El naixement de la trigonometria amb les diferents raons que s'establien per cada angle està indissolublement lligat al problema anterior. La confecció de taules precises per determinar les raons de grau en grau fou un altre problema formidable, que requerí el concurs de moltes matemàtiques. De fet, en un moment determinat calgué fer front a la trisecció de l'angle de tres graus, la qual cosa comportava cercar una solució aproximada d'una equació cúbica. Els grecs i àrabs, sobretot, abordaren aquest tipus de problemes donant naixement a la trigonometria elemental [25].

En un altre terreny, podríem analitzar la construcció dels nombres reals mitjançant la representació dels nombres decimals. L'alumne té una idea

(8) El lector pot consultar el llibre de Rey Pastor [23] per veure els diferents artilugis que feien servir els navegants per calcular l'alçada dels estels a l'efecte de calcular la latitud del lloc on estaven situats.

més o menys intuïtiva dels decimals: disposa d'un algorisme per desenvolupar cada nombre trencat segons les seves expressions decimals. Quines matemàtiques podem fer amb aquesta classe de nombres, d'altra banda tan popularitzats de nou per l'ús de les calculadores de butxaca? Podem fer moltes matemàtiques; de fet, més de les que podem sospitar i moltes més de les que el temps disponible ens permetrà. Vegem-ne algunes: els nombres decimals ofereixen un bon banc de proves per familiaritzar els alumnes amb l'infinit. El que 1/3 equivalgui a l'expressió decimal infinita 0,333... d'acord amb l'algorisme que disposen de pas de la fracció a l'expressió decimal és un incentiu per procedir al pas contrari: trobar les identificacions de les fraccions amb les expressions decimals finites o infinites periòdiques. Una altra qüestió sobre la qual ens podem entretenir: totes les expressions decimals finites tenen un equivalent en les expressions infinites de període 9. És un fet que, d'entrada, repugna la intuïció de l'alumne: si provem de fer creure a un alumne qualsevol que 0,5 és equivalent a 0,4999... ens trobarem que la seva intuïció genuïna s'inclina a pensar que el segon nombre és una mica més petit que el primer. És bo fer diferents demostracions d'aquest fet.[9] Es pot obrir la porta a investigar quin tipus de períodes decimals apareixen en funció del denominador de la fracció, i establir conjectures respecte d'això a l'estil de les que apareixen en el llibre de Rademacher i Toeplitz *The Enjoyment of Mathematics* [22], etc. De fet, aquesta qüestió obre diversos camins i, per tant, és molt apropiada per afinar i educar la intuïció dels alumnes i apropar-los progressivament al concepte de nombre real, amb tota la complexitat que això comporta.

Algunes fites importants en el raonament matemàtic

El raonament matemàtic no es redueix exclusivament a la reproducció dels esquemes logicoformals de les demostracions. Aquesta tasca és una part ínfima i de cap manera la més important de la formació matemàtica. El raonament matemàtic és una poderosa eina per a la formació intel·lectual i científica de tot alumne, i en certa forma *és el cor de la creació matemàtica*. Vegem algunes de les pràctiques d'aquest raonament matemàtic assajades per aquells que han donat llum a la creació matemàtica.

És clar que el mètode d'exhaustió que posa en joc Arquímedes per al càlcul d'àrees, volums i centres de gravetat de figures corbes forma part del raonament matemàtic. Però també els *mètodes mecànics* que de ma-

(9) Per exemple, si els dos nombres fossin diferents podríem trobar un nombre intermedi mitjançant la semisuma, o bé tractar l'expressió decimal infinita com a suma d'infinits termes d'una progressió aritmètica. Una altra possibilitat és la demostració algebraica tradicional.

nera tan brillant assajà i exposà posteriorment en una carta lliurada a Eratòstenes.[10] En aquesta carta, el mateix Arquímedes explica el mètode de raonament que ha fet servir per trobar els resultats publicats en el llibre *De l'equilibri dels plans*. N'extraiem un paràgraf que il·lustra la seva manera de procedir [3, p. 478-479]:

> «Pel fet que et considero, com ja t'he dit, hàbil i excel·lent en la filosofia, i com que no recules davant de les investigacions matemàtiques que se't presentin, he desitjat de presentar-te per escrit i d'il·lustrar, en aquest mateix llibre, la natura particular d'un mètode que et permetrà reeixir en certes proposicions matemàtiques per mitjans mecànics. Jo mateix estic convençut que aquest mètode no és menys útil per a la demostració mateixa de les proposicions, ja que algunes entre elles, *evidents per a mi per la mecànica*, posteriorment han estat demostrades per la geometria, ja que només així es pot arribar a una demostració. La recerca d'una demostració, si és precedida d'un cert coneixement de les qüestions per aquest mètode, resulta més senzilla que la recerca sense coneixement».[11]

Heus aquí, expressat de primera mà per un dels grans creadors de la matemàtica, la forma de procedir en la recerca.

Un dels referents que més han influït en el desenvolupament de la matemàtica són els sis llibres d'aritmètica de Diofant [7]. Aquests llibres es redueixen a una col·lecció àmplia de problemes[12] i les solucions que Diofant hi aporta. No hi ha text, ni doctrina; no s'enuncia cap teorema ni existeixen demostracions d'aquell estil deductiu que, amb gran virtuosisme, van desenvolupar els matemàtics grecs. Però, sense tot això, quina riquesa de pensament tan aprofundit respiren aquestes pàgines que ens deixà Diofant! Al segle xv, quan Regiomontanus en descobrí un exemplar a Itàlia, quedà estorat de la profunditat d'aquell text. Quasi cent anys després, Bombelli rebé la influència de Diofant en la publicació definitiva de la seva *Àlgebra* [4] (1572) modificant l'estil d'exposició final que ja havia elaborat prèviament. Però el matemàtic que més partit en va treure fou F. Vieta, que escollí l'*Aritmètica* de Diofant com a referent per posar a prova en l'obra *Zeteticorum libri quinque* [27] la fortalesa i l'abast de l'àlgebra exposada a la seva *In Artem Analyticem Isagoge* (1595) [26]. Convé encara dir que aquesta *Aritmètica*, en mans de Fermat i de Huygens, va servir d'inspiració per posar les primeres pedres d'allò que es convertiria en una branca reina de les matemàtiques: la teoria de nombres.

---

(10) En el moment de recepció de la carta, Eratòstenes era el director de la Biblioteca d'Alexandria. Els historiadors coneixien l'existència d'aquest escrit, però no fou fins l'any 1899 que, entre els manuscrits del patriarcat grec de Jerusalem, es descobrí un palimpsest en què, sota l'escriptura superior (s. XII-XIV), hi havia una còpia del *Mètode* [3] d'Arquímedes datada del segle X. Pot consultar-se també la traducció i notes de P. M. González Urbaneja [9].

(11) L'èmfasi és nostre.

(12) Avui coneguts com a «problemes d'equacions diofantines» o «diofàntiques».

Podríem preguntar-nos on radicava el secret en la forma de fer matemàtiques dels clàssics grecs per aconseguir avenços tan importants de la matemàtica. En certa manera, el mateix Vieta ens transmet la seva opinió a les primeres pàgines de l'*Isagoge* (cap. I):

«...Existeix un camí de recerca de la veritat en matemàtiques, del qual es diu que fou Plató el primer a inventar-lo, anomenat per Teó «anàlisi», i que aquest últim definí així: «Mètode en què es pren com concedit allò que es demana, per arribar de deducció en deducció a una veritat inqüestionable». En la síntesi, contràriament, es pren allò que s'ha acordat [*dades de partida*] per arribar a l'objectiu, i a la comprensió del que es demana. I com que els antics no havien establert sinó dues classes d'anàlisi: «zetètica»[13] i «porística»[14], als quals es refereix sobretot la definició de Teó. Nogensmenys, és convenient establir una tercera classe, que jo anomenaré «rètica exegètica».[15] Així, pel mètode zetètic es troba la igualtat o la proporció [*raó*] entre les magnituds que es cerquen i aquelles que es donen; pel mètode porístic s'examina, mitjançant la igualtat o la proporció, la veritat d'un teorema enunciat; pel mètode exegètic s'aïlla la magnitud que se cerca de la igualtat o proporció que la inclou. En conseqüència l'art analítica en conjunt abasta aquests tres mètodes i podria en bona raó definir-se així: la ciència de trobar correctament en les matemàtiques...»

En el seu *Mètode*, Descartes anà molt més lluny encara que Vieta. La seva finalitat fou establir unes regles generals per a la recerca en la ciència i en la filosofia, i aquesta preocupació esdevingué l'element central del seu treball. I un dels bancs de proves per al seu mètode fou precisament el de la matemàtica. En paraules de Pla i Viader:

«Així doncs, a l'hora de forjar el mètode que li ha de permetre reconstruir la ciència i la filosofia, Descartes disposa d'un model paradigmàtic: la matemàtica. És a dir, l'ús de la raó cal entendre'l, en aquest context, com *l'ús de la raó matemàtica* i, de retruc, les regles del mètode són *regles que hem extret del saber i del coneixement matemàtics*».[16] [6, p. XV]

Per a Descartes, la matemàtica és un model d'aplicació del seu mètode, que ha de servir per reconstruir la ciència i la filosofia de l'època. Amb les seves pròpies paraules:

«[...] entre les disciplines conegudes per altres, només l'aritmètica i la geometria estan netes de qualsevol taca de falsedat o incertesa [...]

---

(13) Derivació d'un mot grec que significaria «buscar, cercar, investigar».

(14) Mot, també derivat del grec, al qual Vieta sembla assignar la idea d'obrir un camí a través d'allò que és conegut per descobrir el que es desconeix.

(15) Segons F. Ritter això vindria a dir, després de comparar els dos mots amb llurs arrels gregues, quelcom així: mètode que condueix, mitjançant unes regles determinades, a desvetllar els misteris més profunds de les matemàtiques.

(16) L'èmfasi és dels autors.

En tenim la prova en les més fàcils de les ciències, l'aritmètica i la geometria: observem, en efecte, que els geòmetres antics van fer ús d'una certa anàlisi que estenien a la resolució de tots els problemes, tot i que l'han ocultada a la posteritat. I tot just ara floreix un cert gènere d'aritmètica, anomenada àlgebra, que executa sobre els nombres allò que els antics feien amb les figures [...]» [6, p. XVII]

Alguns apunts per a l'enfocament de l'educació matemàtica

Què podem aprofitar del contingut dels antics problemes sobre els quals s'han edificat les matemàtiques? En primer lloc, el seu esperit. Probablement, per raons de temps i d'oportunitat, en la majoria dels casos no és possible ni recomanable reproduir fil per randa la majoria de problemes, però és un greu error deixar-los completament al marge per oferir la construcció de la teoria de forma independent de la seva gènesi històrica. En segon lloc, tal com assenyala Rico, un altre aspecte que el coneixement de la història pot aportar al professor és el fet que constitueix un *antídot contra el formalisme* [24, p. 182], un dels mals endèmics de l'ensenyament de la matemàtica al nostre país. En tercer lloc, la introducció d'elements històrics en la classe de matemàtica pot capgirar de manera essencial la visió que en tenen la major part dels alumnes. Seguint Ofir [17], veiem dos aspectes essencials i complementaris que poden beneficiar directament l'educació matemàtica: d'una banda, no podem oblidar que per entendre la història de la matemàtica cal *fer* matemàtiques. D'altra banda, caldrà que *fem* història per comprendre la natura evolutiva de la matemàtica. En altres paraules, la introducció d'elements històrics donarà a l'educació matemàtica una perspectiva difícil d'assolir d'una altra manera.

Igual com el professor de ciències naturals intenta desenvolupar el sentit d'observació de l'alumne perquè aprengui a veure realment els trets diferenciadors, el professor de matemàtiques s'ha de plantejar el desenvolupament de la intuïció de l'alumne. El sentit de la intuïció no és innat, sinó que cal desenvolupar-lo, exercitar-lo, sotmetre'l a prova. I per fer-ho, res millor que la pràctica continuada de problemes orientats a aquesta finalitat. Molts grans mestres de matemàtiques s'han referit sovint al sentit de la intuïció en el procés del descobriment matemàtic (veure Hadamard [11] i Poincaré [20]); si pretenem educar els nostres alumnes en la matemàtica, caldrà integrar en la didàctica els processos de descobriment matemàtic en les dosis adequades, i el paper de la intuïció esdevindrà cabdal.

La formació matemàtica integra tota un seguit de capacitats intel·lectuals que no podem reduir a una simple enumeració, entre altres coses perquè aquestes capacitats interaccionen entre si, és a dir, formen un conjunt integrat. Per exemple, aquesta formació ha d'incloure el coneixement dels resultats més rellevants de cada una de les diferents branques de la matemàtica. Tanmateix, aquest coneixement de resultats seria com una mena de producte final, que per si mateix no integra la riquesa de processos intel·lectuals que condueix a aquest coneixement. Els processos d'abstracció, de generalització, intuïció i raonament matemàtic en general no estan inclosos com una mena de subproducte afegit en els resultats finals. En poques paraules: la finalitat central de l'aprenentatge de la matemàtica, i punt de referència en la fixació dels objectius concrets, ha de ser el desenvolupament de la capacitat de raonament matemàtic. De poc servirà a la formació intel·lectual de l'alumne el coneixement de molts resultats matemàtics, acompanyats de les seves respectives demostracions, si això no va acompanyat de l'adquisició de l'habilitat per raonar matemàticament. Al cap i a la fi, un resultat matemàtic o un mètode de resolució, que en un moment donat no recordem, sempre pot ser consultat en un llibre de text. Però la capacitat de raonament és quelcom que ha de ser educat, és un dels tresors més preuats del quefer matemàtic i no el trobem en cap llibre: l'hem de cercar en les potencialitats desenvolupades del nostre cervell.

La finalitat última de l'educació matemàtica ha de ser, per tant, l'educació de la capacitat de raonament dels nostres alumnes, més que no pas la descripció de resultats tancats. Si admetem amb Descartes l'existència d'un mètode de raonament general aplicable a totes les disciplines, en la mesura en què aconseguim aquest objectiu estarem preparant millor els nostres alumnes per desenvolupar tasques fins i tot molt allunyades del món de la matemàtica.

És clar que l'únic camí per arribar a aquest objectiu són els problemes, plantejats de manera pautada i convenientment dirigits. La finalitat de la resolució de problemes en l'educació matemàtica seria, per tant, doble; d'una banda, la resolució de problemes porta l'alumne a la necessitat de construir nous instruments de càlcul i a validar-ne els resultats sobre la base del problema que pretén resoldre. D'una altra, l'alumne obtindrà una visió de la matemàtica com un conjunt integrat de raonament, necessari per al desenvolupament no solament de la matemàtica, sinó de tota la ciència.

Referències bibliogràfiques

[1] APÉRY et al.: *Pensar la Matemática*. Barcelona: Tusquets, 1984.
[2] APOL·LONI DE PERGA: *Les coniques*. Bruges: Desclée de Brouwer, 1923. Traduïda al francès per Paul Ver Eecke.

[3] ARQUÍMEDES: *Les Oeuvres Complètes d'Archimède.* (2 vol.). París: Albert Blanchard, 1960. Edició a cura de Paul Ver Eecke.
[4] BOMBELLI, R.: *L'Algebra. Opera di...* Bolonya: Giovanni Rossi, 1579.
[5] DAVIS, P. J.; REUBEN, H.: *El sueño de Descartes.* Barcelona: Labor, 1989.
[6] DESCARTES, R.: *La Geometria.* Barcelona: IEC/Pòrtic/Eumo, 1999. Clàssics de la Ciència. Traducció i notes a càrrec de J. Pla i P. Viader.
[7] DIOFANT D'ALEXANDRIA: *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones.* Bruges: Desclée de Brouwer, 1926. Traduïda al francès per Paul Ver Eecke.
[8] FOWLER, D.: «Perils and Pitfalls of History», a *For the Learning of Mathematics,* 2. (vol. 11). 1991. Pàg. 15-16.
[9] GONZÁLEZ URBANEJA, P. M.; VAQUÉ, J.: *Arquímedes. El método relativo a los problemas mecánicos.* Barcelona: Servei de Publicacions de la UAB, 1993.
[10] GUZMÁN, M.: *Aventuras matemáticas.* Barcelona: Labor, 1986.
[11] HADAMARD, J.: *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.* París: 1993. Reedició d'Éditions Jacques Gabay.
[12] HOGBEN, L.: *El universo de los números.* Barcelona: Destino, 1966.
[13] HOLTON, G.: *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas.* Barcelona: Reverté, 1981.
[14] KLEIN, F.: *La matemática elemental vista desde un punto de vista superior.* (2 vol.). Madrid: Biblioteca Matemática, 1927-31.
[15] LEBESGUE H.: *Message d'un mathématicien: Henri Lebesgue.* París: Albert Blanchard, 1974. Extractes a càrrec de L. Felix.
[16] MASON, J. et al.: *Pensar matemáticamente.* Barcelona: Labor, 1988.
[17] OFIR, R.: «Historical Happenings in the Mathematical Classroom», a *For the Learning of Mathematics,* 2. (vol. 11). 1991. Pàg. 21-23.
[18] PAGELS, H.: *Los sueños de la razón.* Barcelona: Gedisa, 1991.
[19] PAPUS D'ALEXANDRIA: *La Collection Mathématique.* Bruges: Desclée de Brouwer, 1933. Traduït al francès per Paul Ver Eecke.
[20] POINCARÉ, H.: *L'invention mathématique.* París, 1993. Reedició d'Éditions Jacques Gabay.
[21] PUIG ADAM, P.: *Didáctica matemática eurística.* Madrid: Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral, 1956.
[22] RADEMACHER, H.; TOEPLITZ, O.: *The Enjoyment of Mathematics.* Nova York: Dover Publications, 1990.
[23] REY PASTOR, J.: *La ciencia y la técnica en el descubrimiento de América.* Madrid: Espasa Calpe, 1970.
[24] RICO, L. (coord.): *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona: ICE de la Universitat de Barcelona/Horsori, 1997.
[25] TATON, R.: *Historia general de las ciencias.* Barcelona: Destino, 1982.
[26] VIETA, F.: *In artem analyticem Isagoge.* Tours: Mettayer, 1591.
[27] VIETA, F.: *Zeteticorum libri quinque.* Tours, 1593.
[28] WEISBERG, R. W.: *Creatividad. El genio y otros mitos.* Barcelona: Labor, 1987.

Paraules clau

Matemàtica

Història de la Matemàtica

Raonament

Aprenentatge

Epistemologia

Resolució de problemes

Invenció matemàtica

Abstracts

Desde el principio de los tiempos, la Matemática se ha generado en todas las civilizaciones sobre la base de la resolución de problemas prácticos. No obstante, a partir del período griego la Historia nos muestra la necesidad de hacer un paso hacia adelante: la evolución histórica de la Matemática sitúa los métodos de razonamiento como eje central de la investigación en la Matemática. A partir de una mirada a los objetivos y métodos de trabajo de algunos autores célebres en la Historia de los conceptos matemáticos postulamos el aprendizaje de las formas de razonamiento matemático como el objetivo central de la educación matemática, y la resolución de problemas como el medio más eficiente para coronar este objetivo.

Depuis l'aube des temps, la Mathématique a été générée dans toutes les civilisations sur la base de la résolution de problèmes pratiques. Cependant, à partir de l'époque grecque, l'Histoire nous démontre la nécessité d'aller plus loin: l'évolution historique de la Mathématique fait des méthodes de raisonnement l'axe central de la recherche sur la Mathématique. Une étude des objectifs et méthodes de travail de certains auteurs célèbres de l'Histoire des concepts mathématiques nous permet de postuler l'apprentissage des formes de raisonnement mathématique comme l'objectif central de l'éducation mathématique, et la résolution de problèmes comme le moyen efficace d'atteindre cet objectif.

Since time immemorial, Mathematics has developed in all civilisations in order to solve practical problems. However, beginning with the Greeks, history has shown us the need to take one step further forward: the historical evolution of Mathematics places the methods of reasoning at the heart of mathematical research. Based on a review of the research objectives and methods of a number of distinguished writers in the history of mathematical concepts, we argue that the learning of the forms of mathematical reasoning should constitute the main aim of a mathematical education, and the resolution of problems are the most efficient means for achieving this objective.