Vol. 15, 3, 375–379 (1999)

Revista Internacional de
Métodos Numéricos para
Cálculo y Diseño en Ingeniería

Fórmulas de cuadratura invariantes de grado 8 para el simplex 4-dimensional

Eduardo Sainz de la Maza

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Universidad del País Vasco
Facultad de Ciencias
Apartado 644
48080 Bilbao, España
Tel.: 34-94-601 20 00, Fax: 34-94-464 85 00
e-mail: mepsaese@lg.ehu.es

Resumen

Para un simplex 4-dimensional T_4 se conocen fórmulas de cuadratura invariantes de grado de precisión hasta $d = 7$ como se muestra en las referencias[1,5]. En este trabajo se presentan dos nuevas fórmulas de cuadratura invariantes de grado de precisión $d = 8$ con 91 nodos. Estas fórmulas han sido obtenidas usando la teoría de consistencia desarrollada en la referencia[3] y las estructuras consistentes dadas en la referencia[2].

INVARIANT QUADRATURE RULES OF DEGREE 8 FOR THE 4-DIMENSIONAL SIMPLEX

Summary

Invariant quadrature rules for the 4-dimensional simplex T_4 are known for degrees of precision up to $d = 7$ as shown in the references[1,5]. In this paper we present two new invariant quadrature rules of degree of precision $d = 8$ with 91 nodes. These rules have been obtained using the consistency theory developed in the reference[3] and the consistent structures given in the reference[2].

INTRODUCCIÓN

Sea T_n un simplex en el espacio Euclídeo n-dimensional R^n. Por sencillez suponemos que el simplex está centrado en el origen de coordenadas.

En la referencia[3] se dan condiciones y estructuras consistentes para fórmulas de cuadratura invariantes para T_n. Más aún, extensos listados con estructuras casi-óptimas para dimensiones $n = 2, ..., 8$ pueden encontrarse en la referencia[2]. Por otro lado, en las referencias[1,5–6] se da un resumen de las fórmulas conocidas para el simplex 4-dimensional T_4. Senãlemos que sólo se conocen fórmulas de grado de precisión hasta $d = 7$. En este trabajo, se utilizan las condiciones de consistencia dadas en la referencia[3] y las estructuras de la referencia[2] para obtener nuevas fórmulas de cuadratura invariantes de grado $d = 8$ para el simplex 4-dimensional T_4.

Sea G_4 el grupo de simetrías de T_4 (permutaciones de las coordenadas baricéntricas). Dada la integral

$$I(f) = \frac{1}{\mathrm{vol}(T_4)} \int_{T_4} f(x)dx \qquad (1)$$

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Julio 1998

consideremos el problema de construir una fórmula de cuadratura invariante

$$Q(f) = \sum_{i=1}^{v(Q)} W_i f(x_i) \tag{2}$$

que aproxima $I(f)$ con un grado de precisión d dado, es decir, cumpliendo

$$Q(f \circ s) = Q(f) \ \ \forall s \in G_4 \tag{3}$$

y

$$Q(p) = I(p) \ \ \forall p \in P_d \tag{4}$$

Obviamente, intentamos obtener fórmulas que tengan un número de nodos $v(Q)$ lo menor posible. Es bien conocido que es suficiente satisfacer las ecuaciones de los momentos (4) para una base del espacio de polinomios invariantes de grado menor o igual que d, sea P_d^*.

Una *clase* $[m_0, m_1, ..., m_r]$ se define como el conjunto de puntos $x \in R^4$ tales que para alguna simetría $s \in G_4$ la representación de coordenadas baricéntricas de $s(x)$ tiene la forma

$$\lambda(s(x)) = \overbrace{a_0, ..., a_0}^{m_0 \text{veces}}, \overbrace{a_1, ..., a_1}^{m_1 \text{veces}}, \overbrace{a_r, ..., a_r}^{m_r \text{veces}} \tag{5}$$

En la Tabla I se muestran las 7 clases de nodos generadores para T_4 junto con el número de incógnitas $r_i + 1$ y nodos v_i que aportan a la fórmula.

n	Clase	$r_i + 1$	v_i
4	$C_0 = [5]$	1	1
4	$C_1 = [4, 1]$	2	5
4	$C_2 = [3, 2]$	2	10
4	$C_3 = [3, 1, 1]$	3	20
4	$C_4 = [2, 2, 1]$	3	30
4	$C_5 = [2, 1, 1, 1]$	4	60
4	$C_6 = [1, 1, 1, 1, 1]$	5	120

Tabla I. Clases de nodos para la dimensión $n = 4$

La *estructura* de una fórmula de cuadratura invariante viene dada por $(K_0, K_1, ..., K_6)$ donde cada K_i es el número de nodos generadores de la clase C_i que intervienen en la fórmula. Por lo tanto, el número total de nodos de una fórmula de cuadratura invariante con la estructura anterior es

$$\nu(Q) = \sum_{i=0}^{6} \nu_i K_i \tag{6}$$

y el número de incógnitas a determinar con el sistema de los momentos es

$$N_P(Q) = \sum_{i=0}^{6}(r_i + 1)K_i \tag{7}$$

Las condiciones de consistencia (condiciones necesarias) para la existencia de una fórmula de cuadratura invariante, ver referencia[3], toman, en el caso de T_4, la forma siguiente

$$\begin{aligned}
K_0 + 2K_1 + 2K_2 + 3K_3 + 3K_4 + 4K_5 + 5K_6 &\geq \dim P_d^* \\
2K_1 + 2K_2 + 3K_3 + 3K_4 + 4K_5 + 5K_6 &\geq \dim P_d^*(0) \\
2K_2 + 3K_3 + 3K_4 + 4K_5 + 5K_6 &\geq \dim P_d^*(0,1) \\
2K_1 + 3K_3 + 3K_4 + 4K_5 + 5K_6 &\geq \dim P_d^*(0,2) \\
3K_3 + 3K_4 + 4K_5 + 5K_6 &\geq \dim P_d^*(0,1,2) \\
3K_4 + 4K_5 + 5K_6 &\geq \dim P_d^*(0,1,2,3) \\
3K_3 + 4K_5 + 5K_6 &\geq \dim P_d^*(0,1,2,4) \\
4K_5 + 5K_6 &\geq \dim P_d^*(0,1,2,3,4) \\
5K_6 &\geq \dim P_d^*(0,1,2,3,4,5)
\end{aligned} \tag{8}$$

donde $P_d^*(i_1, ..., i_j)$ denota espacio de polinomios invariantes de grado no superior a d que se anulan en los puntos de las clases $C_i, ..., C_{ij}$. En la referencia[3] se muestra también como calcular las dimensiones de estos espacios, con lo que se puede comprobar si una determinada estructura es o no consistente.

La primera desigualdad de (8) muestra el número de incógnitas y de ecuaciones en el sistema (reducido) de los momentos. Mas aún, para cada una de las restantes condiciones de consistencia, podemos encontrar una base del correspondiente espacio de polinomios $P_d^*(i_1, ..., i_j)$, con lo que obtenemos un sistema de menor dimensión en el que sólo intervienen parte de las incógnitas.

DOS NUEVAS FÓRMULAS DE CUADRATURA

Para el grado de precisión $d = 8$ la estructura óptima consistente es $(0, 4, 2, 1, 1, 0, 0)$ que corresponde a una fórmula con 90 nodos. Las condiciones de consistencia (8) para esta estructura son $18 \geq 18, 18 \geq 17, 10 \geq 10, 14 \geq 10, 6 \geq 5, 3 \geq 1, 3 \geq 1, 0 \geq 0$ y $0 \geq 0$. La desigualdad $10 \geq 10$, para la tercera desigualdad de (8), muestra que existe un subsistema con 10 ecuaciones y 10 incógnitas. Estas 10 ecuaciones provienen de aplicar las ecuaciones de los momentos (4) a una base del espacio de polinomios invariantes $P_8^*(0, 1)$ de grado no superior a 8 y que se anulan en los puntos de las clases C_0 y C_1 y las incógnitas de este subsistema son los coeficientes y coordenadas de los nodos de las clases C_2, C_3 y C_4. El resto da un sistema con 8 ecuaciones y 8 incógnitas.

He encontrado una solución del subsistema de 10 ecuaciones y 10 incógnitas , que parece ser única, y que determina los coeficientes y coordenads de los nodos de tipos C_2, C_3 y C_4. Conocidos estos, nos queda un sistema de sólo 8 ecuaciones con 8 incógnitas, relativos a los 4 nodos de tipo C_1. No he encontrado ninguna solución de dicho sistema y no parece nada probable que la tenga. Así pues, no parece existir fórmula óptima de grado $d = 8$ con 90 nodos.

Sin embargo, podemos obtener fórmulas de grado $d = 8$ con 91 nodos usando la primera estructura casi-óptima $(1, 4, 2, 1, 1, 0, 0)$ dada en la refencia[2], es decir, añadiendo el origen o nodo de tipo C_0 a la estructura anterior. De hecho hay una familia uniparamétrica de fórmulas con tal estructura. Las condiciones de consistencia (8) para esta estructura son

$19 \geq 18, 18 \geq 17, 10 \geq 10, 14 \geq 10, 6 \geq 5, 3 \geq 1, 3 \geq 1, 0 \geq 0$ y $0 \geq 0$. El subsistema de 10 ecuaciones con 10 incógnitas para esta estructura es el mismo que en caso anterior, por lo que tenemos la solución única del mismo. El resto da lugar a un sistema de 8 ecuaciones con 9 incógnitas, los coeficientes y coordenadas de los nodos de tipos C_0 y C_1, que admite una familia uniparamétrica de soluciones. Esta técnica se describe con más detalle en la referencia[3] y también ha sido usada en las referencias[4,5]. En particular, he obtenido varias de esas fórmulas de cuadratura con 91 nodos. Se dan dos de estas fórmulas que tienen nodos en la frontera, en las Tablas II y III.

REFERENCIAS

1 R. Cools, y P. Rabinowitz, "Monomial cubature rules since Stroud: a compilation", *J. Comp. Appl. Math.*, Vol. **48**, pp. 309–326, (1993).

2 J.I. Maetzu y E. Sainz de la Maza, "Quasi-optimal consistent structures of invariant quadrature rules for the n-simplex", Informe Técnico NA 94-7, Universidad del País Vasco, Bilbao, (1994).

3 J. Maetzu y E. Sainz de la Maza, "Consistent structures of invariant quadrature rules for the n-simplex", *Math. Comp.*, Vol. **64**, pp. 1171–1192, (1995).

4 E. Sainz de la Maza y J. Maetzu, "An invariant quadrature rule of degree 11 for the tetrahedron", *C.R. Acad. Sci.*, Vol. **321**, pp. 1263–1267, Paris, (1995).

5 E. Sainz de la Maza y J. Maetzu, "Fórmulas de cuadratura invariantes de grados 6 y 7 para el simplex 4-dimensional", *Revista Internac. Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* , Vol. **14**, N° 1, pp. 61–66, (1998).

6 A.H. Stroud, "*Approximate calculation of multiple integrals*", Prentice-Hall, New Jersey, (1971).

Peso	Coordenadas baricéntricas	Clase
- 0,7707405040913952041652714	$\lambda_0,\ldots,\lambda_4 =$ 0,2	C_0
0,2323080962634168038622487	$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 =$ 0,1737170533105700510238195 $\lambda_4 =$ 0,3051317867577197959047221	C_1
0,8563341071769677921582303(-2)	$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 =$0,5061417524227754300484440(-1) $\lambda_4 =$ 0,7975432990308898279806224	C_1
- 0,1268731408407999791824120	$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 =$0,8193412374189641569252741(-1) $\lambda_4 =$ 0,6722635050324143372298903	C_1
0,1034753293254667469962172(-1)	$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 =$ 0,25 $\lambda_4 =$ 0	C_1
0,1798358583288679657124083(-5)	$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2 =$ - 0,2048730409609713392483984 $\lambda_3,\lambda_4 =$ 0,8073095433422222090636719	C_2
- 0,4301507828759174737172720	$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2 =$0,7915853594681230452252966(-1) $\lambda_3,\lambda_4 =$ 0,3812621906777472999380806	C_2
0,4357673726246623881076524(-1)	$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2 =$0,6756852150169833595400235(-1) $\lambda_3 =$ 0,6537469926301802725242453 $\lambda_4 =$ 0,1435474310244282230255027	C_3
0,1526322152293582130606971	$\lambda_0,\lambda_1 =$ 0,3828638528828064474795207 $\lambda_2,\lambda_3 =$0,6451501794404591802046197(-1) $\lambda_4 =$ 0,1052422583462952690000347	C_4

Tabla II. Fórmula de grado $d = 8$ con 91 nodos

Peso	Coordenadas baricéntricas	Clase
- 0,7451740975512246003575288(-1)	$\lambda_0,\ldots,\lambda_4 =$ 0,2	C_0
- 0,1504235841635632177574005	$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 =$0,8984929738190505256061108(-1) $\lambda_4 =$ 0,6406028104723797897575557	C_1
0,9180380846437054191485242(-1)	$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 =$ 0,1362845857338889546433980 $\lambda_4 =$ 0,4548616570644441814264080	C_1
0,4349875841789822799558365(-1)	$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 =$ 0,2347167042922028736292568 $\lambda_4 =$0,6113318283118850548297284(-1)	C_1
0,2222278409730763221014317(-3)	$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 =$ 0 $\lambda_4 =$ 1	C_1
0,1798358583288679657124083(-5)	$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2 =$ - 0,2048730409609713392483984 $\lambda_3,\lambda_4 =$ 0,8073095433422222090636719	C_2
- 0,4301507828759174737172720	$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2 =$0,7915853594681230452252966(-1) $\lambda_3,\lambda_4 =$ 0,3812621906777472999380806	C_2
0,4357673726246623881076524(-1)	$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2 =$0,6756852150169833595400235(-1) $\lambda_3 =$ 0,6537469926301802725242453 $\lambda_4 =$ 0,1435474310244282230255027	C_3
0,1526322152293582130606971	$\lambda_0,\lambda_1 =$ 0,3828638528828064474795207 $\lambda_2,\lambda_3 =$0,6451501794404591802046197(-1) $\lambda_4 =$ 0,1052422583462952690000347	C_4

Tabla III. Otra fórmula de grado $d = 8$ con 91 nodos