

ADAPTIVIDAD PARA PROBLEMAS DE ELASTICIDAD LINEAL EN 3D

ROBERTO SALIBA
CLAUDIO PADRA
y
MARCELO VÉNERE

*Centro Atómico Bariloche - CNEA
8400 - San Carlos de Bariloche, Argentina
Tel.: + 54-944-45107 Fax: + 54-944-45299
E-mail: venere@cab.cnea.edu.ar*

RESUMEN

En este trabajo se presenta un método adaptivo para resolver problemas de elasticidad lineal tridimensional por el método de elementos finitos incluyendo varias experiencias, tanto en la implementación como en la utilización del mismo. La estrategia de densificación está basada en la generación de redes encajadas mediante la subdivisión de elementos tipo simples. Para la selección de los elementos a dividir se utiliza un indicador elemental de error, equivalente al error en la norma de la energía, el cual también es descrito. Se analizan algunos refinamientos de mallas en presencia de singularidades causadas por esquinas en la frontera del dominio, mostrando el comportamiento de estos estimadores cuando son utilizados en un contexto adaptivo. Finalmente se presentan las conclusiones del proceso adaptivo estudiado.

ADAPTIVITY FOR 3D LINEAR ELASTIC PROBLEMS

SUMMARY

An adaptive scheme to solve three-dimensional elasticity problems by finite elements methods is presented. Some experiences on the implementation and utilization of this process are included. The mesh-enrichment strategy is based on nested mesh generation using simplex subdivision. An elementary error indicator is used for the selection of elements to be divided. This estimator, equivalent to error at the energy norm, is also described. Some mesh refinements due to angles on domain surface is analyzed, showing estimator behavior when used as local error indicator for adaptive refinements. Finally some remarks about this adaptive process are discussed.

Recibido: Febrero 1996

INTRODUCCIÓN

Debido al incremento en el uso del método de elementos finitos, se ha dedicado en la última década un gran esfuerzo a la automatización del procedimiento completo. Uno de los mayores problemas es la construcción automática de una malla de elementos finitos efectiva. Normalmente esto requiere experiencia en el tema y no es completamente automática.

Una vez descrito el dominio 3D con suficiente detalle, es usual encontrarse con la necesidad de incrementar la precisión en los cálculos, sin sumar grados de libertad innecesarios. Por lo tanto, es necesario densificar la malla tal que sea suficiente fina en regiones críticas, permaneciendo razonablemente gruesa en el resto del dominio. Para ello es necesario un estimador local del error a posteriori que indique cuáles son las regiones a densificar.

En primer lugar nos interesa el comportamiento del método de elementos finitos en presencia de singularidades causadas por esquinas de la frontera del dominio. La pregunta que nos hacemos es si se justifica generar un método adaptivo para resolver dichos problemas. La respuesta es sí, ya que mediante un proceso adaptivo adecuado puede obtenerse un "buen" orden de convergencia del error medido en término de número de incógnitas^{1,9}. En la práctica esto significa que si somos capaces de construir un método adaptivo eficiente, podemos generar soluciones más precisas con menor costo humano y computacional.

Para el proceso de refinamiento en el problema de elasticidad lineal es necesario utilizar un estimador de error. Las dos líneas más importantes en la teoría de estimadores a posteriori del error son: la basada en recuperación del gradiente^{14,15} y la basada en el análisis del residuo^{2,3,5,6}. En este trabajo utilizamos un estimador de error que está enmarcado en la segunda línea.

Los resultados numéricos muestran el buen comportamiento de estos estimadores, cuando se usan como indicadores del error para refinamientos adaptivos, una de las más importantes aplicaciones de las estimaciones del error.

GENERALIDADES DE ESTIMACIONES DEL ERROR PARA CASOS REGULARES

El análisis de las estimaciones a priori para el método de elementos finitos usualmente se basa en la regularidad de la solución del problema dado. En la referencia 6 se prueban resultados del siguiente tipo

$$\|u - u_h\| \leq C(u)h^\beta \quad (1)$$

donde se utiliza como parámetro de discretización de la familia de redes el número $h = \max_{T \in \tau} h_T$. Decimos que el orden de convergencia es β con respecto al parámetro h o equivalentemente que tenemos una convergencia $O(h^\beta)$. Además de la regularidad de u , se supone que la familia de redes τ_h es regular, es decir, existe una constante σ tal que

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma \quad \forall T \in \tau_j$$

donde $h_T = \max\{|x - y| : x, y \in T\}$ y $\rho_T = \sup\{\text{diam } S, \text{ donde } S \text{ es una bola contenida en } T\}$.

Si indicamos por \hat{N} al número de nodos del elemento de referencia, por ω_n la medida de la bola unitaria en \mathcal{R}^n , por Nod al número de nodos de la red y si suponemos que la familia de redes es casi uniforme, es decir, es regular una constante α tal que

$$h \leq \alpha h_T \quad \forall T \in \tau_j$$

entonces podemos reescribir la desigualdad anterior utilizando como parámetro a Nod , pues

$$Nod \leq \hat{N} \sum_{T \in \tau_h} 1 \leq \hat{N} \sum_{T \in \tau_h} \sigma^n \frac{\rho_T^n}{h_T^n} \leq \hat{N} \frac{\sigma^n}{\omega_n} \sum_{T \in \tau_h} \frac{\alpha^n}{h^n} |T| \leq \hat{N} \frac{\sigma^n \alpha^n}{\omega_n h^n} |\Omega|$$

donde $|\cdot|$ es la medida y hemos usado que $\rho_T^n \omega_n \leq |T|$. Entonces, se tiene

$$h \leq \left(\frac{\hat{N} \sigma^n \alpha^n |\Omega|}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} (Nod)^{\frac{-1}{n}}$$

y en consecuencia se obtiene de (1) el orden de convergencia con respecto al parámetro Nod

$$\|u - u_h\| \leq C(u) Nod^{\frac{-\beta}{n}}$$

Para el caso particular en que $n = 3$, $u \in H^2(\Omega)$ y el espacio de elementos finitos esté formado por funciones lineales, en cada elemento se tiene

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{0,2} \leq C(u) (Nod)^{\frac{-1}{3}} \quad (2)$$

donde $C(u) = c|u|_{2,2}$.

La presencia de esquinas en la frontera del dominio produce un comportamiento singular de la solución en las cercanías de dicha esquina, incluso en los casos en que los datos sean suaves⁹. Esta singularidad afecta al orden de convergencia en toda la región.

El orden con respecto al número de nodos que se obtiene en el caso bidimensional con solución regular, puede recuperarse cuando el dominio tiene esquinas, utilizando mallas graduadas en la cercanía de la esquina en cuestión^{1,9}.

El objetivo principal del desarrollo de métodos adaptivos es el reconocimiento automático de las regiones a refinar para obtener mallas graduadas en las que se verifique².

EL PROBLEMA EN ESTUDIO Y LA APROXIMACIÓN POR FEM

Sea Ω un poliedro en \mathcal{R}^3 . Consideramos el problema:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma(u)) = f + \nabla g & \text{en } \Omega \\ u = \delta & \text{en } \partial\Omega_d \\ \sigma(u) \cdot n = \gamma - gn & \text{en } \partial\Omega_n \end{cases} \quad (3)$$

donde $\sigma(u) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\nabla u + \nabla^t u) + \frac{E}{2(1+\nu)} \operatorname{div}(u)I$. La frontera de Ω es la unión disjunta de $\partial\Omega_i$, $f \in (L^2(\Omega))^3$ y $g \in L^2(\Omega)$.

Observemos que en segundo miembro de las ecuaciones (3) estamos considerando fuerzas volumétricas con un término ∇g que puede ser singular.

Indicamos las formas lineales y bilineales asociadas al problema (3) por

$$a(u, \nu) = \int_{\Omega} \sigma \nabla \nu \quad (4)$$

y

$$F(\nu) = \int_{\Omega} f \nu - \int_{\Omega} g \operatorname{div} \nu + \int_{\partial\Omega_n} \gamma \nu \quad (5)$$

Usamos la notación estándar para espacios de Sobolev, $H^S(\Omega)$ para $S \geq 0$ y $H_0^1(\Omega)$; las normas y seminormas usuales $\|\cdot\|_{S,\Omega}$ y $|\cdot|_{S,\Omega}$. Introducimos $V = \{u \in H^1(\Omega): u|_{\partial\Omega_d} = \delta\}$ y $V_0 = \{u \in H^1(\Omega): u|_{\partial\Omega_d} = 0\}$. Por la desigualdad de Korn⁸ $a(\cdot, \cdot)$ es V_0 -elíptico. Para f, g, δ y γ dados, la solución débil del problema (3), $u \in V$ satisface

$$a(u, \nu) = F(\nu) \quad \forall \nu \in V_0 \quad (6)$$

Supondremos que tenemos una familia $\{\tau_j\}$ de triangulaciones de Ω , tales que cualquier par de tetraedros τ_j se intersectan a lo sumo en un vértice un lado completo o una cara completa. Para todo τ_j introducimos el espacio de elementos

$$V^j = \{\nu \in C(\Omega): \nu|_T \in P_1, \quad \forall T \in \tau_j\}$$

donde P_1 denota el espacio de polinomios de grado uno, y definimos

$$V_0^j = \{\nu \in C(\Omega): \nu = 0 \text{ en los puntos medios contenidos en } \partial\Omega\}$$

La aproximación dada por el método de elementos finitos $u_j \in V_j$ está definida por

$$a(u, \nu) = F(\nu) \quad \forall \nu \in V_0^j$$

Denotaremos por $e = u - u_j$ al error de esta aproximación.

EL ESTIMADOR DE ERROR

En esta sección presentamos resultados conocidos sobre la equivalencia entre el error y el estimador. Estos resultados pueden verse como una variación de teoremas estándar^{4,9}. Llamamos Γ a la unión de todas las caras de la red τ_j y $\Gamma_{\text{int}} = \Gamma - \partial\Omega$ la unión de todas las caras interiores. Para cada $l \subset \Gamma_{\text{int}}$ elegimos una normal con dirección arbitraria n y denotamos a los dos tetraedros que comparten esa cara por T_{in} y T_{out} , donde la normal n apunta hacia afuera de T_{in} . Sea

$$[[\sigma(u) \cdot n]]_l = [\sigma(u_j)|_{T_{\text{out}}} - \sigma(u_j)|_{T_{\text{in}}}] \cdot n \quad (7)$$

que denota el salto de $\sigma(u_j)n$ a través de la cara l .

Para cualquier tetraedro $T \in \tau_j$, sea E_T el conjunto de sus cuatro caras y sea η_T el siguiente indicador elemental del error

$$\eta_T = \left[\int_T g^2 + h_T^2 \int_T |R|^2 + \frac{1}{2} \sum_{l \in E_T} h_l \int_l |J_l|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

donde $R = \text{div}(\sigma(u_j)) + f$, h_T es la longitud de la arista más larga del tetraedro T , h_l es la longitud de la arista más larga de la cara l y

$$J_l = \begin{cases} [[\sigma(u_j) \cdot n]]_l & \text{si } l \subset \Gamma_{\text{int}} \\ 0 & \text{si } l \subset \partial\Omega_d \\ 2[\gamma - gn - \sigma(u_j) \cdot n]_l & \text{si } l \subset \partial\Omega_n \end{cases} \quad (9)$$

En el caso de problemas bidimensionales es común realizar la aproximación $h_l \approx (\text{area})^{\frac{1}{2}}$. La misma es razonablemente válida porque las mallas que se utilizan en 2D son en general de muy buena calidad y no existen elementos distorsionados. Es importante remarcar que la aproximación equivalente no puede utilizarse en problemas tridimensionales, ya que en este caso es muy frecuente la aparición de elementos "aplastados", por lo que volúmenes parecidos no indican necesariamente tamaños similares.

Definimos el estimador del error global por

$$\eta = \left(\sum_T \eta_T^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

El siguiente teorema muestra que el estimador es equivalente al error real y su demostración es estándar^{6,13}.

Teorema

Existen dos constantes C_0 y C_1 , las cuales dependen sólo de Ω y de la regularidad de la red τ_j , tales que

$$C_0\eta \leq |e|_{1,\Omega} \leq C_1\eta \quad (10)$$

donde $|e|_{1,\Omega} = (\int_{\Omega} |\nabla e|^2)^{\frac{1}{2}}$.

EL ALGORITMO DE DENSIFICACIÓN

Estrategia de selección

Aquí se presenta una estrategia de selección conocida y más adelante se presentará una alternativa con una comparación entre ambas.

Se seleccionan para dividir los elementos que verifican

$$\eta_T \geq \lambda \eta_{\max}$$

donde $\eta_{\max} = \max\{\eta_T: T \in \tau_j\}$ y λ es un parámetro fijo a lo largo de todos los pasos de densificación.

DENSIFICACIÓN LOCAL DE MALLAS CON ELEMENTOS TIPO TETRAEDROS

Uno de los algoritmos más utilizados para la densificación local en problemas bidimensionales es la división de elementos. Para el caso de mallas con elementos tipo triángulos existen diferentes posibilidades de realizar esta división. Las dos más utilizadas son: división en cuatro triángulos semejantes y división por la arista más larga. Una vez divididos los elementos seleccionados, es preciso realizar un proceso de “conformación” de la malla, que consiste en eliminar las situaciones donde un elemento tiene más de un vecino por una arista dada (ver Figura 1). La forma más sencilla de solucionar este problema es dividiendo los elementos no-conformes en forma directa. Lamentablemente, los elementos así generados tienden a distorsionarse y no es posible acotar la calidad mínima de la malla. La solución más utilizada¹¹ consiste en volver a dividir los elementos no-conformes por su arista más larga y repetir este proceso hasta que no quede ninguna no-conformidad (ver Figura 1). Se demuestra¹² que este proceso termina en un número pequeño de pasos y que la propagación de la densificación es mínima.

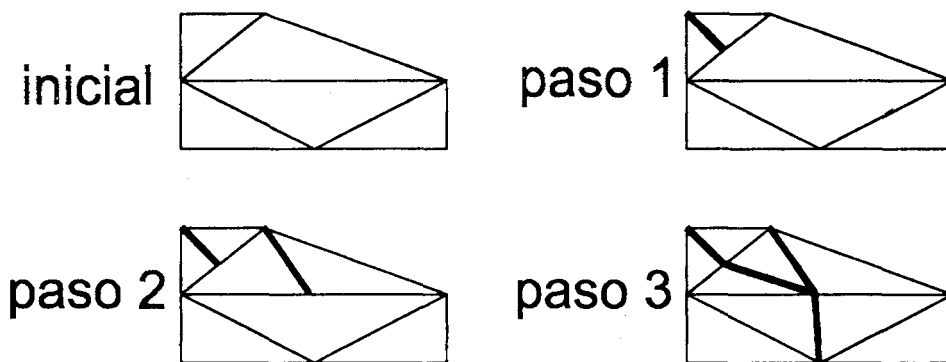


Figura 1. Algoritmo de densificación en 2D

Para el caso de mallas tridimensionales con elementos tipo tetraedros, el algoritmo de división de elementos por su arista más larga puede extenderse en forma casi directa (su implementación computacional, sin embargo, resulta mucho más compleja). El mismo puede sintetizarse en la siguiente forma:

1. Crear una lista con los elementos a dividir.
2. Mientras existan elementos en la lista, tomar el primero y buscar su arista más larga.
3. Si la arista no había sido dividida, crear un nuevo nodo en el punto medio.
4. Dividir el elemento en dos.
5. Si alguna de las dos caras divididas no estaba marcada como ya dividida, agregar al correspondiente elemento vecino en la lista y marcar su cara como ya dividida.
6. Si alguno de los dos nuevos elementos generados tiene caras no-conformes, se agrega a la lista.
7. Borrar el elemento dividido de la lista y volver al paso 2.

El algoritmo así planteado funcionará correctamente para mallas donde la arista máxima en cada cara de tetraedro es única. Si esto no es así (por ejemplo un tetraedro regular tiene todas sus aristas iguales), pueden generarse no-conformidades del tipo de dos aristas que se cruzan, ya que una misma cara puede dividirse en una forma vista desde un tetraedro y de otra vista desde su vecino. Por ello a la hora de implementar computacionalmente este algoritmo, es preciso tener en cuenta una consideración adicional: cuando se agrega un nuevo elemento a la lista a causa de que se creó una non-conformidad en alguna de sus caras, será necesario indicar también en qué forma se deberá dividir. Este algoritmo también finaliza en un número finito de pasos¹².

Para el caso bi-dimensional de este algoritmo es posible demostrar que la calidad mínima de las mallas generadas está acotada. Esta condición es importante para obtener un método robusto que se pueda utilizar en un contexto automático. En el caso tri-dimensional no existe una demostración de este tipo, pero pruebas empíricas realizadas indican un buen comportamiento en este punto.

RECOLOCACIÓN DE CONDICIONES DE BORDE

Para la colocación de las condiciones de borde se forman grupos de caras sobre el borde del dominio. Esto es completado en el momento de la generación de la superficie de la malla, ya que a cada grupo se asignan determinadas condiciones de borde. Al realizar cada densificación local de la malla, algunas caras de la superficie pueden haberse dividido.

Para la recolocación se identifican aquellas caras que están sobre la superficie y han sido divididas. Este paso se realiza utilizando un método geométrico, simple de implementar, pero que puede tener un alto costo computacional y que exige utilizar un parámetro de tolerancia geométrica. En los casos estudiados no se encontró ninguna dificultad y los tiempos de ejecución fueron aceptables (en el peor de los casos comparable al costo del resto del proceso).

Una vez identificadas las caras nuevas, se interpolan los nuevos valores de condición de contorno a partir de los originales que la rodean.

RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección presentamos algunos ejemplos numéricos que sirven para ver la potencialidad del método y comprobar a la vez el correcto funcionamiento del mismo.

Además de problemas reales se resuelve un problema con solución analítica exacta, que es usado como *benchmark*, mostrando comparativamente el comportamiento del error real y el error estimado.

Se sabe que en tres dimensiones las singularidades provenientes de la frontera se deben a dos situaciones: a) lados reentrantes y b) vértices reentrantes. Los dos primeros ejemplos son del tipo a) y el tercero del tipo b).

En todos los casos se muestra el orden de convergencia, obtenido con respecto al número total de nodos de la red.

Las mallas utilizadas en los ejemplos son de tetraedros lineales, inicialmente muy pobres en la cantidad de elementos, pero se ha tenido el cuidado de que no queden tetraedros con cuatro nodos sobre la frontera. Para el cálculo de las matrices elementales se utilizaron reglas de integración de Gauss de 3 puntos.

Para el post-procesamiento obtenemos tensiones continuas (σ_{nod}), a partir de los desplazamientos¹⁰, por medio de la proyección L^2 en el espacio discreto V_0^j para cada componente k, l .

$$\int_{\Omega} (\sigma_{\text{nod}} - \sigma(u_j))_{kl} \nu \, d\Omega = 0 \quad \forall \nu \in V_0^j$$

Caso 1: Barra en L

En este caso resolvemos el problema (3) sobre el dominio que se puede ver en la Figura 2. El mismo tiene una dimensión característica de 1 m y se utilizaron los coeficientes

$$\begin{aligned} E(x, y) &= 2,01 \text{ MPa} \\ \nu(x, y) &= 0,005 \\ f(x, y) &= 0,0 \\ g(x, y) &= \frac{-r^{\alpha-1}[(1+\alpha)^2 \partial_{\varphi} \Psi(\varphi) + \partial_{\varphi}^3 \Psi(\varphi)]}{(1-\alpha)} \end{aligned}$$

con

$$\Psi(\varphi) = \frac{\text{sen}((1+\alpha)\varphi) \cos(\alpha\omega)}{(1+\alpha) - \cos((1+\alpha)\varphi)} + \frac{\text{sen}((\alpha-1)\varphi) \cos(\alpha\omega)}{(1-\alpha) + \cos((\alpha-1)\varphi)}; \quad \alpha = \frac{856399}{1572864}; \quad \omega = \frac{3\pi}{2}$$

y φ el ángulo plano medido en sentido antihorario desde el eje x . Sobre las tapas superior e inferior se coloca condición de simetría con $\sigma(u) \cdot n = 0$. Por último, sobre las caras laterales se coloca condición de borde tipo *Dirichlet* con la solución analítica

del problema (11). Esta es una extensión a 3D de un resultado muy utilizado como *benchmark* para estimadores de error en fluidodinámica computacional⁶.

$$u(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r^\alpha [(1 + \alpha) \operatorname{sen} \varphi \Psi(\varphi) + \cos \varphi \partial_\varphi \Psi(\varphi)] \\ r^\alpha [\operatorname{sen} \varphi \partial_\varphi \Psi(\varphi) - (1 + \alpha) \cos \varphi \Psi(\varphi)] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Para lograr que la función (11) sea solución al problema de elasticidad, agregamos el término fuente mostrado anteriormente. De este modo obtenemos como solución una función cuyo gradiente tiene una singularidad en el origen. Disponer de esta solución analítica es de gran utilidad ya que permite comprobar el correcto funcionamiento y robustez del método adaptivo presentado.

En la Figura 2 se muestra una sucesión de mallas encajadas adaptadas a la solución. Se puede observar como las isolíneas de σ_{xx} migran hacia la zona de discontinuidad y se suavizan, alcanzando mayores valores pico a medida que agregamos grados de libertad.

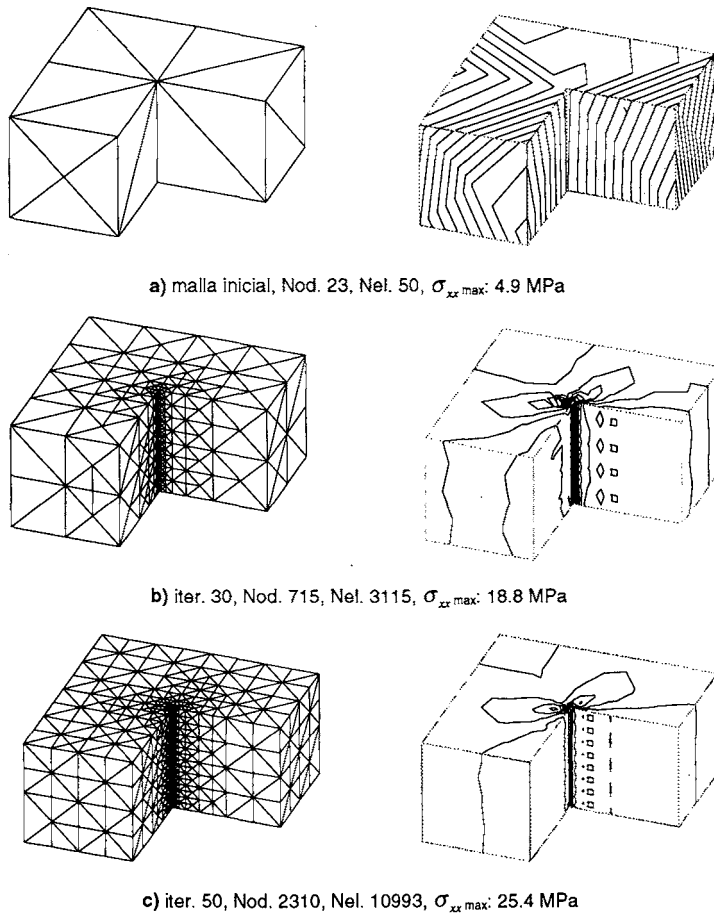


Figura 2. Mallas y soluciones obtenidas en un proceso de adaptividad, usando el estimador elemental

- a) malla inicial, Nod. 23, Nel. 50, $\sigma_{xx\max}$: 4,9 MPa
- b) iter. 30, Nod. 715, Nel. 3115, $\sigma_{xx\max}$: 18,8 MPa
- c) iter. 50, Nod. 2310, Nel. 10993, $\sigma_{xx\max}$: 25,4 MPa

Para mostrar la convergencia del método en este caso, tanto con el error exacto como con el estimado, graficamos en la Figura 3 los errores en función del número total de nodos. También allí superponemos una ley de potencias con el orden de convergencia óptima(1/3). Esta curva coincide con una interpolación de los últimos 15 puntos.

En la Figura 3 se observan “escalones” donde se pierde transitoriamente el orden de convergencia óptimo, tanto en el error estimado como en el error exacto. Probablemente los mismos se deben a la naturaleza discreta del proceso de densificación (se divide en dos o no se divide).

Además debe observarse el buen comportamiento de la estimación del error que responde exactamente con el mismo orden que el error exacto.

En el proceso iterativo se ha utilizado un valor de $\lambda = 0,9$, lo que explica la gran cantidad de puntos en la Figura 3.

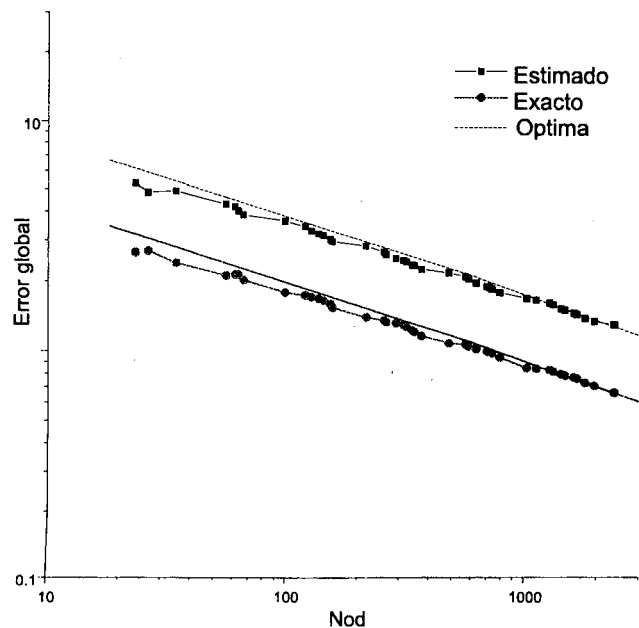


Figura 3. Error exacto y estimado vs. número total de nodos

Para este ejemplo comparamos algunas variantes del método adaptivo, en particular en la densificación. En la Figura 4 se muestran tres curvas indicadas como *Estimador*, *Origen* y *Smoothing*, las que a continuación se detallan:

Estimador

Corresponde al método descrito en este trabajo, es decir, utilizando densificación adaptiva, con el error elemental como indicador y con una sucesión de mallas encajadas.

Origen

Aprovechando el hecho de que este problema tiene una solución particular cuyo gradiente es discontinuo en una línea (el eje vertical), dividimos los elementos cuyo centro de gravedad esté dentro de un cilindro. El radio del cilindro comienza siendo uno que contiene al dominio y después de cada densificación se achica a un 70 % de su valor. Con este proceso se obtiene una sucesión de mallas encajadas con un gradiente de densificación muy fuerte en la zona cercana a la línea de discontinuidad.

Smoothing

Este consiste en realizar un suavizado de la malla de elementos finitos⁷ antes de realizar los cálculos en cada paso, manteniendo así la “calidad” de la red. Debe notarse que en este caso las sucesivas mallas no son encajadas.

En la Figura 4 podemos observar los tres tipos de densificación mencionados anteriormente.

Si comparamos las curvas *Estimador* y *Origen*, vemos que, densificando en función del conocimiento previo de la solución, no se consiguieron mejores resultados que con el estimador utilizado.

Además de comparar las curvas *Estimador* y *Smoothing*, vemos que mejorar la calidad de la malla después de cada inserción de tetraedros no mejora sensiblemente los resultados. Esto muestra que la calidad de la malla no se deteriora sensiblemente al realizar el proceso de inserción de tetraedros como fue descrito anteriormente.

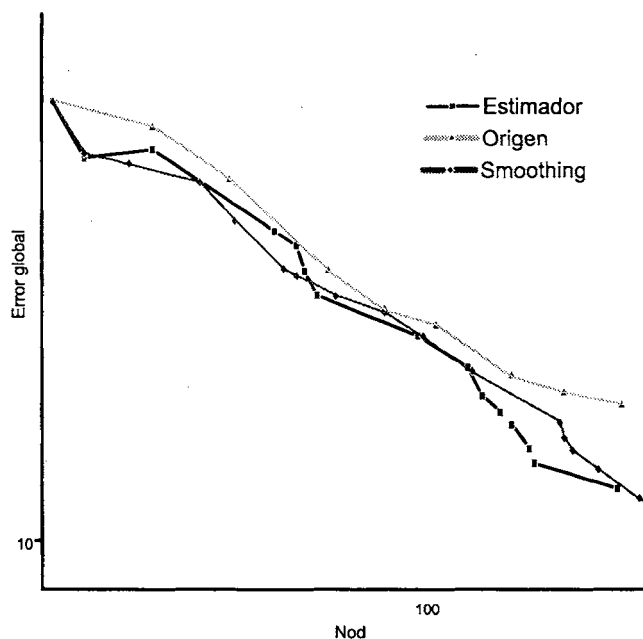


Figura 4. Comparación entre distintas estrategias de selección. Selección de la singularidad adaptada a la solución y con optimización de red después de cada densificación adaptada a la solución

Caso 2: Placa perforada

En este ejemplo resolvemos las ecuaciones de elasticidad sobre una placa plana que se le ha quitado del centro un paralelepípedo de sección cuadrada. En la Figura 5 se muestra un esquema de la placa sometida a tracción en sus caras superior e inferior, por ser simétrica respecto de un plano horizontal ($X - Y$) y uno vertical ($Y - Z$). Se ha modelado solamente 1/4 del dominio de 1 m de longitud (rayado en la figura).

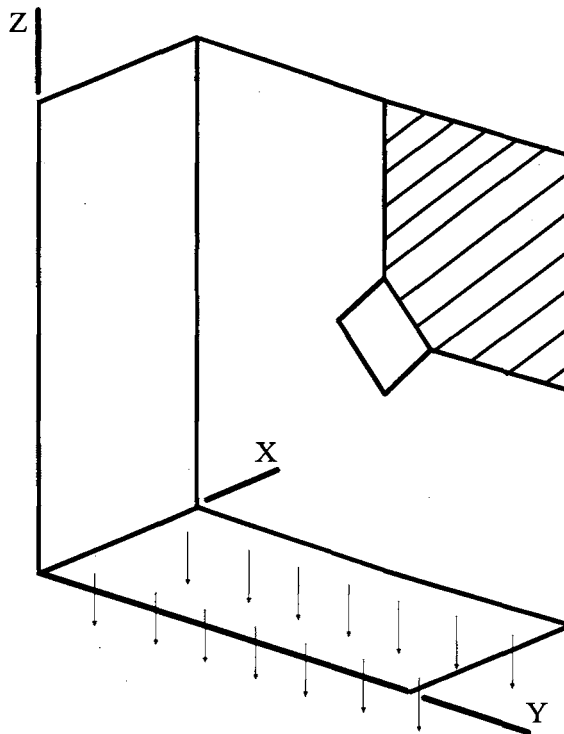


Figura 5. Esquema del problema resuelto en el Caso 2 (Placa perforada)

En las superficies traccionadas se impone una condición de contorno $\sigma(u) \cdot n = 10 \text{ MPa}$.

En el resto de las superficies las condiciones de contorno son $\sigma(u) \cdot n = 0$.

Las propiedades del material son:

$$E(x, y) = 2,01 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu(x, y) = 0,3$$

$$f(x, y) = 0,0$$

$$g(x, y) = 0,0$$

Este es un ejemplo donde la singularidad es producida por un lado reentrante.

En la Figura 6 se muestra el primer y último paso del proceso adaptivo usando el estimador de error elemental, con un coeficiente $\lambda = 0,8$.

- a) malla inicial, Nod. 29, Nel. 86, $\sigma_{VonMises}^{max}$: 15,0 MPa
- b) iter. 15, Nod. 356, Nel. 1451, $\sigma_{VonMises}^{max}$: 34,0 MPa

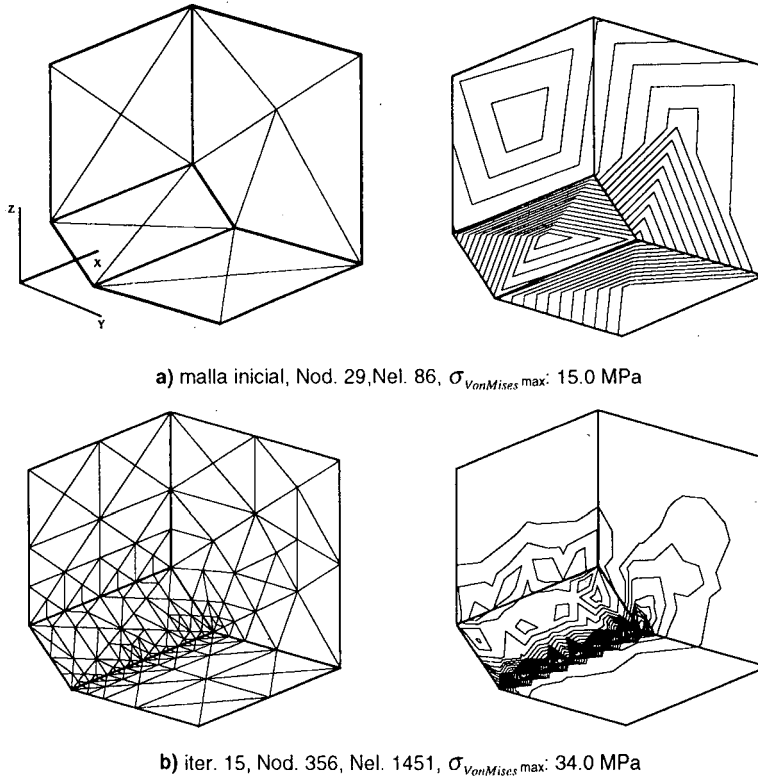


Figura 6. Mallas y soluciones obtenidas en un proceso de adaptividad, usando el estimador elemental

Al graficar el error global estimado versus el número total de nodos de la red (Figura 7) e interpolando con una ley de potencias, encontramos una convergencia de 0,22.

A pesar de no haber realizado gran cantidad de iteraciones ni haber llegado a utilizar demasiados grados de libertad, se observa en este ejemplo la densificación esperada, en la arista reentrante inferior se ha logrado una mayor densificación que en la arista reentrante superior. No hemos continuado con la densificación, ya que los puntos en el gráfico de la Figura 7 concuerdan bien con una ley de potencias, además de observar que la distribución del error elemental es suficientemente plana.

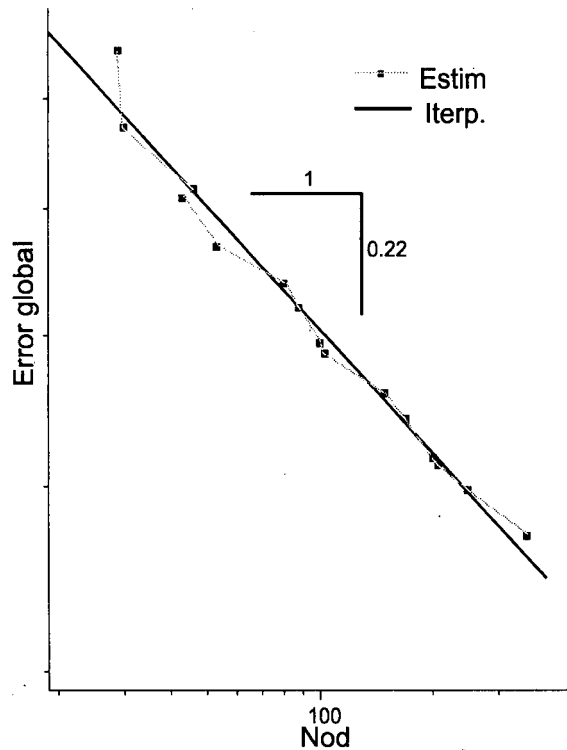


Figura 7. Error global estimado vs. número total de nodos de la red, para el Caso 2

Caso 3: *Pin*

En este ejemplo resolvemos las ecuaciones (3) sobre el dominio que se puede ver en la Figura 8a. La longitud característica del problema es de 1 m y los coeficientes utilizados son:

$$E(x, y) = 2,01 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu(x, y) = 0,3$$

$$f(x, y) = 0,0$$

$$g(x, y) = 0,0$$

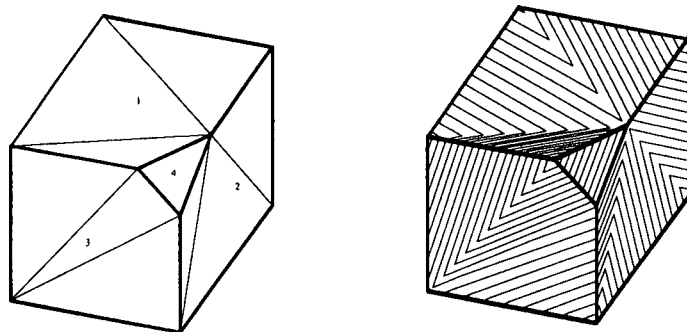
La cara 1 coincide con un plano horizontal de simetría, la cara 2 es un plano vertical de simetría, las caras 3 y 4 están sometidas a una presión de 10 MPa. A las tres caras planas restantes (en la parte trasera e inferior) se ha impuesto tensión normal nula.

Este problema representa una placa plana a la que se ha sustraído una pirámide de base cuadrada en la cara interna y se encuentra sometida a presión en uno de sus lados. Por lo tanto tiene dos discontinuidades producidas por aristas reentrantes, que se unen en un punto de discontinuidad fuerte.

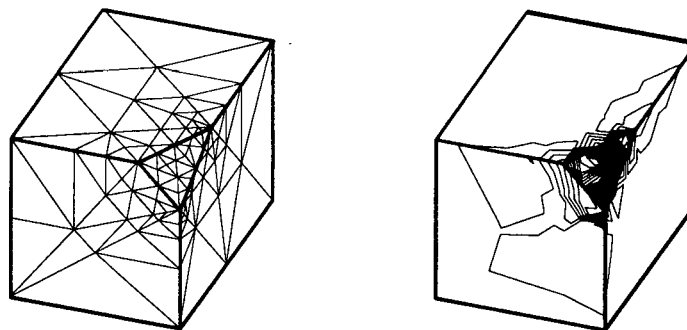
En la Figura 8 se muestran tres pasos del proceso de densificación con la malla y el campo de la tensión equivalente de Von Mises correspondiente. Utilizando un valor de $\lambda = 0,8$, la calidad de la solución mejora sensiblemente en 28 iteraciones, densificando

la malla donde es esperado y obteniendo un orden de convergencia de 0,3.

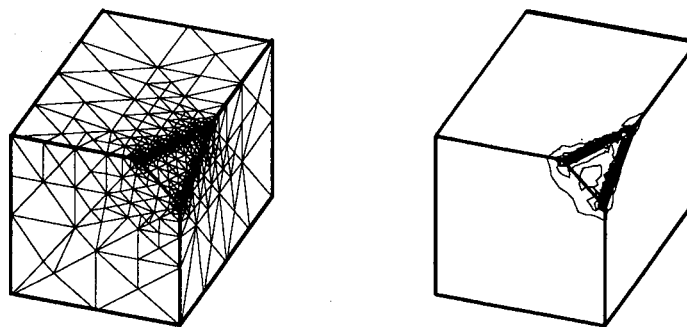
- a) malla inicial, Nod. 16, Nel. 33, $\sigma_{VonMises\max}$: 6,0 MPa
- b) iter. 11, Nod. 111, Nel. 358, $\sigma_{VonMises\max}$: 10,0 MPa
- c) iter. 28, Nod. 1208, Nel. 5236, $\sigma_{VonMises\max}$: 24,0 MPa



a) malla inicial, Nod. 16, Nel. 33, $\sigma_{VonMises\max}$: 6.0 MPa



b) iter. 11, Nod. 111, Nel. 358, $\sigma_{VonMises\max}$: 10.0 MPa



c) iter. 28, Nod. 1208, Nel. 5236, $\sigma_{VonMises\max}$: 24.0 MPa

Figura 8. Mallas y soluciones obtenidas en un proceso de adaptividad, usando el estimador elemental

En la Figura 9 se grafica el error estimado global vs. el número total de nodos de la red, mostrando que la pendiente es muy buena (orden de convergencia 0.3).

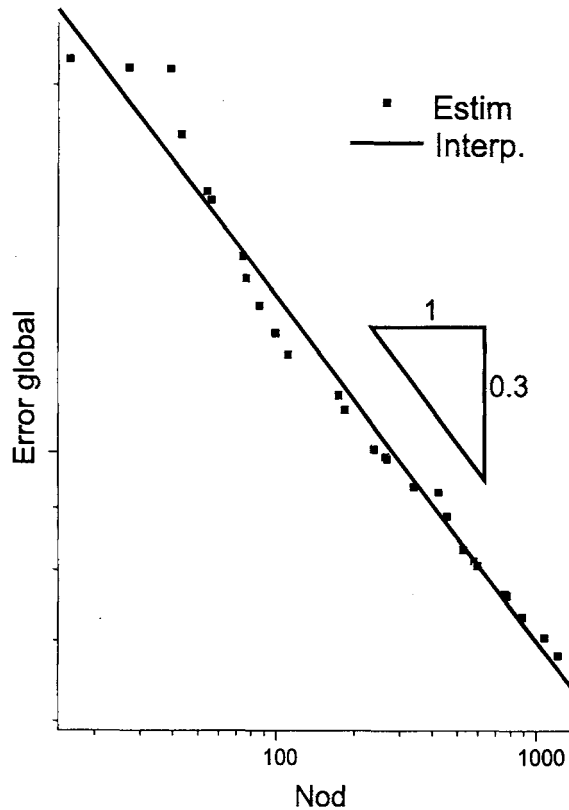


Figura 9. Error global estimado vs. número total de nodos de la red, para el Caso 3

UNA ESTRATEGIA DE SELECCIÓN ALTERNATIVA

Como se mencionó anteriormente, la primera estrategia de selección de los tetraedros a dividir utilizada en los ejemplos fue dividir aquellos que cumplan $\eta_T/\eta_{\max} \geq \lambda$ con λ fijo durante todo el proceso. Obsérvese que la anterior estrategia no posee ningún criterio de detención.

Una segunda estrategia proviene de seguir la línea propuesta por Zienkiewicz y Zhu¹⁴ en la cual se impone un criterio de detención al error global estimado relativo a la norma de la solución

$$\frac{\text{Estim}}{\|\nabla u_j\|} < \theta$$

donde θ representa algún grado de precisión de la solución. Para fijarla no proponemos ningún método.

Si aproximamos el valor del estimador global por $\sqrt{nel} \eta_{adm}$ tenemos un criterio de detención y también una estrategia de selección de tetraedros a dividir. Es decir, se dividen aquellos tetraedros que cumplen

$$\eta > \eta_{adm} = \theta \frac{\|\nabla u_j\|}{\sqrt{nel}}$$

y se detiene el proceso adaptivo cuando se cumple

$$\text{Estim} < \theta \|\nabla u_j\|$$

Con este criterio se repitieron los mismos cálculos realizados para el ejemplo numérico 1, cuyos resultados se muestran en la Figura 10.

Una de las diferencias observadas entre el Criterio 1 y el 2 es que para llegar al mismo error son necesarias menos iteraciones, pero sin embargo, se necesitan más grados de libertad. Debería notarse también, que las mallas obtenidas serán de gradientes de densidad más suaves con el Criterio 2.

Con respecto al orden de convergencia podemos decir, que con el Criterio 1 es prácticamente constante durante todo el proceso, mientras que con el Criterio 2, inicialmente es menor recuperándose al final un orden tal vez mejor que el Criterio 1.

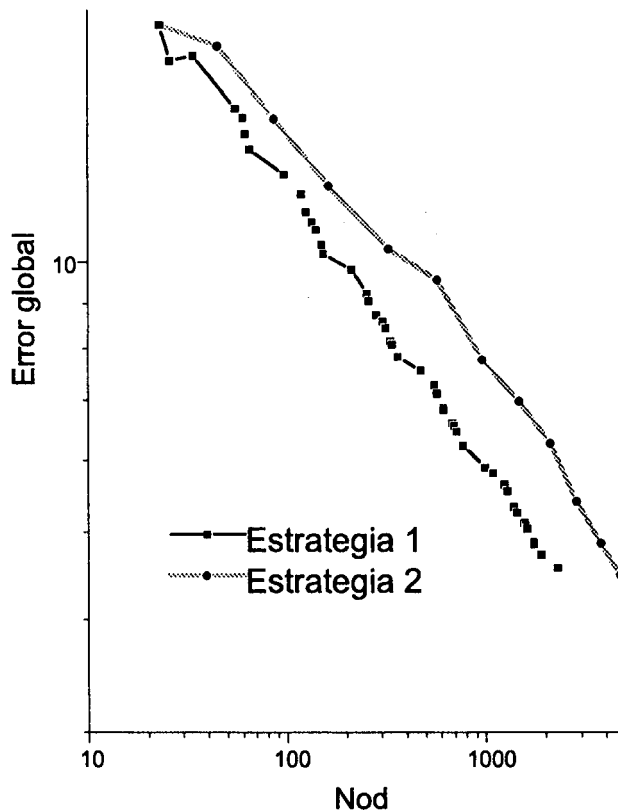


Figura 10. Error global estimado vs. número total de nodos de la red, comparando las estrategias 1 y 2

COMENTARIOS FINALES

Hemos presentado un estimador del error a posteriori, que junto con la estrategia de refinamiento y recolocación automática de las condiciones de borde constituye una herramienta de gran utilidad en procesos de modelado computacional. Ella nos permite resolver problemas de elasticidad 3D, reduciendo notablemente el esfuerzo y capacitación del usuario por un lado y el costo computacional por el otro. Comparado con una densificación manual (o rígida), este método permite un sustancial ahorro de grados de libertad, siendo así aún en los casos donde se conoce el comportamiento de la solución (ver Figura 4). Mencionamos a continuación algunos otros puntos que consideramos importante remarcar:

En el área de estimación a posteriori del error, debe tenerse en cuenta que la aproximación $h_i \approx (\text{vol})^{1/3}$ no es válida para las mallas que se utilizan en 3D y debe utilizarse su definición estricta. Este error es fácil de cometerse al extender las aproximaciones bi-dimensionales.

Uno de los problemas que presenta este método es la imposibilidad de recuperar una frontera curva, por ejemplo, si comenzamos con una malla que represente un cascarón esférico, muy pobre de elementos. Este hecho no se corregirá con la simple partición de tetraedros y seguirá prediciendo tensiones incorrectas en cada una de las aristas de la superficie original. Este problema se puede superar si se desplazan los nuevos nodos de forma de recolocarlos sobre la frontera o si se realiza un remallado, utilizando el indicador de error para formar un campo con el tamaño del elemento deseado.

Observamos que el algoritmo no tiende a sobredensificar en zonas donde no es necesario. En el ejemplo de la Figura 8c el tamaño del lado en la superficie de la malla crece en forma geométrica con la distancia a la singularidad, lo que indica que se ha alcanzado un fuerte gradiente en el tamaño del elemento.

En el caso en que se resuelva la matriz del sistema con algún método iterativo, puede utilizarse como solución inicial el resultado calculado sobre la malla menos densa, para reducir el tiempo de cálculo en la resolución de la mencionada matriz.

En este trabajo los tetraedros se dividieron en 2, pero con el fin de reducir el número de iteraciones se pueden densificar las mallas más abruptamente dividiendo en 4 u 8 tetraedros cada elemento seleccionado.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente financiado por Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), PID-BID N° 40/92.

REFERENCIAS

1. I. Babuška, R.B. Kellogg y J. Pitkaranta, "Direct y Inverse Error Estimates to Finite Elements with Mesh Refinements", *Num. Math.*, Vol. **33**, pp. 447-471, (1979).
2. I. Babuška y A. Miller, "A Feedback Finite Element Method with a Posteriori Error Estimation. Part I: The Finite Element Method y Some Basic Properties of the a Posteriori Error Estimator", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **61**, pp. 1-40, (1987).

3. I. Babuška y W.C. Rheinboldt, "A Posteriori Error Estimators in the Finite Element Method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **12**, pp. 1587–1615, (1978).
4. I. Babuška, R. Durán y R. Rodríguez, "Analysis of the Efficiency of an a Posteriori Error Estimator for Linear Triangular Elements", to appear.
5. R.E. Bank y A. Weiser, "Some a Posteriori Error Estimators for Elliptic Partial Differential Equations", *Math. Comp.*, Vol. **44**, pp. 283–301, (1985).
6. P. Ciarlet, "*The Finite Element Method for Elliptic Problems*", North Holland, (1978).
7. E. Dari y G. Buscaglia, "Mesh Optimization: How to Obtain Good Unstructured 3D Finite Element Meshes with Not-So-Good Mesh Generators", *Structural Optimizations*, Vol. **8**, pp. 181–188, (1994).
8. G. Duvaut y J.L. Lions, "*Les inéquations en mécanique et en physique*", Dunod, Paris, (1972).
9. P. Grisvard, "*Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*", Pitman, Boston, (1985).
10. T.J.R. Hughes, "*The Finite Element Method, Linear Static y Dynamic Finite Element Analysis*", Prentice-Hall, (1987).
11. M.C. Rivara, "A Grid Generator Based on 4-Triangles Conforming Mesh-Refinement Algorithms", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **24**, pp. 1343–1354, (1987).
12. M.C. Rivara y M.J. Vénere, "Cost Analysis of the Longest-Side Refinement Algorithm for Triangulations", submitted to *Engineering with Computers*.
13. R. Verfürth, "A Posteriori Error Estimators for the Stokes Equations", *Num. Math.*, Vol. **55**, pp. 309–325, (1989).
14. O.C. Zienkiewicz y J.Z. Zhu, "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **24**, pp. 337–357, (1987).
15. O.C. Zienkiewicz y J.Z. Zhu, "Adaptivity and Mesh Generation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **32**, pp. 783–810, (1991).