

UN MODELO DEL COMPORTAMIENTO HISTERÉTICO DE ELEMENTOS DE CONCRETO ARMADO BASADO EN LA TEORÍA DEL DAÑO CONCENTRADO

JULIO FLÓREZ LÓPEZ

*Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes
Mérida, Venezuela*

RESUMEN

Se propone un modelo del comportamiento histerético de miembros de concreto armado basado en los conceptos de la mecánica de la degradación y de la fractura clásicas. Cada miembro se representa como el ensamblaje de una viga-columna elástica y dos rótulas inelásticas. El comportamiento de la viga-columna es descrito de la manera convencional. El comportamiento de las rótulas se obtiene introduciendo tres conjuntos de variables internas que caracterizan las deformaciones plásticas del miembro y su estado de daño. La matriz de flexibilidad y la ley de estado del miembro se expresan en función de estas variables. Se proponen leyes de evolución independientes del tiempo para las variables internas. Estas leyes de evolución se describen a partir de funciones de fluencia identificadas en base a resultados experimentales. La exactitud del modelo se verifica comparando el modelo con resultados experimentales obtenidos en la literatura.

SUMMARY

A model, based on the concepts of continuum damage and fracture mechanics, for RC frames members under hysteretic loading is proposed. Each member is represented as the assemblage of an elastic beam-column and two inelastic hinges. The behavior of the beam-column is described in the conventional way. Hinge's behavior is obtained by the introduction of three sets of internal variables that characterize plastic deformations and frame's state of damage. Flexibility matrix and state laws are expressed as a function of these variables. Time-independent evolution laws are proposed. These laws are described with the help of yield functions that are identified from experimental results. The accuracy of the model is verified by simulating various experiments for which data were available in the literature.

Recibido: Junio 1995

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es el tercero de una serie publicada en esta revista en la cual se describe una teoría para el análisis de estructuras aporricadas basada en la mecánica de la degradación (*continuum damage mechanics*). En el primer artículo de la serie¹ se describió un marco general sin hacer referencia a ningún material en particular. Se introdujo el concepto de *rótula degradable* y se definió una variable interna de daño que mide el estado de deterioro del miembro. Esta formulación generaliza la teoría convencional de pórticos elastoplásticos al introducir conceptos de la mecánica de la degradación y de la fractura.

En el segundo artículo² se aplicó el método propuesto al análisis de pórticos de concreto armado. Específicamente se propuso un método para la identificación experimental del modelo general y se obtuvo una ley de comportamiento para miembros de concreto armado bajo ciertas limitaciones. De éstas, la más importante es que el modelo propuesto en ese artículo sólo es válido para solicitaciones monotónicas.

En este tercer artículo se propone un modelo del comportamiento del concreto armado bajo solicitaciones histeréticas que generaliza el anterior. Este nuevo modelo está basado en el concepto de *daño unilateral*, que es el término usado en la mecánica de la degradación convencional para referirse a estados de deterioro que sólo tienen influencia en el comportamiento ante solicitaciones de un solo signo^{3,4}.

Otro artículo conteniendo básicamente el mismo material presentado aquí, pero escrito en lengua inglesa, ha sido escrito paralelamente a este artículo⁵.

Hay por supuesto muchos otros modelos del comportamiento histerético de miembros de concreto armado basados en enfoques diferentes al utilizado en este trabajo⁶⁻¹⁰. Algunos de estos modelos permiten caracterizar efectos que no han sido tomados en cuenta en este artículo. Sin embargo se espera que el uso de los métodos de la mecánica de la degradación pueda ser considerado como una alternativa valiosa para el modelado del comportamiento de estructuras aporricadas bajo solicitaciones sísmicas.

ESFUERZOS Y DEFORMACIONES GENERALIZADAS EN UN MIEMBRO DE UN PÓRTICO PLANO

Considérese una estructura aporricada plana compuesta por m miembros estructurales unidos entre sí por juntas infinitamente rígidas tal y como se indica en la Figura 1. Para caracterizar el comportamiento del pórtico se empleará el marco general y la notación descrita en trabajos precedentes^{1-2,11-12} en los cuales se presenta la teoría general de pórticos empleando un esquema similar al de la mecánica de los medios continuos. Así, el estado del pórtico se representa mediante variables *desplazamiento* que caracterizan el movimiento de la estructura, variables *deformación* que miden el cambio de forma y variables *esfuerzo* que permiten representar la distribución de las fuerzas externas en los diferentes componentes de la estructura. A fin de diferenciar estas variables de sus equivalentes de la mecánica de medios continuos, se emplea el adjetivo *generalizados*.

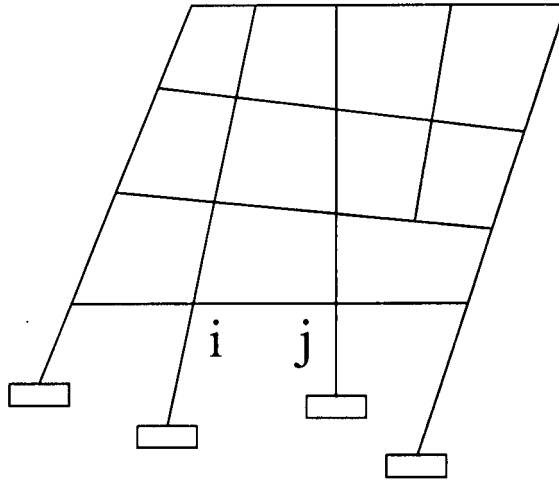


Figura 1. Pórtico plano

Del pórtico de la Figura 1 se aísla el miembro entre los nudos i y j . Los esfuerzos y deformaciones generalizados del miembro están dados por $\{M\}^t = (M_i, M_j, N)$ y $\{\Phi\}^t = (\Phi_i, \Phi_j, \delta)$, respectivamente, donde los elementos de las matrices $\{M\}$ y $\{\Phi\}$ tienen la interpretación indicada en las Figuras 2a y 2b.

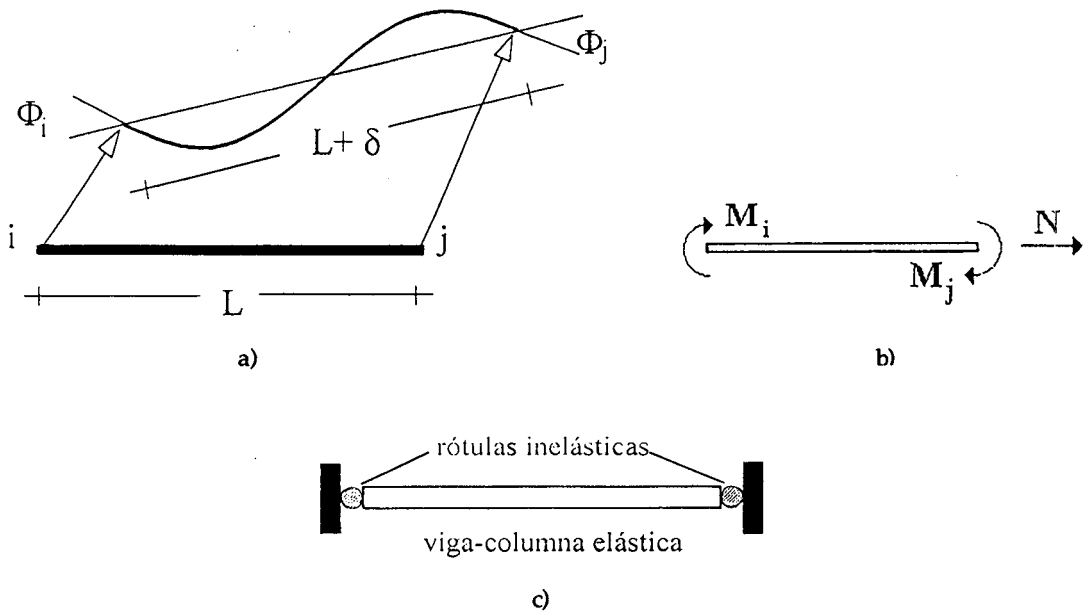


Figura 2. a) Deformaciones generalizadas, b) Esfuerzos generalizados, c) Modelo de disipación concentrada

Puede constatar que para un movimiento de cuerpo rígido de la estructura las m matrices de deformaciones generalizadas son nulas y viceversa.

Una ley de comportamiento generalizada para un miembro de un pórtico se define como el conjunto de expresiones que relacionan los esfuerzos generalizados con la historia de deformaciones generalizadas. Por ejemplo, si el miembro es elástico, la ley de comportamiento se define de la siguiente manera

$$\{M\} = \left\{ \frac{\partial W}{\partial \Phi} \right\} = [S^o]\{\Phi\} \quad \text{o en su lugar} \quad \{\Phi\} = \left\{ \frac{\partial W^*}{\partial M} \right\} = [F^o]\{M\} \quad (1)$$

donde W y W^* indican la energía de deformación y la energía de deformación complementaria del miembro. Los términos $[S^o]$ y $[F^o]$ son denominadas *matrices de rigidez y flexibilidad del miembro*, respectivamente. Si los efectos geoméricamente no lineales son importantes, estas matrices pueden ser función de las deformaciones o esfuerzos generalizados¹¹⁻¹².

La ley de comportamiento de cada miembro, las ecuaciones de equilibrio dinámico o estático y las ecuaciones de compatibilidad (relaciones desplazamientos generalizados-deformaciones generalizadas) convencionales constituyen un sistema de ecuaciones que permiten el análisis del pórtico¹¹⁻¹².

LEY DE COMPORTAMIENTO ELASTOPLÁSTICA AL DAÑO PARA MIEMBROS DE CONCRETO ARMADO BAJO SOLICITACIONES MONOTÓNICAS

Modelo de disipación de energía concentrada de un miembro de un pórtico plano

El modelo elástico descrito en la sección anterior es empleado en la práctica industrial para el dimensionamiento y diseño estructural, pero obviamente no es utilizable para la simulación numérica del comportamiento de la estructura cuando ésta es sometida a sobrecargas de gran intensidad.

En esta sección se describe una ley de comportamiento elastoplástica acoplada al daño válida para solicitaciones monotónicas (aunque se permiten descargas elásticas), propuesta previamente². Este modelo constitutivo es presentado en este artículo porque es la base de la ley de comportamiento válida en el caso de solicitaciones histeréticas que será presentada en la sección siguiente.

Con el objeto de caracterizar el comportamiento inelástico del miembro, se considera el modelo denominado aquí de *daño* o de *disipación de energía concentrada* de la Figura 2c. En este modelo el miembro se representa como el ensamblaje de una viga-columna elástica (no necesariamente lineal) y dos rótulas inelásticas de longitud nula. La disipación de energía debida a fenómenos inelásticos se supone exclusivamente en las rótulas, de ahí el nombre de este modelo.

Para describir las leyes de comportamiento generalizadas se empleará igualmente el esquema empleado en la mecánica de los medios continuos, es decir, estas leyes

de comportamiento serán expresadas en términos de *variables internas* y *fuerzas termodinámicas*, *leyes de estado* y *leyes de evolución*.

Leyes de estado

Se postula la existencia de dos conjuntos de *variables internas*: las deformaciones generalizadas plásticas $\{\Phi^p\}^t = (\Phi_i^p, \Phi_j^p, \delta^p)$ y el daño $\{D\}^t = (d_i, d_j, d_n)$ de tal manera que la energía de deformación de un miembro elastoplástico asociado al daño pueda expresarse de la manera siguiente²

$$W = \frac{1}{2} \{\Phi - \Phi^p\}^t [S^d(D)] \{\Phi - \Phi^p\} \quad (2)$$

donde

$$[S^d(D)] = ([F^o]) + [C(D)]^{-1}; \quad [C(D)] = \begin{bmatrix} \frac{d_i F_{11}^o}{(1-d_i)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_j F_{22}^o}{(1-d_j)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_n F_{33}^o}{(1-d_n)} \end{bmatrix}$$

Los dos primeros parámetros de la variable $\{\Phi^p\}$ corresponden a las rotaciones plásticas de las rótulas i y j , respectivamente, tal y como se definen en las teorías clásicas de pórticos elastoplásticos. El último parámetro mide el alargamiento permanente de la cuerda $i-j$. La variable interna $\{D\}$ agrupa tres parámetros que pueden tomar valores entre cero y uno como en la teoría convencional de daño continuo¹³. Los dos primeros parámetros de la matriz de daño del miembro miden el estado de *daño a flexión* de las rótulas i y j , respectivamente. Físicamente, y en el caso particular de miembros de concreto armado, estas variables miden el estado de agrietamiento del miembro. El último parámetro mide el daño producido por solicitaciones axiales.

En la expresión de la energía de deformación del miembro se introdujo la matriz de rigidez de un miembro elastoplástico degradable $[S^d(D)]$ que se expresa como una función de la matriz de flexibilidad $[F^o]$ de la viga-columna elástica y, que por lo tanto, coincide con la definida en (11), y de la matriz de flexibilidad de las rótulas inelásticas $[C(D)]$. En la expresión de esta última puede constatarse que cuando el parámetro de daño d_i toma el valor cero, la rótula i presenta una flexibilidad nula (o una rigidez infinita) como las rótulas plásticas de las teorías plásticas convencionales. En el otro caso extremo, es decir, cuando d_i toma el valor uno, la rótula i exhibe una flexibilidad infinita (o una rigidez nula) como las articulaciones internas de las teorías clásicas de pórticos elásticos.

Se admite que los parámetros de daño varían desde cero (o un valor inicial) hasta uno de forma continua en función de las solicitaciones experimentadas por el pórtico. De esta manera se caracteriza en el modelo la pérdida de rigidez del miembro debido al agrietamiento del concreto. Por otra parte, la evolución de las deformaciones plásticas generalizadas está asociada a la fluencia del refuerzo. La variación de las variables

internas está caracterizada por las leyes de evolución que serán introducidas en la sección siguiente.

A partir de la expresión de la energía de deformación complementaria se obtienen las siguientes leyes de estado:

$$\{M\} = \left\{ \frac{\partial W}{\partial \Phi} \right\} = [S^d(D)]\{\Phi - \Phi^p\} \quad (3a)$$

$$\{M\} = - \left\{ \frac{\partial W}{\partial \Phi^p} \right\} = [S^d(D)]\{\Phi - \Phi^p\} \quad (3b)$$

$$\{G\} = - \left\{ \frac{\partial W}{\partial D} \right\}; \quad \{G\}^t = - \left(\frac{\partial W}{\partial d_i}, \frac{\partial W}{\partial d_j}, \frac{\partial W}{\partial d_n} \right) \quad (3c)$$

La primera de las ecuaciones (3a) expresa la relación entre las deformaciones y los esfuerzos generalizados. Las dos últimas definen las fuerzas termodinámicas asociadas a las variables internas. La segunda de las expresiones (3b) demuestra que los esfuerzos generalizados son las variables conjugadas con las deformaciones plásticas generalizadas. La variable $\{G\}$ definida en la tercera de las ecuaciones (3c) es el equivalente de la *tasa de restitución de energía* (energy release rate) que se introduce en la mecánica de la degradación y de la fractura convencional. Esta última variable será por lo tanto utilizada para definir la ley de evolución del daño en la sección siguiente.

Leyes de evolución

En lo sucesivo se admitirá que el alargamiento permanente δ^p y el daño axial d_n son despreciables, es decir, $\delta^p = d_n \simeq 0$. Esto significa que el modelo desarrollado es válido solamente para aquellos casos en los cuales los fenómenos inelásticos son debidos fundamentalmente a efectos de flexión.

Las leyes de evolución de un modelo simplificado independiente del tiempo puede expresarse en función de dos funciones límites para cada una de las rótulas inelásticas: una *función de fluencia plástica* (que será denominada f_i para la rótula i y f_j para la rótula j) y una *función de daño* (que será denominada g_i para la rótula i y g_j para la rótula j). La primera corresponde exactamente al concepto introducido en la teoría convencional de pórticos elastoplásticos. En el caso particular anteriormente mencionado se supondrá que la función de fluencia plástica de la rótula i puede expresarse de manera general, como se indica a continuación

$$f_i = f_i(M_i, \Phi_i^p, d_i, N) \quad (4)$$

La relación (4) debe leerse como sigue: la función de fluencia plástica depende del momento aplicado sobre la rótula, su deformación plástica y su valor de daño. La fuerza axial puede aparecer en la expresión de la función de fluencia plástica como parámetro.

La ley de evolución de la deformación plástica Φ_i^p puede ahora expresarse de la manera siguiente

$$\begin{cases} \dot{\Phi}_i^p = 0 & \text{si } f_i < 0 \text{ o } \dot{f}_i < 0 \\ \dot{\Phi}_i^p \neq 0 & \text{si } f_i = 0 \text{ y } \dot{f}_i = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Las leyes de evolución del daño se obtienen por analogía con la anterior, substituyendo en la expresión de la función límite el momento de la rótula en cuestión (la fuerza termodinámica asociada a la deformación plástica de la rótula) por el momento termodinámico asociado al daño definido en la sección precedente

$$g_i = g_i(G_i, \Phi_i^p, d_i, N) \quad (6)$$

La ley de evolución del daño de la rótula i es ahora la siguiente

$$\begin{cases} \dot{d}_i = 0 & \text{si } g_i < 0 \text{ o } \dot{g}_i < 0 \\ \dot{d}_i \neq 0 & \text{si } g_i = 0 \text{ y } \dot{g}_i = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Las expresiones de las funciones límites fueron obtenidas en base a resultados experimentales obtenidos en ensayos de probetas que representan juntas viga-columna de concreto armado. A partir de estos resultados es posible hallar curvas experimentales de momento en función de la rotación plástica de la rótula y de daño en función del momento termodinámico de la rótula². Estas curvas experimentales permiten proponer las siguientes funciones límite para miembros de sección constante

$$\begin{aligned} f_i &= \left| M_i - X(d_i, \Phi_i^p) \right| - R(d_i); & X &= \left(\frac{1 - d_i}{4 - d_i} \right) c \Phi_i^p & R &= 4 \left(\frac{1 - d_i}{4 - d_i} \right) M_y \\ g_i &= G_i - G_{cr} - q \left(\frac{1 - \ln(1 - d_i)}{1 - d_i} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

donde c, q, G_{cr} y M_y pueden considerarse en primera instancia como constantes que dependen de las características de la sección transversal del miembro.

Puede constatarse que este modelo se reduce al modelo elastoplástico perfecto cuando el daño permanece constante y si la constante c toma el valor cero. Cuando c es positivo y no hay variación del daño, se obtiene un modelo elastoplástico con endurecimiento lineal (representado por el término X). En este caso, la pendiente de la recta de endurecimiento es proporcional al valor de c . Los términos que dependen del daño en la función de fluencia producen por el contrario un ablandamiento. En otras palabras, un aumento del daño a deformación plástica constante produce una disminución del momento de fluencia R y del término de endurecimiento cinemático X . En el caso extremo, es decir, cuando d_i toma el valor uno, el momento es igual a cero (rótula completamente degradada). En general, el tamaño de la zona *no plástica* es el resultado de la competencia entre el endurecimiento producido por la deformación plástica y el ablandamiento que es consecuencia del daño.

La función de daño g_i indica que para que exista un incremento en el valor de d_i , el momento termodinámico debe alcanzar el valor crítico G_{cr} más un término de endurecimiento que es una función del daño y proporcional a la constante q .

Los parámetros introducidos en (8) no tienen una significación bien definida (por ejemplo M_y no corresponde en general al momento de fluencia). Es preferible por lo tanto calcularlos mediante la resolución del siguiente sistema de ecuaciones no lineales.

$$\begin{cases} M_i = M_{cr} & \Rightarrow & d_i = 0 & \text{y} & g_i = 0 \\ M_i = M_p & \Rightarrow & \Phi_i^p = 0, & f_i = 0 & \text{y} & g_i = 0 \\ M_i = M_u & \Rightarrow & \frac{dM_i}{dd_i} = 0, & f_i = 0 & \text{y} & g_i = 0 \\ M_i = M_u & \Rightarrow & \Phi_i^p = \Phi_u^p, & f_i = 0 & \text{y} & g_i = 0 \end{cases} \quad (9)$$

donde M_{cr} es el momento de agrietamiento de la sección transversal, M_p el momento de fluencia, M_u el momento último resistente de la sección y Φ_u^p es la rotación plástica última, es decir, la que corresponde al momento último.

Estos últimos parámetros pueden ser calculados, por ejemplo, mediante la teoría convencional de concreto armado¹⁴. Según esta teoría, todos estos valores dependen de la magnitud de la fuerza axial aplicada sobre el miembro, lo que implica que los parámetros del modelo (c , M_y , G_{cr} y q) también dependen en el caso general de la fuerza axial, es decir

$$c = c(N) \quad M_y = M_y(N); \quad G_{cr} = G_{cr}(N); \quad q = q(N) \quad (10)$$

En la referencia 2 se muestra la comparación entre este modelo y los resultados experimentales de varios ensayos.

MODELO ELASTOPLÁSTICO ACOPLADO AL DAÑO BAJO SOLICITACIONES HISTERÉTICAS

Leyes de estado

Con el objeto de generalizar el modelo de la sección anterior, se postula ahora la existencia de dos conjuntos de variables de daño $\{D^+\} = (d_i^+, d_j^+, d_n^+)$, $\{D^-\} = (d_i^-, d_j^-, d_n^-)$, que toman de nuevo valores en el intervalo $[0,1]$, tales que la energía de deformación complementaria de un miembro elastoplástico degradable sometido a solicitaciones histeréticas se expresa como se indica a continuación^{5,12}

$$U^* = \frac{1}{2} \{ \langle M \rangle_+ \}^T [C(D^+)] \{ \langle M \rangle_+ \} + \frac{1}{2} \{ \langle M \rangle_- \}^T [C(D^-)] \{ \langle M \rangle_- \} + W^* \quad (11)$$

donde los dos primeros términos corresponden a la energía de deformación complementaria de las rótulas inelásticas, mientras que W^* es la energía de deformación complementaria de la viga-columna elástica introducida en la ecuación (1). Los símbolos $\langle X \rangle_+$ y $\langle X \rangle_-$ indican la parte positiva y negativa de X , respectivamente, es decir

$$\langle X \rangle_+ = \begin{cases} X & \text{si } X > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \langle X \rangle_- = \begin{cases} X & \text{si } X < 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (12)$$

Las matrices $[C(D^+)]$ y $[C(D^-)]$ son las matrices de flexibilidad de las rótulas inelásticas ante acciones positivas y negativas, respectivamente, cuya expresión es la siguiente

$$[C(D)] = \begin{bmatrix} \frac{d_i F_{11}^o}{(1-d_i)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_j F_{22}^o}{(1-d_j)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_n F_{33}^o}{(1-d_n)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Los parámetros de daño d_i^+ (d_i^-) y d_j^+ (d_j^-) caracterizan el daño de flexión debido a acciones positivas (negativas). Los parámetros d_n miden el daño axial. En la Figura 3

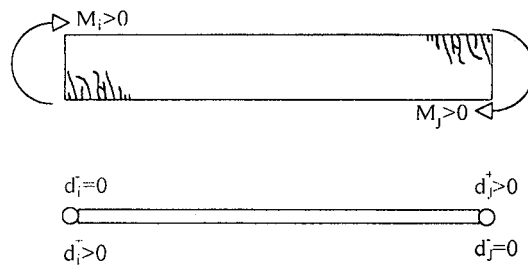


Figura 3. Representación del estado de daño en un miembro de concreto armado mediante variables internas

se indica una representación de la interpretación mecánica de las variables de daño de flexión. Las leyes de estado se obtienen ahora como sigue

$$\{\Phi^e\} = \{\Phi - \Phi^p\} = \left\{ \frac{\partial U^*}{\partial M} \right\} = [F(D^+, M)]\{\langle M \rangle_+\} + [F(D^-, M)]\{\langle M \rangle_-\}$$

$$\{G^+\} = - \left\{ \frac{\partial U^*}{\partial D^+} \right\} \quad \{G^-\} = - \left\{ \frac{\partial U^*}{\partial D^-} \right\} \quad (14)$$

donde las matrices $[F(D, M)] = [C(D)] + [F^o]$ son las matrices de flexibilidad de un miembro dañado unilateralmente. El término *unilateral* es utilizado en la mecánica de la degradación convencional para referirse a la hipótesis de que el daño debido a acciones de un signo no tiene influencia en el comportamiento del material bajo acciones de signo contrario³⁻⁴. Esta hipótesis debe considerarse como una idealización del comportamiento del material y no como una observación experimental. En el caso

específico del modelo propuesto en este artículo, la hipótesis de unilateralidad significa que el agrietamiento producido por ejemplo por momentos positivos no tiene influencia en el comportamiento bajo momentos negativos debido al cierre de las fisuras por el cambio de signo.

Los términos $\{G^+\}$ y $\{G^-\}$ representan las fuerzas termodinámicas asociadas a las variables de daño de este modelo.

Leyes de evolución

La ley de evolución de las deformaciones plásticas se obtiene, como en el caso del modelo de la sección anterior, a partir de dos funciones de fluencia plásticas f_i y f_j tales que

$$\begin{cases} \dot{\Phi}_i^p = 0 & \text{si } f_i < 0 \text{ o } \dot{f}_i < 0 \\ \dot{\Phi}_i^p \neq 0 & \text{si } f_i = 0 \text{ y } \dot{f}_i = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\Phi}_j^p = 0 & \text{si } f_j < 0 \text{ o } \dot{f}_j < 0 \\ \dot{\Phi}_j^p \neq 0 & \text{si } f_j = 0 \text{ y } \dot{f}_j = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Sin embargo, en este modelo cada función de fluencia plástica tiene dos expresiones, una para las acciones positivas y otra para las acciones negativas, es decir

$$F_i = \text{Sup}(f_i^+, f_i^-) \quad (16)$$

donde

$$\begin{aligned} f^+ &= M_i - X^+(\Phi_i^p, d_i^+ - R^+(\Phi_i^p, d_i^+)) \\ f^- &= -M_i + X^-(\Phi_i^p, d_i^- - R^-(\Phi_i^p, d_i^-)) \end{aligned} \quad (17)$$

Las funciones X^+ y X^- corresponden de nuevo a términos de endurecimiento cinemático cuyas expresiones ahora son

$$X^+ = \alpha^+ \frac{1 - d_i^+}{4 - d_i^+} c^+ \Phi_i^p \quad X^- = \alpha^- \frac{1 - d_i^-}{4 - d_i^-} c^- \Phi_i^p \quad (18)$$

donde α^+ , c^+ , α^- y c^- son parámetros que dependen de las propiedades del miembro.

Las funciones R^+ y R^- corresponden igualmente a términos de endurecimiento isótropo de expresión

$$R_i^+ = \frac{1 - d_i^+}{4 - d_i^+} [(1 - \alpha^+) c^+ p_i + 4M_y^+]; \quad R_i^- = \frac{1 - d_i^-}{4 - d_i^-} [(1 - \alpha^-) c^- p_i + 4M_y^-] \quad (19)$$

donde p_i es la máxima deformación plástica de la rótula i definida como $p_i = \text{Sup}|\Phi_i^p|$. Esta nueva variable cumple una función similar al de la denominada *deformación plástica acumulada* que se introduce en los modelos elastoplásticos con endurecimiento isótropo de la mecánica de los medios continuos.

M_y^+ y M_y^- corresponden de nuevo a parámetros que dependen de las propiedades del miembro.

Considérese el caso particular de solicitaciones sin cambio de signo. Puede observarse, comparando las expresiones (5) y (8a) con (15)-(19), que la ley de evolución de las deformaciones plásticas del modelo de la sección anterior y la propuesta en esta sección coinciden, si los parámetros α toman el valor uno. En caso contrario, el endurecimiento plástico que afecta únicamente al término de endurecimiento cinemático en el modelo de la sección anterior, se reparte ahora entre los términos de endurecimiento isótropo y cinemático en una proporción constante y fijada por las constantes α . Estas constantes deben por lo tanto tomar valores entre cero y uno. En el primer caso extremo ($\alpha = 0$) todo el endurecimiento por deformación plástica corresponde a un endurecimiento isótropo, en el segundo caso extremo ($\alpha = 1$) a un endurecimiento cinemático.

Si la solicitación es monotónica, ambos modelos coinciden cualquiera que sea el valor de las constantes α .

Las leyes de evolución del daño se obtienen como en el caso del modelo de la sección anterior a partir de dos funciones de daño para cada rótula (g_i^+ , g_i^- , g_j^+ , g_j^-). Estas leyes se expresan para la rótula i de la siguiente manera

$$\begin{cases} \dot{d}_i^+ = 0 & \text{si } g_i^+ < 0 \quad \text{o} \quad \dot{g}_i^+ < 0 \\ \dot{d}_i^+ \neq 0 & \text{si } g_i^+ = 0 \quad \text{y} \quad \dot{g}_i^+ = 0 \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \dot{d}_i^- = 0 & \text{si } g_i^- < 0 \quad \text{o} \quad \dot{g}_i^- < 0 \\ \dot{d}_i^- \neq 0 & \text{si } g_i^- = 0 \quad \text{y} \quad \dot{g}_i^- = 0 \end{cases}$$

donde las funciones de daño para la rótula i se describen exactamente como en el modelo de la sección anterior

$$\begin{aligned} g_i^+ &= G_i^+ - \left(G_{cr}^+ + q^+ \frac{1n(1-d_i^+)}{1-d_i^+} \right) \\ g_i^- &= G_i^- - \left(G_{cr}^- + q^- \frac{1n(1-d_i^-)}{1-d_i^-} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Las constantes G_{cr}^+ , G_{cr}^- y q^+ , q^- son otra vez constantes del miembro.

Todos parámetros introducidos en las leyes de evolución de este modelo, con la excepción de α^+ y α^- , pueden ser determinados mediante la resolución de dos sistemas de ecuaciones no-lineales como en el modelo de la sección anterior. En estos sistemas de ecuaciones se introducen como datos del miembro los momentos de agrietamiento, los momentos de fluencia, los momentos últimos de la sección transversal y las rotaciones plásticas últimas. En el caso particular de secciones transversales simétricas todos los coeficientes de superíndice + y - son idénticos. Para secciones asimétricas estas constantes son diferentes y se obtienen al utilizar propiedades de la sección (momentos de agrietamiento, plásticos últimos y rotaciones plásticas últimas) diferentes ante solicitaciones positivas y negativas. Los parámetros α no pueden ser determinados mediante el procedimiento anterior y en principio deberán determinarse experimentalmente.

SIMULACIONES NUMÉRICAS DE ENSAYOS HISTERÉTICOS

En esta sección se presentan las simulaciones numéricas de ensayos descritos en la literatura empleando el modelo descrito en las secciones precedentes. En la Figura 4

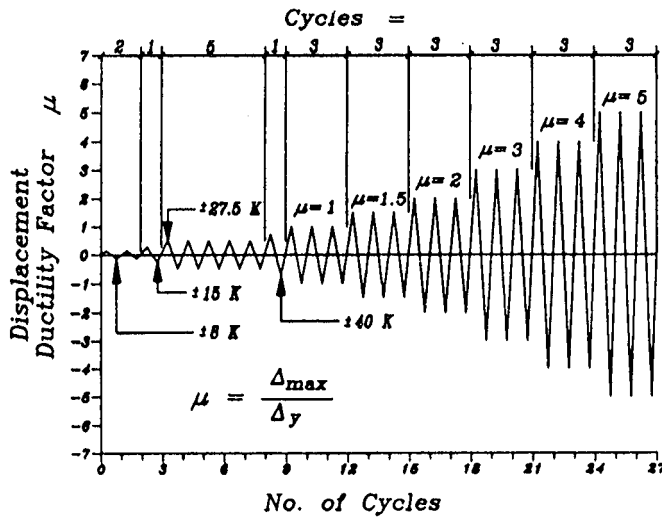


Figura 4. Ensayo de una columna de concreto armado¹¹. Respuesta histerética

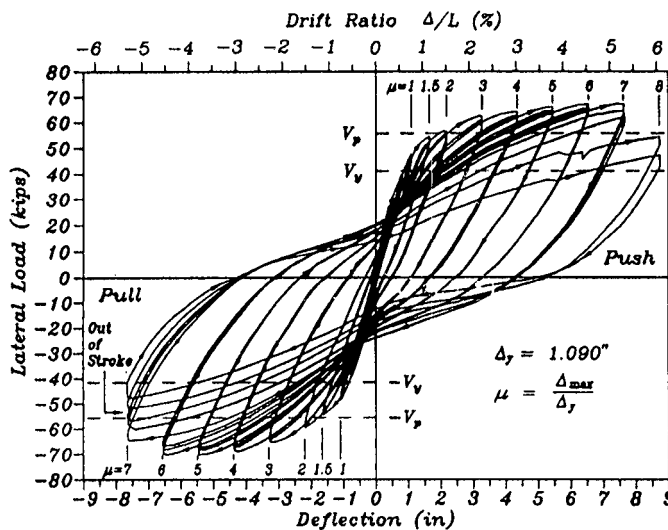


Figura 5. Ensayo de una columna de concreto armado¹¹. Variación de la carga lateral en el tiempo

se muestra la respuesta histerética de una columna de concreto armado de sección circular reforzada con una camisa de acero¹⁵. La columna fue sometida a una carga axial constante de 400 kips y a una carga lateral cuya variación en el tiempo es indicada en la Figura 5. La Figura 6 muestra la simulación numérica de este ensayo usando las siguientes constantes: $EI/L^3 = 18,5$ kips/in, $M_{cr}^+ = M_{cr}^- = 2\,160$ kips/in, $M_p^+ = M_p^- = 5\,940$ kips/in, $M_u^+ = M_u^- = 9\,300$ kips/in, $\Phi_{pu}^+ = \Phi_{pu}^- = 0,03$, $\alpha^+ = \alpha^- = 0,70$. En la Figura 5 se indican algunos puntos significativos de los resultados experimentales. Estos corresponden a los máximos y mínimos e instantes de carga nula de cada ciclo de sollicitación.

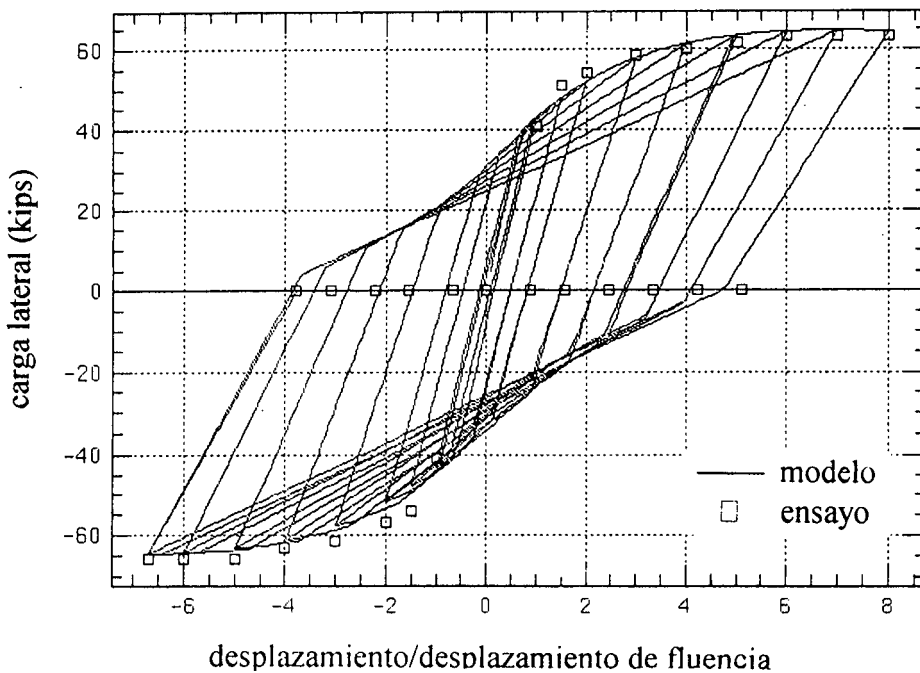


Figura 6. Simulación numérica¹¹

En la Figura 7 se muestra el comportamiento cíclico de una viga con una distribución asimétrica del refuerzo y una sección transversal rectangular¹⁶. En este ensayo no se aplicó fuerza axial, sólo la fuerza lateral cuya variación con respecto al tiempo se indica en la Figura 8. La simulación numérica fue realizada utilizando los siguientes parámetros: $EI/L^3 = 4,2$ KN/m·m, $M_{cr}^+ = 0$, $M_{cr}^- = 0$, $M_u^+ = 138\,000$ KN/m·m, $M_u^- = 92\,000$ KN/m·m, $\Phi_{pu}^+ = 0,048$, $\Phi_{pu}^- = 0,042$, $\alpha^+ = 1$, $\alpha^- = 0,8$ y se muestra en la Figura 9.

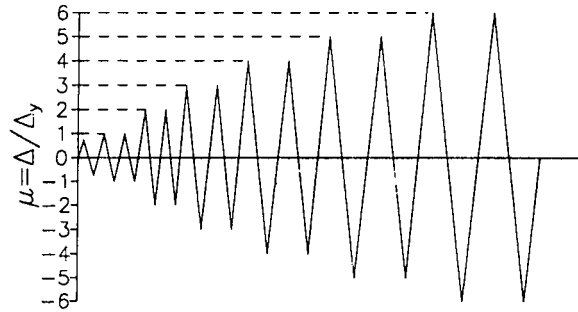


Figura 7. Ensayo de una columna de concreto armado¹². Respuesta histerética

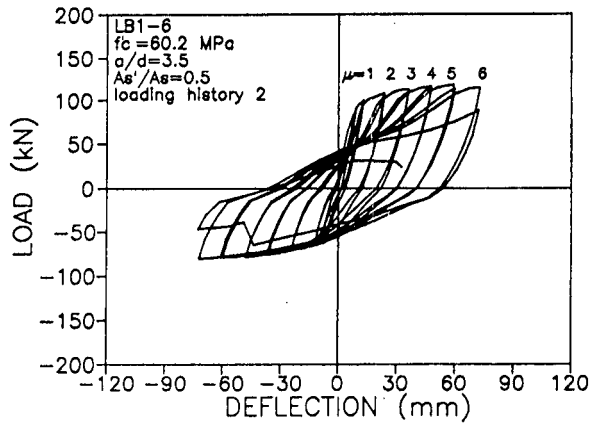


Figura 8. Ensayo de una columna de concreto armado¹². Variación de la carga lateral en el tiempo

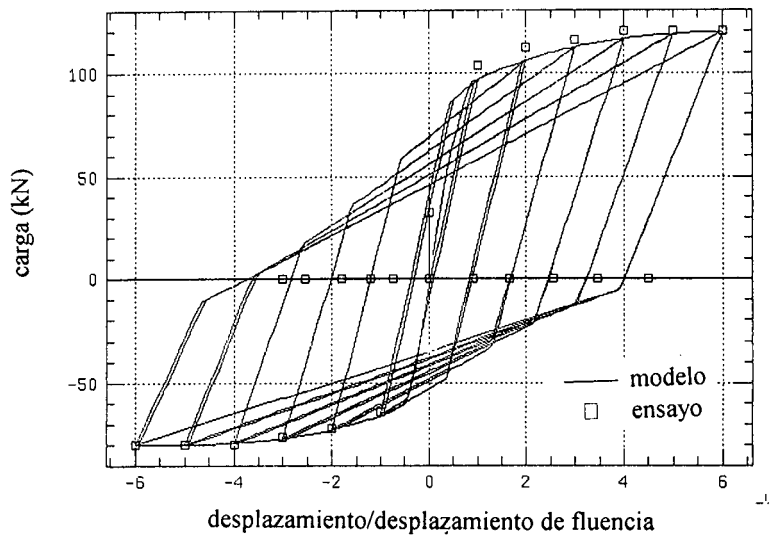


Figura 9. Simulación numérica del ensayo de la Figura 4

CONCLUSIONES

En este artículo se propone un modelo del comportamiento histerético de estructuras de concreto armado, que incorpora los conceptos y los métodos de la mecánica de la degradación y la fractura. Este modelo permite la representación de los siguientes efectos:

- 1) comportamiento unilateral,
- 2) secciones asimétricas con diferentes capacidades ante flexiones positivas y negativas,
- 3) interacción entre la flexión y las fuerzas axiales,
- 4) deformaciones plásticas debidas a la fluencia del refuerzo,
- 5) degradación de rigidez y resistencia debido al agrietamiento del concreto.

Este es un modelo simplificado y en consecuencia no toma en cuenta efectos tales como fatiga oligocíclica o el efecto de estrangulamiento, sin embargo este enfoque permite generalizaciones ulteriores.

REFERENCIAS

1. J. Flórez López, "Modelos de daño concentrado para la simulación numérica del colapso de pórticos planos", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **9**, pp. 123-139, (1993).
2. A. Cipollina y J. Flórez López, "Modelos simplificados de daño en pórticos de concreto armado", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **11**, No. 1, pp. 3-22, (1995).
3. P. Ladeveze, "On a Anisotropic Damage Theory", *Proc. of the CNRS International Colloquium of Failure Criteria of Structural Media*, Villars de Lans, Francia, (1983).
4. J. Mazars, "A Model of Unilateral Elastic Damageable Material and its Application to Concrete", *Proc. of Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete*, F.H. Wittmann (ed.), pp. 61-71, Elsevier, (1986).
5. J. Flórez López, "A Simplified Model of Unilateral Damage for RC Frames", *J. Struc. Div. ASCE*, Vol. **121**, No. 12, (1995).
6. T. Takeda, M.A. Sozen y N.N. Nielsen, "Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes", *J. Struc. Div. ASCE*, Vol. **96**, pp. 2557-2573, (1970).
7. F.C. Filippou, E.P. Popov y V.V. Bertero, "Analytical Studies of Hysteretic Behavior of R/C Joints", *J. Struc. Div. ASCE*, Vol. **112**, pp. 1605-1622, (1986).
8. M.S.L. Roufaiel y C. Meyer, "Analytical Modeling of Hysteretic Behavior of R/C Frames", *J. Struc. Div. ASCE*, Vol. **113**, No. 3, pp. 429-443, (1987).
9. M.L. Wang y S.P. Shan, "Reinforced Concrete Hysteresis Model Based on the Damage Concept", *Earthquake Eng. and Struct. Dyn.*, Vol. **15**, pp. 993-1003, (1987).
10. S.K. Kunnath, A.M. Reinhorn y Y.J. Park, "Analytical Modeling of Inelastic Seismic Response of R/C Structures", *J. Struc. Div. ASCE*, Vol. **116**, No. 4, pp. 996-1017, (1990).
11. A. Cipollina, A. López Inojosa y J. Flórez López, "A Simplified Damage Mechanics Approach to Nonlinear Analysis of Frames", *Computers and Structures*, Vol. **54**, No. 6, pp. 1113-1126, (1995).
12. J. Flórez López, "Calcul Simplifié de Portiques Endommageables", *Revue européenne des éléments finis/European Journal of Finite Elements*, Vol. **2**, No. 1, pp. 47-74, (1993).

13. J. Lemaitre y J.L. Chaboche, "*Mechanics of Solid Materials*", Dunod, Paris, (1988).
14. R. Park y T. Paulay, "*Reinforced Concrete Structures*", John Wiley & Sons, New York, (1975).
15. Y.H. Chai, M.J. Priestley y F. Seible, "Seismic Retrofit of Circular Bridge Columns for Enhanced Flexural Performance", *ACI Struc. J.*, Vol. **88**, No. 5, September–October, (1991).
16. I.K. Fang, C.S. Wang y K.L. Hong, "Cyclic Behavior of High-Strength Concrete Short Beams with Lower Amount of Flexural Reinforcement", *ACI Struc. J.*, Vol. **91**, No. 1, January–February, (1994).