DETERMINISMO E INDETERMINISMO. IMPLICACIONES EPISTEMOLOGICAS DE LA TEORIA PROBABILISTICA DEL POTENCIAL

EDUARDO BONET
CENTRE D'ESTUDIS DE MATEMATICA APLICADA

1. *Antecedentes y Presentación de la Teoría*

1.1. *La Teoría clásica del Potencial*

Si debemos clasificar o encuadrar la Teoría Clásica del Potencial, basándonos en sus implicaciones de significado e interpretaciones históricamente dadas, trascendiendo así sus aspectos puramente formales y técnicos, no dudaremos en situarla en el marco del sistema determinista.

Efectivamente, este sistema se desarrolló a partir del determinismo mecanicista, basado fundamentalmente en las leyes de la Mecánica Clásica y fue en esta teoría donde apareció por vez primera el concepto de Potencial. La introducción del *Potencial Gravitatorio* permitía calcular fácilmente el trabajo de desplazamiento de un cuerpo sometido al campo de la gravedad. Más tarde, al estudiarse las distribuciones de cargas eléctricas, se introdujo el *Potencial Eléctrico,* que no difería del anterior ni en su concepto ni en su formulación, sino simplemente en la naturaleza, gravitatoria o eléctrica, de la distribución de masas o cargas generadoras del campo. Ambos potenciales, derivados de la fórmula de atracción de NEWTON, recibieron el nombre de *Potenciales Newtonianos.*

Propiedades del Potencial Newtoniano

Entre las propiedades que el Análisis Moderno destaca y que serán comentados en relación con la Teoría Probabilística del Potencial y sus implicaciones epistemológicas, cabe indicar las siguientes:

Dada una distribución de cargas $q(x)$ se puede calcular el potencial $p(y)$ creado por dichas cargas en el punto y.

Este cálculo analíticamente se realiza por la fórmula, que muy bien podemos no retener

$$p(y) = \frac{1}{2\pi} \int_E \frac{d\,q(x)}{|x-y|}$$

la cual define una aplicación T del conjunto $\mathbf{Q}$ de distribuciones de cargas en el conjunto $\mathbf{P}$ de funciones de potencial

$$T : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$$

La aplicación T es inyectiva y, por lo tanto, existe la aplicación inversa T^{-1}

$$T^{-1} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$$

que permite calcular, a partir de la función potencial $p(y)$, la distribución de cargas $q(x)$ que la genera.

Sin embargo, la forma analítica de la transformación T^{-1}, así como sus propiedades, no son tratadas explícitamente en la Teoría Clásica, que constituye un marco teórico poco adecuado a estos problemas, dentro del cual se resuelven con dificultad.

Funciones Armónicas

En relación con los potenciales newtonianos, se desarrolla a partir del siglo XIX el estudio de las funciones armónicas. Esta temática estaba inicialmente impulsada por problemas importantes de la Física clásica que constituían una fuente importante de inspiración e intuición sobre este asunto.

La definición clásica de función armónica y sus propiedades y relaciones que se indican rigurosamente en el apéndice, pueden ser parafraseados del modo siguiente: "una función es armónica si su valor en cada punto P es el promedio de los valores que toma dicha función en los puntos vecinos de P". Claramente esta propiedad definidora constituye una cierta condición de estabilidad que explica el correlato de este formalismo con problemas de equilibrio. Debe recordarse que históricamente fueron los problemas de membranas elásticas y de equilibrio técnico los que centraron la atención en el estudio de estas funciones.

Una cuestión central de este tema es el llamado *Problema de Dirichlet*: "Conociendo los valores de una función armónica en el borde B (fig. 1), determinar sus valores en cada punto P interior al recinto limitado por B". Este planteo corresponde al modo natural en que se presentan los problemas de equilibrio físico citados anteriormente; así fijado el borde de una membrana elástica queda determinada su posición de equilibrio que debe ser calculada; fijada la temperatura en los bordes o paredes de un cuerpo se establece un equilibrio térmico que permite calcular la temperatura en cada punto interior.

Desarrollos posteriores

La Teoría clásica del Potencial y el estudio de las funciones armónicas no se limitó al caso newtoniano, sino que evolucionó situándose actualmente en problemas y planteos exclusivamente matemáticos relacionados con la resolución de ecuaciones diferenciales y ecuaciones en derivadas parciales de tal modo que en muchos casos sería difícil hallar una referencia o aplicación a la Física. Tal evolución hacia campos más abstractos debe ser

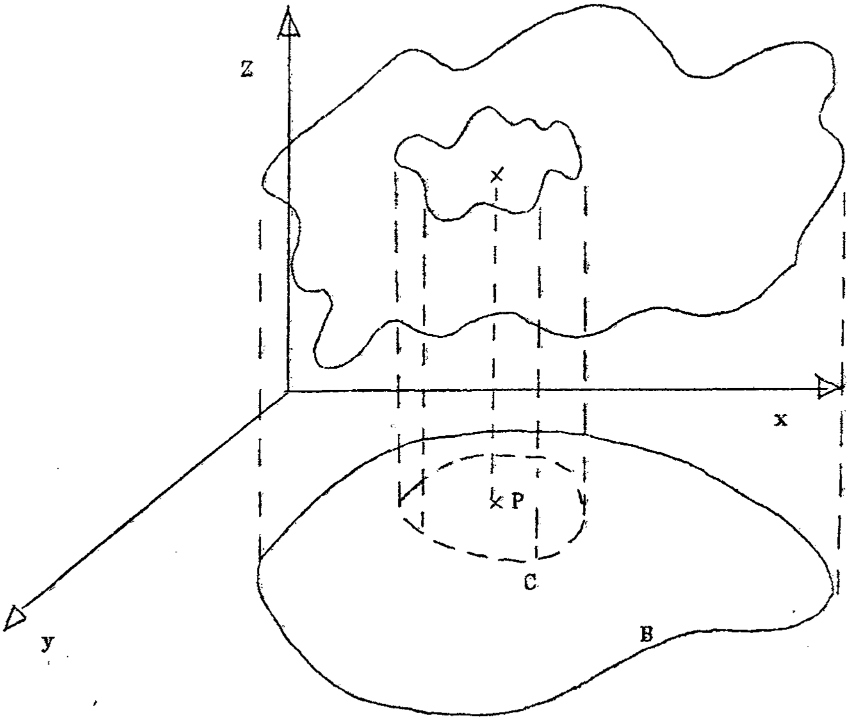


FIG. 1. — La altura (Z) de una membrana elástica en el punto P es el valor medio de las alturas de dicha membrana en la circunferencia C. Fijados los valores de la membrana en el borde B puede calcularse la posición de toda la membrana.

considerada históricamente natural ya que el mismo potencial newtoniano fue puesto de manifiesto y definido a partir tanto más de cuestiones de ecuaciones diferenciales que de intuiciones mecánicas o concepciones generales del universo.

Reiteremos aquí que no dudaremos en calificar de deterministas todas estas cuestiones y enfoques.

1.2. *Movimiento browniano*

En cambio, el estudio del movimiento Browniano nos conduce a los procesos estocásticos o aleatorios que constituyen claramente las formalizaciones indeterministas más importantes de la Física Clásica.

La descripción primera de este movimiento se debe al botánico escocés BROWN que en el año 1827 publicó sus investigaciones sobre el comportamiento de granos de polen suspendidos en agua u otros líquidos. Entre las características fundamentales, indicadas por este autor, debemos resaltar, junto a propiedades que refieren relaciones físicas como son las observaciones que el aumento de temperatura aumenta la rapidez del proceso y el aumento del tamaño de la partícula o la viscosidad del líquido disminuyen dicha rapidez, las condiciones que refieren propiedades formales de este movimiento. Estas condiciones son las siguientes: El movimiento de una partícula, a partir de un punto P cualquiera alcanzado, es completamente imprevisible, pudiendo realizarse con igual facilidad en cualquier dirección sin que la trayectoria seguida previamente hasta llegar a P suministre alguna información sobre su desarrollo futuro. Además, dos partículas distintas siguen trayectorias incorrelacionadas, incluso en el caso de encontrarse en posiciones muy próximas.

A partir de los trabajos de Brown, las investigaciones posteriores enfrentaron, a veces conjuntamente, dos problemas fundamentales: dar una explicación física de este movimiento, lo cual conduciría a considerar choques moleculares y a aplicar los principios de la Mecánica Estadística y, por otra parte, describir un modelo formal matemático que explicara probabilísticamente este fenómeno, lo cual condujo al estudio de los procesos estocásticos.

Einstein en 1905, basándose en las leyes de la Mecánica Estadística y buscando un instrumento matemático adecuado para tratar importantes problemas de Física Atómica — ya que la motivación última de esta investigación era demostrar la existencia real de los átomos y las partículas que eran considerados aún en aquella época por físicos tan prestigiosos como Mach como meras ficiones del pensamiento — describió un proceso aleatorio regido por las leyes normales de probabilidad, o leyes de Gauss. Sólo *a posteriori* tuvo conocimiento que este proceso constituía un modelo matemático adecuado para describir el movimiento browniano observado y estudiado por los naturalistas. De este modo esta forma de indeterminismo penetraba en las cuestiones más importantes de la Física de nuestro siglo.

Procesos de Wiener

Pero, a pesar de las aportaciones de Einstein, el estudio matemático-formal del movimiento browniano no se realizó de modo profundo y sistemático hasta mucho más tarde. En su trabajo publicado en 1920, Wiener demostraba los teoremas fundamentales referentes a estos procesos y daba una visión tan completa del asunto que, a partir de entonces, se ha llamado Proceso de Wiener a este formalismo matemático.

Reflejando las propiedades formales del movimiento browniano referidas anteriormente, el proceso de Wiener es un proceso normal y markoviano: Conocida la posición x_1 del sistema en el instante t_1 no podemos determinar exactamente la posición x_2 en el instante posterior t_2, pero por lo menos podemos calcular la ley de probabilidad de dicha posición, esta ley es una ley normal o de Gauss y el conocimiento de la evolución anterior del sistema, hasta alcanzar en el instante t_1 el estado x_1, no modifica esta ley de probabilidad (esta última propiedad es designada con el nombre de *condición de Markov*).

10.

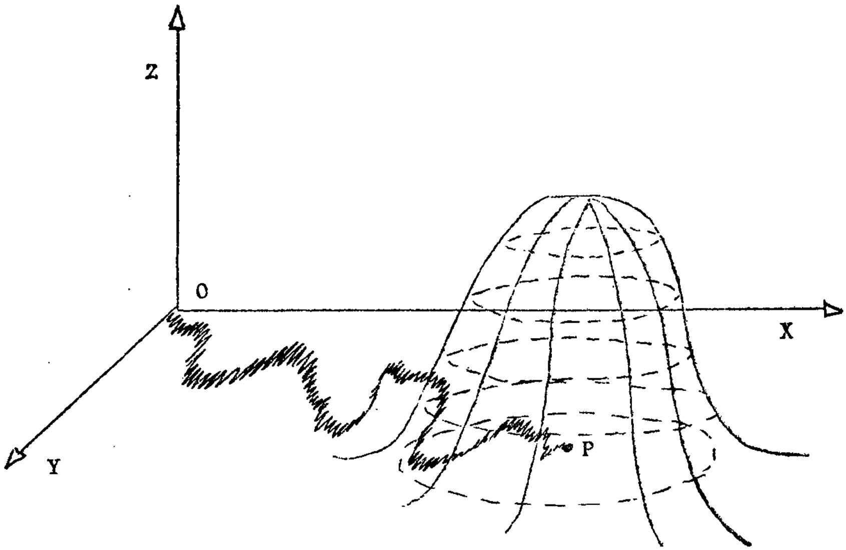


FIG. 2. — Movimiento browniano de una partícula en el plano XY: alcanzado el punto P, a partir del origen según la trayectoria que se indica, la probabilidad de su situación en el instante t_2 queda determinada por la superficie de campana de Gauss.

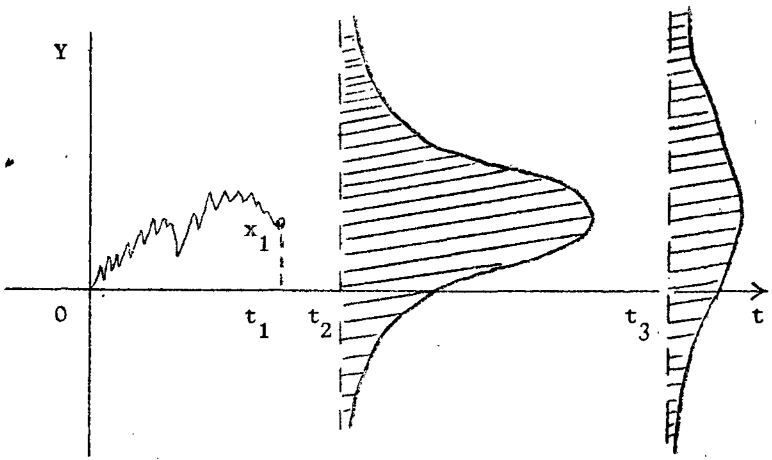


FIG. 3. — Movimiento browniano de una partícula en el eje OY (en OX se indica el tiempo): si en t_1 la partícula se halla en x_1 en t_2 y en t_3 su posición obedece a las leyes de probabilidad normales que se indican. Nótese que al transcurrir más tiempo la dispersión de estas leyes aumenta.

Técnicamente debe ser considerado el operador de transmisión de probabilidad: Dada la ley de probabilidad $P_{t_1}(x_1)$ de la posición de la partícula en el instante t_1 se calcula la ley de probabilidad $P_{t_2}(x_2)$ de la posición en un instante posterior t_2 por medio de la fórmula siguiente:

$$P_{t_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi K(t_2 - t_1)}} \int_E e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{k(t_2 - t_1)}} P_{t_1}(x_1)\, dx_1$$

que constituye para cada par de instantes t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ un operador que designaremos por W_{t_1, t_2} de transmisión de probabilidad definiendo una aplicación del conjunto $\mathbf{P}_{t_2}$ de distribuciones de probabilidad en el instante t_1 en el conjunto $\mathbf{P}_{t_1}$ de distribuciones de probabilidad en t_2

$$W_{t_1, t_2} : \quad \mathbf{P}_{t_1} \rightarrow \mathbf{P}_{t_2}$$

Procesos de Markov

Conceptualmente el proceso de Wiener es un caso particular, con leyes normales, de los procesos sujetos a la condición de Markov. Otros procesos markovianos se estudian con otros operadores de transmisión de probabilidad, distintos del dado anteriormente, y en el caso de sistemas con un número finito de estados la transmisión de probabilidad se representa analíticamente por medio de matrices de Markov.

Estos procesos constituyen el modelo formal adecuado para interpretar indeterminísticamente un amplio campo de fenómenos entre los que cabe citar, aparte de los referentes a cuestiones técnicas y de organización, los genéticos y los de aprendizaje.

1.3. *Teoría Probabilística del Potencial. El teorema de Kakutani (1944)*

Las dos teorías citadas anteriormente, la Teoría clásica del Potencial y la Teoría de los procesos de Wiener, aparecían como dos campos de investigación completamente diferenciados, sin referencias entre ellos. El propio WIENER, que hizo también importantes descubrimientos en la Teoría del Potencial, no sospechó jamás una relación entre ambas cuestiones. Sin embargo, en 1944, KAKUTANI obtenía un teorema — y este caso como muchos otros ilustra claramente el hecho de que la creación matemática, se obtiene a partir de una importante intuición e imaginación y no de un puro automatismo deductivo — que revela una profunda interdependencia de ambas teorías.

Fundamentalmente, y simplificando algunas cuestiones técnicas que se expresan correctamente en el apéndice, este teorema establece que el operador T del potencial newtoniano, que transforma las distribuciones de carga en funciones de potencial, se obtiene como límite del operador W_{t_1, t_2} de transmisión de probabilidad en los procesos de Wiener. Ciertas propiedades del cálculo integral exigen que la dimensión del espacio en que tiene lugar el proceso de Wiener, tenga dimensión 3, fallando el teorema en el caso de movimientos lineales o planos. Formalmente suele escribirse

$$T = \lim_{t \to \infty} \int_0^t W_{0,t}$$

A partir de este resultado, muchos problemas difíciles de Potencial se transforman en cuestiones naturales de procesos. Veamos, en este orden de ideas, cómo el teorema de Kakutani permite tratar el *problema de Dirichlet en términos de movimiento browniano:*

Si el punto P (fig. 4), en el cual queremos calcular el valor de una función armónica f, es origen de un movimiento browniano, se obtiene una trayectoria aleatoria que corta la superficie S en un punto Q, naturalmente también aleatorio, del cual analíticamente se puede calcular su distribución de probabilidad μ sobre la superficie S. Pues bien, el valor de f en P es el valor medio (probabilístico) de los valores de f en S, por tanto conocido en el planteo de Dirichlet, ponderados por la probabilidad μ.

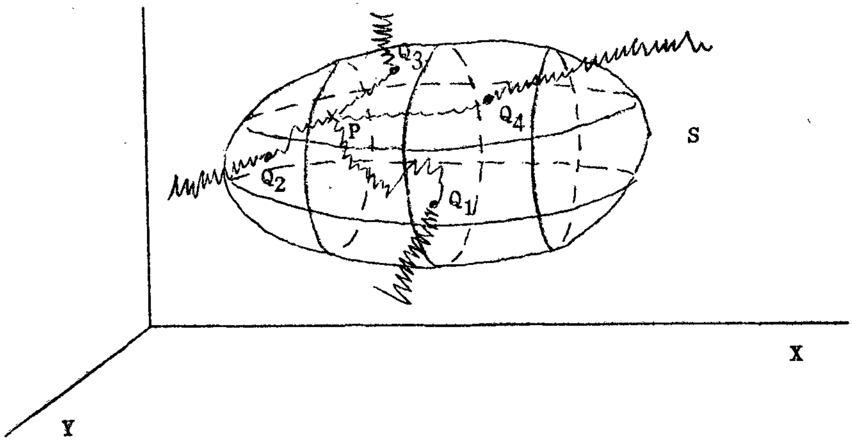


FIG. 4

A partir de esta propiedad se ha renovado por completo los métodos de *cálculo numérico* de las funciones armónicas. Dicha cuestión, enormemente difícil en el cálculo clásico, se programa ahora del modo siguiente: Un *simulador* produce artificialmente un movimiento aleatorio, que originándose en el punto P esté regido por las leyes del proceso de Wiener; de su trayectoria se retiene el punto Q en que corta a la superficie S. Repetida esta operación un número suficiente de veces para asegurar, de acuerdo con las leyes de los grandes números, una aproximación prefijada entre el valor medio probabilístico y el valor medio estadístico, se calcula finalmente el promedio estadístico de la función armónica f en el conjunto de puntos Q_i obtenidos. Este valor es una estimación correcta del valor de f en P.

Desarrollos actuales de esta Teoría

El primer programa de estudio sugerido por el teorema de Kakutani, versó en la reducción de *todos* los conceptos referentes a la teoría del Potencial Newtoniano a términos de procesos de Wiener.

Pero además, un nuevo descubrimiento fundamental ampliaba el alcance e importancia de esta temática:

"El operador de transmisión de probabilidad $W_{t_1 t_2}$ del proceso de Wiener tridimensional, puede obtenerse por medio de ciertas construcciones formales, a partir del operador potencial."

Así se cerraba el círculo, y los conceptos y problemas de la teoría del movimiento browniano eran reducidos a problemas de potencial.

Los trabajos actuales están enfocados buscando la equivalencia entre los problemas de teoría del potencial, no necesariamente newtonianos, y las funciones armónicas en sentido generalizado con los problemas de procesos y cadenas de Markov no necesariamente wienerianos.

Doob, Hunt, Meyer, Dynkin, entre otros, son los grandes creadores actuales de esta teoría.

Adoptando un justo tono laudativo debemos decir que el volumen de nuevos resultados es impresionantemente enorme; la investigación actual más fecunda de la Teoría de la Probabilidad gira en torno de estos temas y el tratamiento de ecuaciones en derivadas parciales se a replanteado por completo.

2. *Implicaciones epistemológicas*

2.1. *Análisis sintáctico-semántico*

Si un posible aferramiento a considerar en planos distintos los métodos deterministas y los indeterministas nos presenta una aparente falta de coherencia en los resultados expuestos anteriormente, diluiremos esta posible dificultad distinguiendo el nivel sintáctico del semántico. Cierto que en los análisis del tema determinismo-indeterminismo, se ha utilizado con gran amplitud la distinción sintáctico-semántica, por ejemplo identificando formalmente los conceptos de carga, masa y probabilidad, y cierto que, incluso desde las antiguas posiciones radicalmente deterministas, como las de Laplace, se ha admitido la posibilidad de describir un mismo fenómeno físico por medio de modelos deterministas o aleatorios, según la profundidad del análisis realizado. Pero el caso de la Teoría Probabilística del Potencial, dado los matices especiales que plantea y la importancia especial de las teorías que involucra, aporta nuevos puntos de vista sobre este tema.

Nos encontramos ante un formalismo matemático, sintáctico, basado especialmente en operadores o aplicaciones, tales que la parte referente al operador T se ha vinculado semánticamente, como hecho histórico, a los problemas deterministas de la Teoría del Potencial, mientras que la parte referente al operador $W_{t_1 t_2}$ constituye el núcleo natural de las leyes indeterministas del movimiento browniano. Y sin embargo, formalmente un operador exige al otro: Si quisiéramos limitar nuestro estudio a las propiedades de uno, excluyendo al otro, mutilaríamos el campo formal del mismo modo que, por ejemplo, un caricaturesco matemático admitiere operar con dos funciones pero sin permitir su suma.

2.2. *La dualidad Proceso-Potencial*

Pero el análisis anterior, sintáctico-semántico, solamente explicativo de la coherencia del problema que nos ocupa, debe ser acompañado de un nuevo análisis, esta vez semántico-semántico, que ponga en evidencia que los problemas y conceptos de la Teoría del Potencial se pueden transformar en cuestiones de procesos estocásticos y recíprocamente. Esta reciprocidad, motivada inicialmente sólo por necesidades de cálculo, conduce en el nivel de lenguaje a un cambio de terminología, que se pone explícitamente de manifiesto en muchos tratados técnicos por medio de las características tablas semánticas, como el siguiente diccionario que transcribimos parcialmente:

Teoría Potencial	*Cadenas de Markov*
Funciones armónicas	Funciones regulares
Funciones sobrearmónicas	Funciones sobrerregulares
Conjuntos convexos	Conjuntos comunicables

(Kemeny, Snell, Knapp: *Denumerable Markov Chains,* van Nostrand, New York, 1966.)

2.3. *Reinterpretaciones de la Física Clásica*

En las investigaciones de Física, de problemas relacionados con la Teoría del Potencial, se ha tenido que introducir, como necesidad formal, los procesos estocásticos asociados. Es difícil que éstos sean definitivamente confinados *a priori* a la categoría de meros instrumentos formales, de entes fantasmagóricos sin realidad alguna a pesar de las inflexiones de cambio semántico que comportan. Parece muy natural buscar una explicación o realidad física que permita la "realización" del proceso estocástico.

Esta corriente de pensamiento, dada en varios campos, ha afectado, a través del potencial newtoniano, a la interpretación del campo gravitatorio y del campo eléctrico, que bajo la sugestión de los resultados anteriores se pueden considerar generados por finos movimientos brownianos. Tales interpretaciones podrían llegar a modificar enormemente nuestra visión del universo, conduciendo a una nueva cosmología.

2.4. *Potenciales inductores de fenómenos aleatorios*

Paralelamente a las consideraciones anteriores, y precisamente invirtiendo el aspecto del problema, cabe esperar que los científicos dedicados a problemas relacionados con procesos markovianos se planteen la utilidad de los cálculos con potenciales asociados y sobre todo el significado de los mismos. Quizá por este camino se llegue a definir y dar significado a potenciales genéticos o potenciales en los procesos de aprendizaje, entre otros fenómenos importantes.

Considérese este último párrafo, no como una afirmación categórica, sino como una propuesta de trabajo.

Apéndice

1. *Funciones armónicas.—Teoría clásica*

Ref. 1. Una función $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es armónica en el punto $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si verifica la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = 0$$

Ref. 2. Una función es armónica en un dominio D cuando es armónica en todos los puntos del dominio.

Físicamente se consideran funciones armónicas de dos variables $U(x_1, x_3)$ en el problema de las membranas elásticas y de tres variables $U(x_1, x_2, x_3)$ en los problemas térmicos. Consideramos funciones armónicas de tres variables.

Teorema 1. Una función armónica, continuamente diferenciable, en una región R, cerrada y regular, queda determinada por sus valores en la frontera de R. (Este teorema plantea el problema de Dirichlet).

Teorema 2. Una función armónica y continuamente diferenciable, en una región R, cerrada y regular puede ser representada como suma de potenciales newtonianos de distribución de cargas en la frontera de R.

Teorema 3. (Teorema del valor medio o teorema de GAUSS):

Si U es armónica en una esfera, el valor de U en el centro de la esfera es la media aritmética (integral) de sus valores en la superficie de la esfera. Es decir:

$$U(c) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S U\,dS$$

R: centro de la esfera
S: superficie esférica

Teoría moderna (no probabilística)

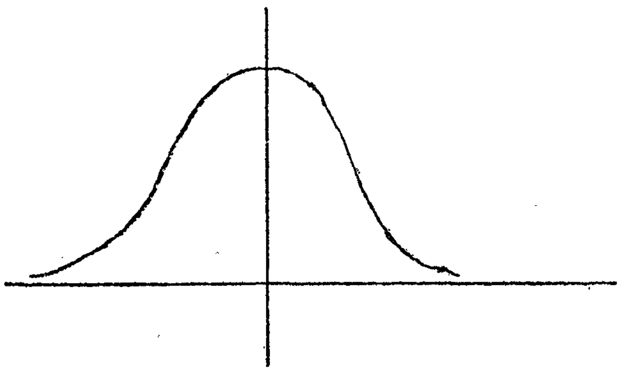
Una descripción de la Teoría clásica de las funciones armónicas pone de manifiesto que se parte de la ecuación de LAPLACE (ecuación con derivadas parciales de segundo orden); a sus soluciones se les imponen condiciones de DIRICHLET y se relaciona el problema con el potencial newtoniano. El planteo moderno parte ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden (no necesariamente laplacianas) sometidas a condiciones de DIRICHLET. La solución se realiza a través de funciones armónicas (en un sentido más general) y potenciales (también más generales), introduciéndose ambas generalizaciones axiomáticamente.

2. *Movimientos brownianos.—Densidad de probabilidad de la ley normal*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\delta}\right)^2}$$

m = valor medio probabilístico

δ = dispersión de la ley de probabilidad.



Proceso de Markov

Sea t el tiempo y X_t una familia de variables aleatorias, X_t es un proceso de Markov si

$$\text{Prob}\,[X_t \in A \mid X_{t_1} = x_1 \quad \text{y} \quad X_{t_2} = x_2, \ \ldots, \ X_{t_n} = x_n] =$$

$$= \text{Prob}\,[X_t \in A \mid X_{t_n} = x_n]$$

si $t_1 < t_2 <, \ \ldots, \ < t_n < t$

La probabilidad de la posición en el instante t, conociendo (condicionando) la posición en los instantes anteriores $t_1 < t_2 <, \ \ldots, \ < t_n$ es igual a la probabilidad condicionada por la posición en el último instante t_n.