

CONTROL DEL ERROR EN LA OPTIMIZACIÓN DE FORMA DE ESTRUCTURAS BIDIMENSIONALES

EMILIO DUFEU *
JUAN GÓMEZ **
FRÉDÉRIC CUGNON **
y
PIERRE BECKERS **

* *Universidad de Concepción*
Departamento de Ingeniería Mecánica
Casilla 53C, Concepción, Chile
Tel.: + 56-41-234 985 Fax: + 56-41-259 190
E-mail: edufeu@udec.cl

** *Laboratorio de Técnicas Aeronáuticas y Espaciales*
Universidad de Lieja
21, rue E. Solvay, B4000 Lieja, Bélgica
Tel.: + 32-4-366 9453 Fax: + 32-4-253 2581

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es presentar un método automático de optimización de forma de estructuras bidimensionales, cuyos resultados garanticen una cierta precisión. Se trata de conciliar del modo más eficaz las técnicas de optimización de forma y de control de la calidad de la solución del método de elementos finitos. Un ejemplo numérico es presentado con objeto de mostrar la validez del procedimiento.

ERROR CONTROL IN THE STRUCTURE SHAPE OPTIMIZATION

SUMMARY

The goal of this paper is to present an automatic optimization procedure which ensure the validity of the final design. The main objective of this work is to find out the best way to combine shape optimization with finite element error estimation techniques. A numerical example shows the advantages of the procedure.

Recibido: Mayo 1996

INTRODUCCIÓN

La optimización de forma de estructuras por el método de elementos finitos ha conocido en los últimos años un desarrollo muy importante. Por una parte, este desarrollo ha sido incentivado por las demandas tecnológicas, cada día más exigentes, en la concepción de una estructura y por otra, ha sido posible gracias al aumento del poder de cálculo experimentado por los ordenadores.

En elasticidad lineal, la calidad de la solución obtenida por elementos finitos depende principalmente de la discretización del campo de desplazamientos, la cual también influye fuertemente en el análisis de sensibilidad del proceso de optimización de forma.

Esta dependencia trae como consecuencia en muchos casos que la solución obtenida por el proceso de optimización de forma varíe según la discretización inicial del modelo⁵. Para reducir la dependencia de la solución con respecto a la discretización inicial, se propone un procedimiento automático de optimización de forma con control del error de la solución elementos finitos.

Un número importante de trabajos^{2,9} en este sentido han sido desarrollados en los últimos años. Ellos se diferencian por los métodos de estimación del error relativo, en la manera de generar y controlar el mallado, pero sobre todo en la gestión del nivel de error admisible para los mallados de las etapas intermedias de la optimización de forma.

Este último punto, es decir, el control de los mallados intermedios, es decisivo desde el punto de vista de la eficacia del método. La idea aquí es retardar lo más posible la adaptación de los mallados con el fin de disminuir los tiempos de cálculo cuando aún se está lejos de la forma óptima de la estructura.

OPTIMIZACIÓN DE FORMA

El problema de optimización de forma se expresa matemáticamente del siguiente modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(Z) \quad Z = \{Z_i\} \quad i = 1, \dots, n \\ \text{con } \left\{ \begin{array}{l} g_j(Z) \leq \bar{g}_j \quad j = 1, \dots, m \\ h_k = 0 \quad k = 1, \dots, l \\ \underline{Z}_i \leq Z_i \leq \bar{Z}_i \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1)$$

donde Z_i representa el conjunto de variables de diseño (radios de arcos, ángulos, longitudes, etc.), f es la función objetivo que debe ser minimizada (la masa, el costo, etc.), g_j son las restricciones de desigualdad (del estado de tensiones, del estado de deformaciones, etc.), h_k son las condiciones de igualdad provenientes de relaciones geométricas, las que permiten expresar las variables dependientes en función de las variables independientes (distancia entre líneas, condiciones de tangencia, etc.) y \underline{Z}_i y \bar{Z}_i son los extremos inferior y superior de la variable de diseño Z_i .

Mediante una correcta identificación de las variables independientes, el problema de optimización expresado anteriormente se puede transformar en otro más sencillo sin restricciones de igualdad⁹

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(X) \quad X = \{X_i\} \quad i = 1, \dots, n-l \\ \text{con } \left\{ \begin{array}{l} g_j(X) \leq \bar{g}_j \quad j = 1, \dots, m \\ \underline{X}_i \leq X_i \leq \bar{X}_i \quad i = 1, \dots, n-l \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2)$$

El nuevo problema reducido se resuelve mediante un algoritmo basado en la linealización convexa⁷. La idea principal es emplear una aproximación híbrida de variables directas y recíprocas tanto para la función objetivo como para las distintas restricciones, de manera que el nuevo subproblema explícito resulte convexo y separable.

Normalizando las variables X_i de manera que sean igual a la unidad para X_0 , el subproblema explícito se expresa

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \sum_{f_i > 0} f_i X_i - \sum_{f_i < 0} \frac{f_i}{X_i} \quad i = 1, \dots, n-l \\ \text{con } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{g_{ij} < 0} g_{ij} X_i - \sum_{g_{ij} > 0} \frac{g_{ij}}{X_i} \leq \bar{g}_j \quad j = 1, \dots, m \\ \underline{X}_i \leq X_i \leq \bar{X}_i \quad i = 1, \dots, n-l \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3)$$

donde

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial X_i} |_{X^0}$$

$$g_{ij} = \frac{\partial g_j}{\partial X_i} |_{X^0}$$

$$\bar{g}_j = g_j^0 \sum_{g_{ij} < 0} g_{ij} X_i^0 - \sum_{g_{ij} > 0} \frac{g_{ij}}{X_i^0}$$

Este problema se resuelve por métodos duales de programación matemática⁶.

Cálculo de sensibilidad

La resolución del nuevo problema requiere la evaluación de las derivadas de primer orden, o sea, la determinación de la sensibilidad de la respuesta estructural con respecto a las variables de concepción. En régimen estático lineal la ecuación de equilibrio elementos finitos se escribe

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{g} \quad (4)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez, \mathbf{q} el vector de desplazamientos y \mathbf{g} el vector de fuerzas generalizadas.

La sensibilidad del campo de desplazamientos se obtiene diferenciando la ecuación (4) respecto a las variables de diseño X_i , es decir

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial X_i} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial X_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} \mathbf{q} \right) \quad (5)$$

De la teoría del método de elementos finitos se tiene que el campo de desplazamientos, en cada elemento, se obtiene por interpolación de los desplazamientos nodales según

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (6)$$

donde \mathbf{N} es denominada matriz de las funciones de interpolación.

La deformación se puede expresar directamente en términos de desplazamientos nodales según

$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (7)$$

donde \mathbf{B} es una matriz de las derivadas de las funciones de interpolación. El campo de tensiones asociado a ε se determina por medio de la ley de Hooke

$$\sigma = \mathbf{H} \varepsilon = \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{q} = \mathbf{T} \mathbf{q} \quad (8)$$

donde \mathbf{H} es la matriz de elasticidad y \mathbf{T} es una matriz combinada llamada matriz de tensión.

La expresión (8) permite plantear la derivada del campo de tensiones como

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X_i} = \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial X_i} \mathbf{q} + \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial X_i} \right) \quad (9)$$

El cálculo de (5) y (9) se hace por medio de un procedimiento semianalítico. Si bien este procedimiento es menos eficaz que los métodos analíticos, él puede adaptarse más fácilmente a un código dado y no necesita la intervención del código. Este procedimiento consiste en evaluar la derivada de la matriz de rigidez, de tensión y del vector de fuerza por diferencias finitas

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} = \frac{\mathbf{K}(x_i + \partial x_i) - \mathbf{K}(x_i)}{\partial X_i} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial X_i} = \frac{\mathbf{T}(x_i + \partial x_i) - \mathbf{T}(x_i)}{\partial X_i} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial X_i} = \frac{\mathbf{g}(x_i + \partial x_i) - \mathbf{g}(x_i)}{\partial X_i} \quad (12)$$

Para determinar la matriz de rigidez $\mathbf{K}(x_i + \partial x_i)$, la matriz de tensión $\mathbf{T}(x_i + \partial x_i)$ y el vector de fuerza $\mathbf{g}(x_i + \partial x_i)$, es necesario conocer la nueva posición de los nodos tras la perturbación. Esta puede ser calculada por la expresión

$$x(X_i + \partial X_i) = x(X_i) + V_i \partial X_i \quad (13)$$

donde V_i es el campo de velocidades definido como la derivada primera de la posición de un punto con respecto a la variable de diseño X_i , es decir

$$V_i = \frac{\partial x}{\partial X_i} \quad (14)$$

La posición de los nodos situados en la frontera de la estructura, es una función explícita de las variables de concepción, por lo tanto el cálculo del campo de velocidades V_i es inmediato. Si la frontera se describe por la función paramétrica

$$\Psi = \sum_i W_i(s) X_i \quad (15)$$

el campo de velocidades es

$$V_\Gamma = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X_i} \right) = W_i(s) \quad (16)$$

El problema reside en evaluar el campo de velocidad en el interior del dominio. Los métodos existentes se pueden clasificar en dos familias: una llamada *aproximaciones geométricas* y la otra llamada *aproximaciones físicas*. La primera corresponde a la utilización de mallados estructurados⁷ generados a partir de los parámetros de la concepción, lo que nuevamente conduce a relaciones explícitas entre la posición de los nodos y las variables de concepción⁹. La segunda corresponde a la utilización de mallados libres, como Delaunay-Voronoi, para los cuales ya no es posible establecer relaciones explícitas entre la posición de los nodos y las variables de concepción.

En este caso el problema puede ser abordado de diferentes formas. Se puede por ejemplo, resolver un nuevo problema elementos finitos con condiciones de borde correspondientes a las variaciones infinitesimales de las variables de concepción establecidas en la etapa precedente. En este caso, el campo de desplazamientos obtenidos corresponde a un campo posible de velocidades. Se pueden introducir también algunas simplificaciones como desacoplar las ecuaciones de elasticidad, lo que conduce a resolver las ecuaciones de Laplace⁴

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

de forma iterativa (alisamiento laplaciano). Otra simplificación posible es perturbar la posición de los nodos con diferentes coeficientes de rigidez introducidos entre los nodos vecinos. Esta simplificación corresponde a un método mixto llamado *aproximación física-geométrica*.

La resolución iterativa, del problema de optimización planteado, puede ser dividida en las siguientes etapas:

1. Análisis por elementos finitos del modelo inicial
2. Determinación de la sensibilidad de la respuesta estructural con respecto a las variables de concepción
3. Definición de un subproblema aproximado obtenido por medio de un método de linearización convexa y resuelto por un método clásico de optimización
4. Verificación de la admisibilidad de la solución y generación de un nuevo modelo

El proceso se finaliza cuando la variación relativa de la función objetivo (f) entre dos iteraciones sucesivas es inferior a un valor (α) prescrito por el usuario, siendo respetadas todas las restricciones.

CONROL DE LA CALIDAD DE LA SOLUCIÓN ELEMENTOS FINITOS

En elasticidad lineal el error principal de la solución elementos finitos proviene de la discretización del campo de desplazamientos, el cual converge asintóticamente a cero a medida que aumenta el grado de refinamiento. El objetivo de controlar la calidad de la solución es determinar dónde y cuánto es necesario mejorar la discretización para obtener la precisión prescrita por el usuario.

Error exacto

El método de elementos finitos está basado en la minimización de una energía, entonces resulta natural expresar el error de la solución en una medida energética. Para esto se denota respectivamente por u y σ los campos de desplazamiento y de tensión exactos y por u_h y σ_h los campos obtenidos por el análisis elementos finitos para el que los elementos tienen una talla media h . De esta forma los errores puntuales exactos asociados a los campos elementos finitos pueden ser definidos como

$$e_h = u - u_h \quad (18)$$

para el campo de desplazamientos y por

$$\sigma(e_h) = \sigma - \sigma_h \quad (19)$$

para el campo de tensiones.

Utilizando las expresiones (18) o (19) se puede escribir la norma energética del error exacto del elemento i de la manera siguiente

$$\|e_h\|_{V_i} = \left(\int_{V_i} \sigma^T(e_h) \mathbf{H}^{-1} \sigma(e_h) dV \right)^{1/2} \quad (20)$$

donde \mathbf{H} es la matriz de elasticidad lineal y V_i el volumen del elemento i .

La energía global del error es la suma de las energías de los elementos del modelo

$$\|e_h\|_V^2 = \sum_{i=1}^{NEL} \|e_h\|_{V_i}^2 \quad (21)$$

donde NEL es el número total de elementos del modelo.

Estimación del error

En la práctica, la norma de la energía del error es raramente conocida, por lo tanto ésta sólo puede ser estimada. Se define por ϵ_i una estimación de la norma energética del error del elemento i por

$$\epsilon_i \approx \|e_h\|_{V_i} \quad (22)$$

Numerosos métodos que permiten estimar la norma de la energía del error han sido desarrollados en los últimos años. En este trabajo se utiliza el método llamado “ponderación + extrapolación”¹⁰, el cual trata de construir un campo de tensiones continuas basado en la propiedad de superconvergencia del campo de tensiones elementos finitos para un modelo de desplazamientos. Este campo puede ser expresado de forma general por

$$\tilde{\sigma} = \sum_j N_j s_j \quad (23)$$

donde N_j es la misma función de forma del nodo j utilizada en la aproximación del campo de desplazamientos elementos finitos y s_j es el valor nodal del campo de tensiones continuas $\tilde{\sigma}$.

De esta forma, reemplazando en (20) σ por $\tilde{\sigma}$ y utilizando la aproximación (22) se puede escribir la norma energética del error estimado como

$$\epsilon_i = \left(\int_{V_i} (\tilde{\sigma} - \sigma_h)^T \mathbf{H}^{-1} (\tilde{\sigma} - \sigma_h) dV \right)^{1/2} \quad (24)$$

En la práctica, para modelos de desplazamiento, resulta más conveniente utilizar como medida del error

$$\tilde{\eta} = \frac{\epsilon}{\sqrt{\|u_h\|_V^2 + \epsilon^2}} \quad (25)$$

que define un error estimado global relativo expresado en norma.

de control del error. La Figura 2 muestra un esquema de este procedimiento en el que las líneas continuas indican el camino seguido por el proceso y las discontinuas la transferencia de información.

El proceso comienza con la definición del modelo físico y del mallado inicial. Para cada iteración de optimización de forma, un proceso completo de adaptación de mallado es realizado hasta que se alcanza la precisión prescrita ($1 - \bar{\eta}$). El nuevo mallado refinado es utilizado para hacer el cálculo de sensibilidades y para evaluar las tensiones de von Mises. De esta manera se obtiene un nuevo modelo geométrico que sirve como punto de partida para un nuevo proceso de optimización de forma y así sucesivamente.

Con el fin de disminuir el costo del cálculo, el procedimiento base ha sido modificado en lo que respecta a la utilización del control del error. Para ello se han ideado diferentes técnicas.

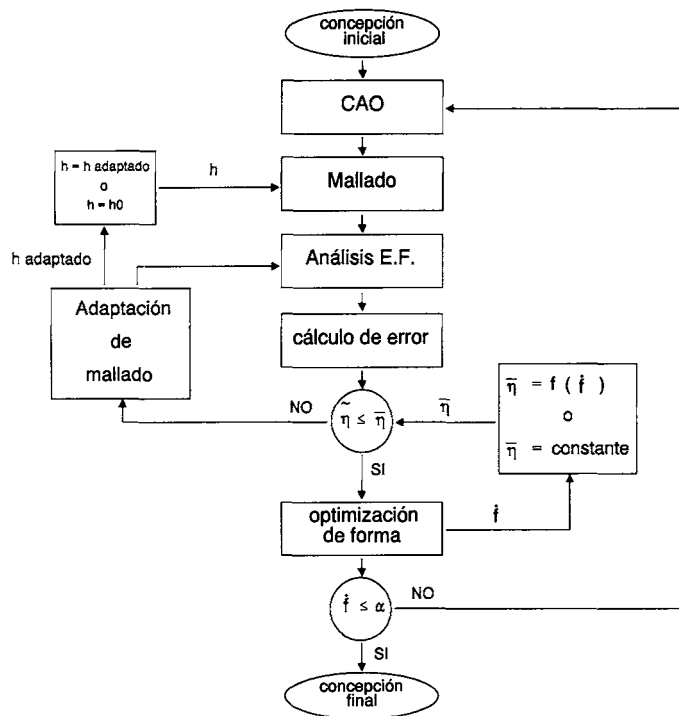


Figura 2. Bucle de optimización de forma con control del error

1. Control del error sobre la frontera²

Cada nueva iteración de optimización de forma parte de un mallado adaptado sobre la frontera, lo cual significa que el número de adaptaciones de mallado necesario para alcanzar la precisión deseada será menor. Sin embargo, el tiempo empleado por este procedimiento resulta mayor que el de procedimiento base. El problema reside en que el mallado que se transmite de una iteración de optimización de forma a otra es excesivamente refinado, lo cual repercute sobre el tiempo necesario para el análisis estático y para el cálculo de sensibilidad.

2. Control del error retardado

Para las soluciones de las primeras iteraciones, la diferencia existente entre los procedimientos de optimización sin y con control del error no resulta significativa. Ahora bien, cuando se está próximo del óptimo, la utilización de las técnicas de adaptación aportan una diferencia en el valor de la función objetivo que sí resulta importante para encontrar la solución óptima. Basándose en esta idea, se ha creado un procedimiento en el que no existe control del error para las primeras iteraciones de optimización, economizando así un número importante de adaptaciones del mallado⁸. El control del error se activa en el momento que la variación relativa de la función objetivo (f) entre dos iteraciones sucesivas de optimización de forma es menor que un valor (α_ϵ) prescrito por el usuario.

3. Control con error progresivo

Este procedimiento es similar al anterior salvo que la precisión demandada en el proceso de adaptación del mallado aumenta progresivamente hasta alcanzar el valor ($\bar{\eta}$).

APLICACIONES NUMÉRICAS

Los diferentes procedimientos de optimización de forma son aplicados al caso de una biela de espesor $t = 0,3$ cm, mostrada en la Figura 3.

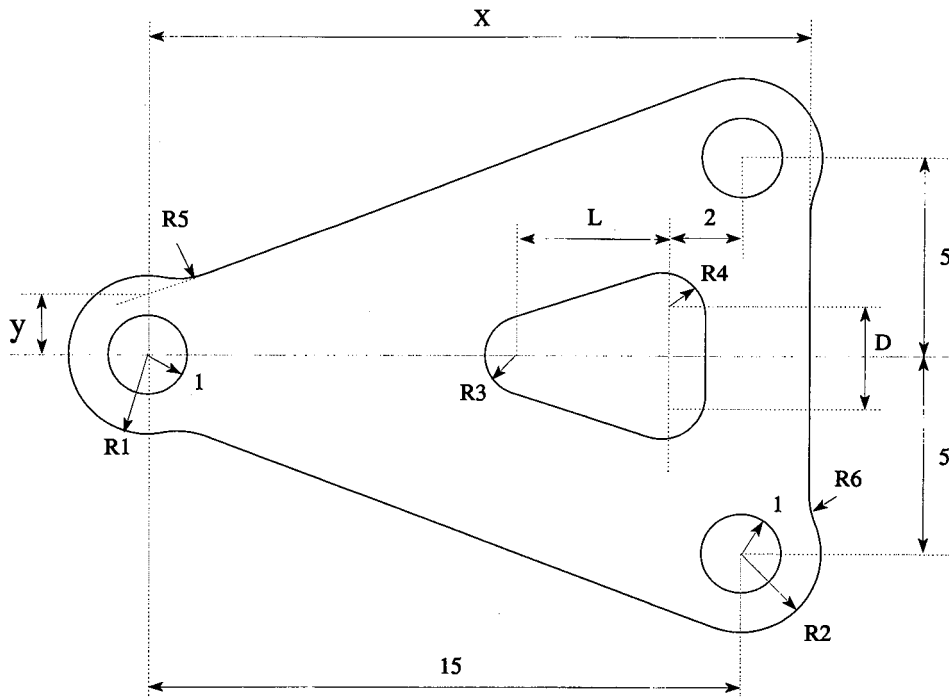


Figura 3. Modelo geométrico inicial

La pieza está sometida a una carga de flexión de 15.000 N, aplicada en el agujero circular del lado izquierdo, según la dirección perpendicular al eje de simetría. Condiciones de fijación son impuestas en los dos agujeros circulares del lado derecho.

El material se caracteriza por las propiedades siguientes:

- módulo de Young $E = 20,74 \times 10^6$ N/cm²
- coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$
- densidad $\rho = 7,81 \times 10^{-3}$ kg/cm³

El objetivo es minimizar la masa de la estructura con las restricciones siguientes:

- tensión máxima de von Mises igual a 80.000 N/cm²
- variables de concepción según se muestran en la Tabla I

Variables de concepción	R1	R2	R3	R4	R5	R6	L	D	X	Y
Máximo	10	10	3	2	10	10	8	3	16,7	1,5
Mínimo	1,4	1,4	1	1	0,5	0,5	3,5	1	16	0,5
Inicial	2	2	1	1	2	2	3,5	1	16,7	1,5

Tabla I. Valores extremos e iniciales de las variables de concepción

Los elementos utilizados en los análisis por elementos finitos son de grado 2.

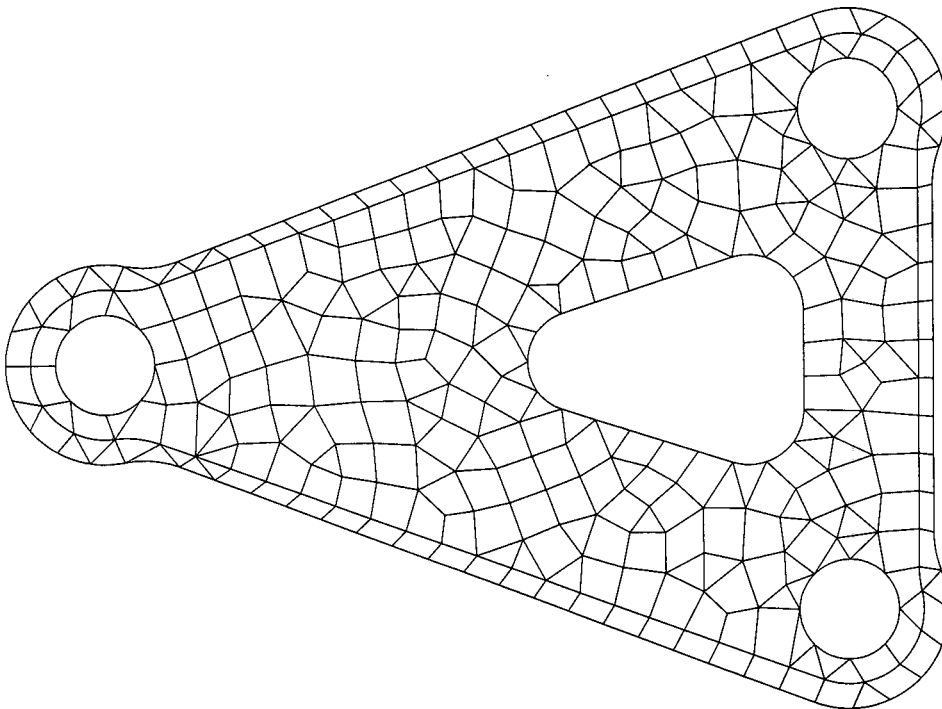


Figura 4. Mallado de la concepción inicial

El mallado inicial del modelo se representa en la Figura 4. El campo de tensiones de von Mises estimado por el proceso de control del error se muestra en la Figura 5.

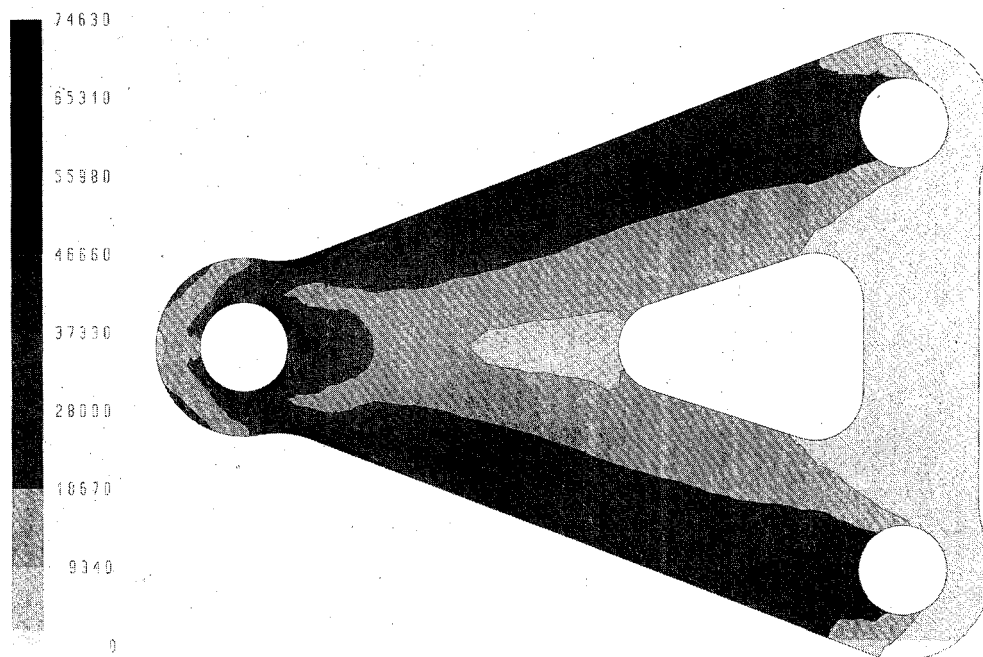


Figura 5. Campo de tensiones estimadas de la concepción inicial

Optimización de forma sin control del error (procedimiento clásico)

El procedimiento iterativo converge en 8 iteraciones para una variación relativa de la masa inferior a $\alpha = 0,001$. Se obtiene una masa de 0,1221 kg, lo que representa una disminución relativa del 61 % con respecto a la masa inicial de 0,3134 kg.

La discretización de la concepción final se muestra en la Figura 6. El examen del campo de tensiones estimadas, mostrado en la Figura 7, revela una violación de 24,85 % en la tensión máxima admisible, donde el error relativo en norma energética es $\bar{\eta} = 9,187$ %.

Optimización de forma con control del error (procedimiento base)

La optimización de forma es realizada activando la adaptación del mallado en cada iteración. El error relativo prescrito en norma es de un 3 %. El procedimiento converge en 8 iteraciones. El refinamiento del mallado en la zona de concentración de tensiones (Figura 8) tiene un doble efecto; por un lado existe una mejora de la evaluación del campo de tensiones (Figura 9), y por otro lado el cálculo de sensibilidades respecto a las variables de concepción es preciso asegurando la admisibilidad de la concepción óptima.

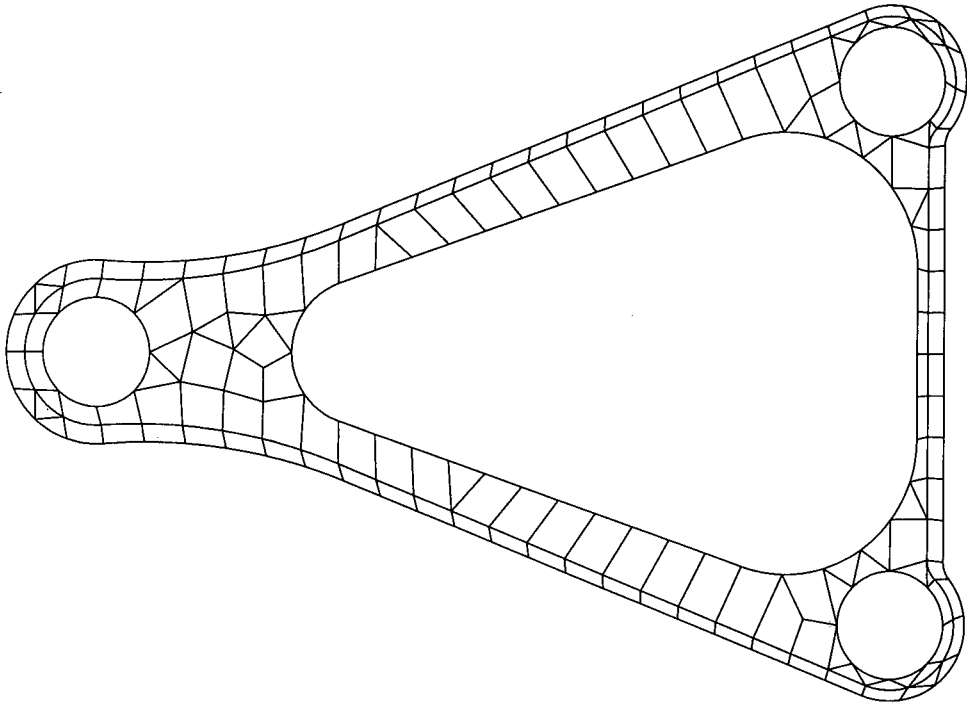


Figura 6. Mallado de la concepción final (procedimiento clásico)

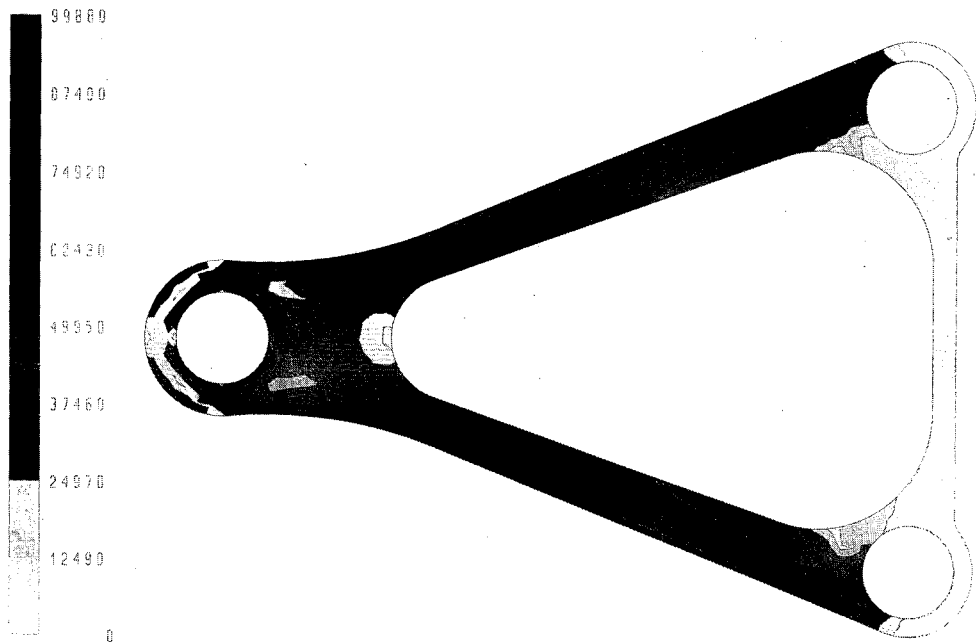


Figura 7. Campo de tensiones estimadas de la concepción final (procedimiento clásico)

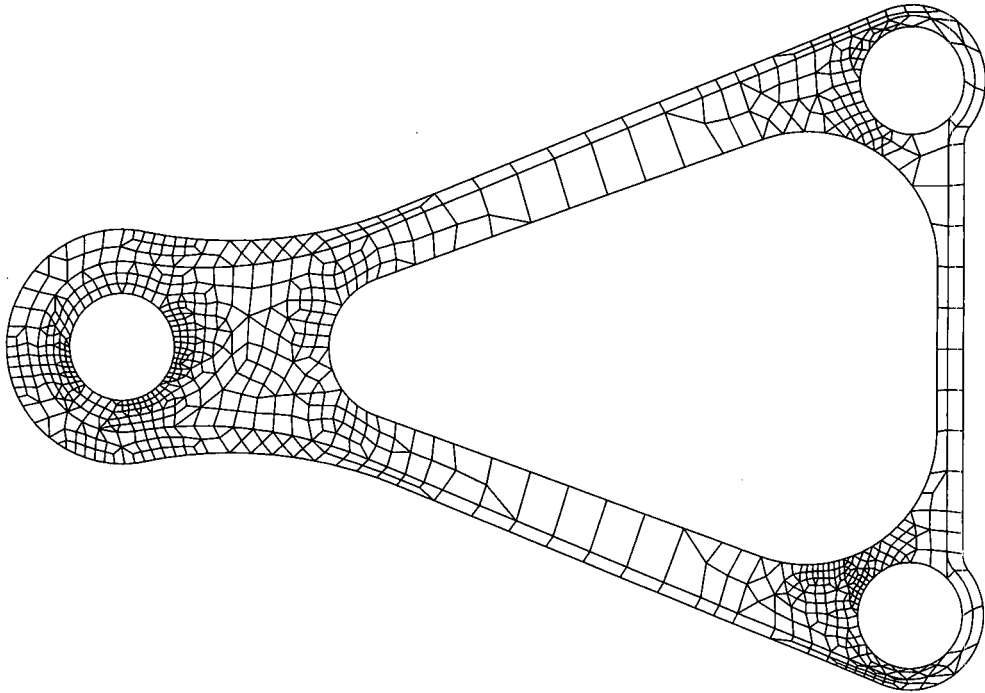


Figura 8. Mallado de la concepción final (procedimiento base)

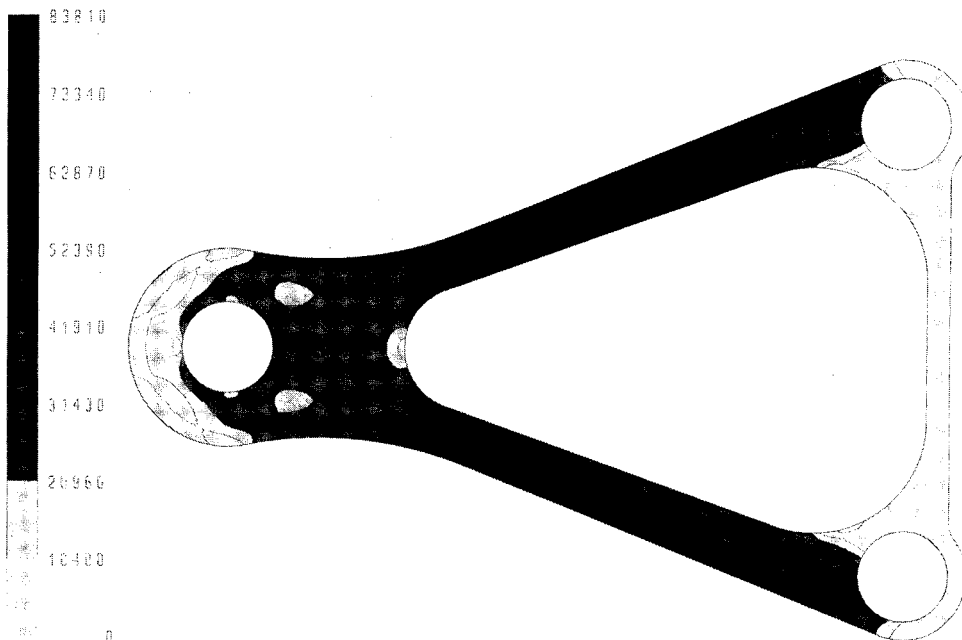


Figura 9. Campo de tensiones estimadas de la concepción final (procedimiento base)

Se obtiene un valor máximo del campo de tensiones estimadas de von Mises igual a 83.813 N/cm^2 , siendo un 4,77 % mayor que el valor admisible, lo que está dentro de lo esperado, puesto que el error relativo prescrito de 3 % impone una condición global y no puntual como es el caso del valor máximo de tensión. Se puede constatar que el peso de la estructura final, 0,1384 kg, es mayor que el obtenido sin control de error, 0,1221 kg.

El control de error garantiza la admisibilidad de los resultados de la concepción final. No obstante, resulta demasiado costoso. El tiempo CPU requerido sobre una estación, Alpha 3000 modelo 500, para realizar la optimización de forma con control de error es de 9.190 segundos, mientras que para la optimización de forma clásica sólo se requieren 960 segundos.

Optimización de forma con control del error retardado

Con objeto de disminuir el tiempo de cálculo necesario para la obtención de un óptimo aceptable, parece interesante retardar la activación del bucle de adaptación de mallado. El control del error se activa una vez que la variación relativa de la masa entre dos iteraciones sucesivas de optimización de forma es inferior a $\alpha_\epsilon = 1 \%$. El retardo en la activación de la adaptación lleva a una disminución del número de grados de libertad a tratar en el cálculo de sensibilidad.

El óptimo es alcanzado en 10 iteraciones. Como se observa en la Figura 10, éste es casi idéntico al obtenido con el procedimiento base. La masa de la concepción óptima es de 0,1386 kg y la tensión máxima estimada de von Mises es de 84.310 N/cm^2 .

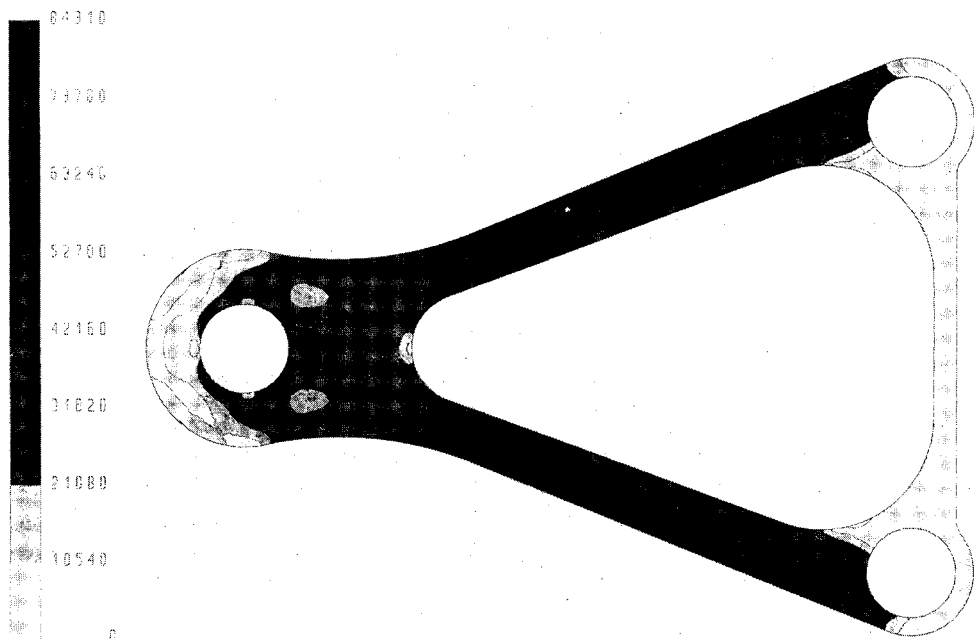


Figura 10. Campo de tensiones estimadas de la concepción final (control del error reterdado)

Por un lado, el hecho de retardar el control de error no altera la calidad de la concepción óptima y, por otro, produce una disminución considerable en el tiempo de cálculo consiguiendo efectuar el cálculo en 5.834 segundos CPU.

Optimización de forma con control del error progresivo

En este procedimiento el valor del error relativo utilizado en el proceso de adaptación del mallado disminuye en cada iteración hasta alcanzar el valor prescrito. La disminución está relacionada con la variación relativa de la función objetivo entre dos iteraciones.

El proceso de optimización converge en 10 iteraciones. La concepción óptima obtenida es la misma que para los otros procedimientos, siendo la masa igual a 0,1388 kg y la tensión máxima estimada de von Mises de 84.727 N/cm^2 . La diferencia en tiempo de cálculo con respecto a la optimización con control de error retardado no es significativa, el cálculo se efectúa en 5.584 segundos CPU.

La Figura 11 permite comparar gráficamente la concepción inicial y final obtenidas a través de este procedimiento.

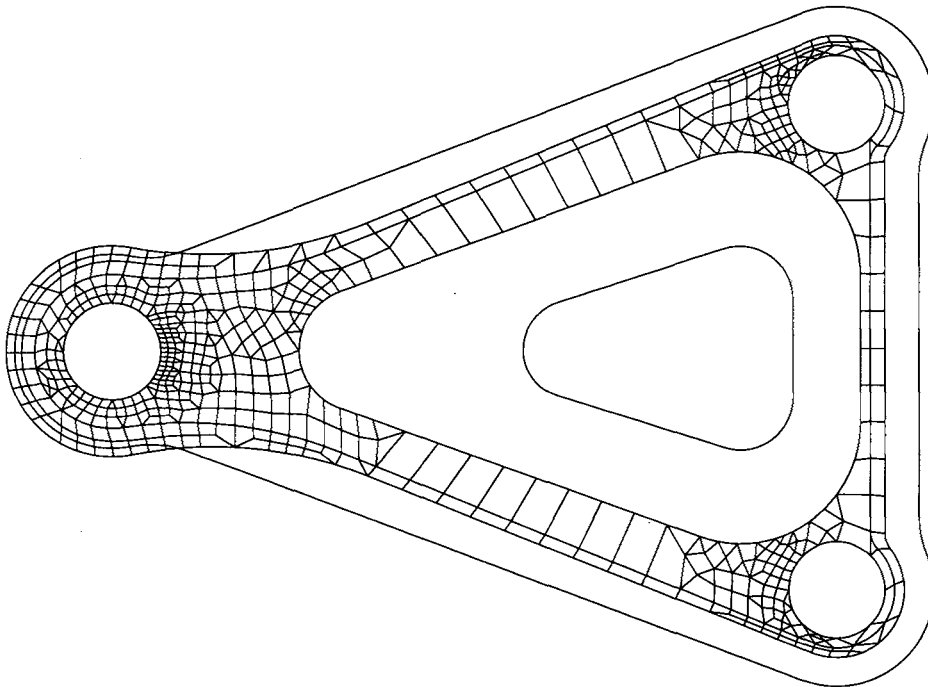


Figura 11. Modelos inicial y final del procedimiento con control del error progresivo

Convergencia de los distintos procedimientos

La evolución de la función objetivo para los distintos procedimientos de optimización de forma se representan en la Figura 12, donde se ha omitido el valor de la masa inicial, iteración 0, para privilegiar la visualización en la zona de convergencia. Hay tres puntos importantes a señalar:

1. La disminución de la masa tiene lugar, principalmente, en las primeras iteraciones.
2. Sea cual sea la manera de imponer el control de error en el procedimiento de optimización de forma, la solución es similar.
3. Una vez que el control de error es activado se puede observar un ligero aumento en el valor de la función objetivo, debido a una mejor estimación del valor del campo de tensiones.

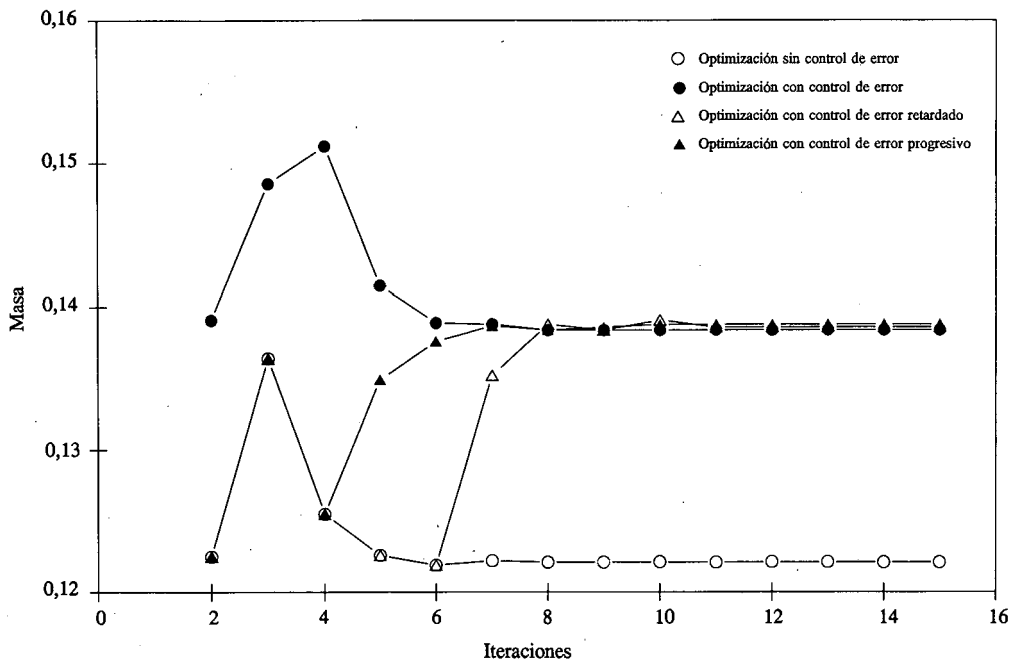


Figura 12. Evolución de la masa con los diferentes procedimientos de optimización

CONCLUSIONES

El procedimiento de optimización de forma sin control de error conduce a una solución no admisible, puesto que se obtiene una tensión máxima estimada de von Mises 24,85 % superior a la admisible.

El control de la calidad de la solución, a través de los procesos de estimación del error y adaptación del mallado, permite obtener una estructura optimizada fiable. Esto lo demuestran los resultados obtenidos con los tres procedimientos que contemplan el

control del error de la solución elementos finitos. Las tensiones de von Mises estimadas sobrepasan en un porcentaje levemente superiores al nivel de error prescrito para la adaptación en las regiones de concentración de tensiones, lo que está dentro de lo esperado desde el punto de vista de las características del estimador.

Como ocurre a menudo, el mejoramiento de una condición va en desmedro de otra, en este caso el significativo aumento en la calidad de la solución obtenida es a costa de un incremento importante en el tiempo de cálculo, aproximadamente 5 veces mayor. El hecho que la manera de imponer el control del error en el proceso de optimización no influya en la solución final, incentiva a proseguir las investigaciones para aumentar la eficacia del procedimiento planteado.

REFERENCIAS

1. P. Beckers y H.G. Zhong, "Mesh Adaptation for 2D Stress Analysis", *Proc. of the 2nd International Conference on Computational Structures Technology*, Athens, Greece, Civil Comp. Ltd., Edinburgh, Scotland, B.H.V. Topping y M. Papadrakakis (Eds), Advances in Post and Preprocessing for Finite Element Technology, pp. 47-59, (1994).
2. G. Bugada y J. Oliver, "A General Methodology for Structural Shape Optimization Problems Using Automatic Adaptive Remeshing", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **36**, pp. 3161-3185, (1993).
3. F. Cugnon y P. Beckers, "Contrôle de la qualité des analyses par éléments finis en optimisation de forme", *Première Conférence Internationale sur la Conception et la Fabrication Intégrées en Mécanique: I.D.M.M.E.'96*, Tomo **2**, pp. 695-704, Nantes, France, April 15-17, (1996).
4. P. Duysinx, W.H. Zhang y C. Fleury, "Sensitivity Analysis with Unstructured Free Mesh Generators in 2D Shape Optimization", *Structural Optimization 93, the World Congress on Optimal Design of Structural Systems*, Rio de Janeiro, Brazil, August 2-6, (1993).
5. P. Duysinx, W.H. Zhang, H.G. Zhong, P. Beckers y C. Fleury, "Structural Shape Optimization with Error Control", *20th ASME Design Automation Conference*, Minneapolis, September, (1994).
6. C. Fleury, "Structural Weight Optimization by Dual Methods of Convex Programming", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **14**, pp. 1761-1783, (1979).
7. C. Fleury y V. Braibant, "Structural Optimization-A New Dual Method Using Mixed Variables", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **23**, pp. 409-428, (1986).
8. E. Hinton y J. Sienz, "Aspects of Adaptive Finite Element Analysis and Structural Optimization", *Proc. of the 2nd International Conference on Computational Structures Technology*, Athens, Greece, Civil Comp. Ltd., Edinburgh, Scotland, B.H.V. Topping y M. Papadrakakis (Eds), Advances in Post and Preprocessing for Finite Element Technology, pp. 1-25, (1994).
9. W.H. Zhang, "Calcul des sensibilités et optimisation de forme par la méthode des éléments finis", Tesis doctoral, Ulg, (1992).
10. P. Beckers y H.G. Zhong, "Error Estimation and Adaptivity", *MECOM'94, Mecánica Computacional*, Vol. **14**, pp. 461-475, AMCA, Santa Fe, Argentina, (1994).