

# ANÁLISE DE PROBLEMAS NÃO-LINEARES DE CONDUÇÃO TÉRMICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

JÓSE PAULO SOARES DE AZEVEDO

*COPPE/UFRJ Programa de Engenharia Civil  
Caixa Postal 68506  
21945-970 Rio de Janeiro, RJ-Brasil*

## SUMÁRIO

Apresenta-se a solução numérica de problemas não lineares de condução térmica em regime permanente através do Método dos Elementos de Contorno com a aplicação da Transformada de Kirchhoff (TK). Esta transformada lineariza a equação diferencial e restringe as não linearidades às condições de contorno e de interface entre sub-regiões. O sistema de equações algébricas correspondente a uma certa discretização do contorno em geral é não linear e neste caso a solução é obtida por um algoritmo de Newton-Raphson tomando-se partido da expressão integral da TK.

## SUMMARY

The numerical solution of nonlinear steady-state heat transfer problems using the Boundary Element Method is presented with the application of Kirchhoff Transform (KT). This transform linearizes the differential equation and restricts the nonlinear terms to the boundary conditions and sub-regions interfaces. The resulting system of algebraic equations corresponding to a given boundary discretization is normally nonlinear and in this case the solution is obtained by a Newton-Raphson algorithm which uses the integral KT equation.

## INTRODUÇÃO

Problemas não lineares de potencial são de interesse em muitos ramos da engenharia. As técnicas aqui apresentadas se aplicam quando as não linearidades se devem à dependência do coeficiente de condutividade térmica com a temperatura e/ou a condições de contorno não lineares (convecção com coeficiente de filme dependente da temperatura e radiação). Problemas com condutividade dependente da temperatura podem geralmente ser resolvidos por um processo iterativo que consiste em primeiro escrever as equações admitindo que as propriedades térmicas são constantes e depois atualizá-las de modo que ao fim do processo a dependência da temperatura seja

Recibido: Enero 1995

satisfeita<sup>4,11</sup>. Outro enfoque remove as não linearidades associadas à dependência da condutividade com a temperatura através da transformada de Kirchhoff (TK) que substitui a equação diferencial não linear por uma equação linear no espaço transformado<sup>2,10</sup>. Neste espaço, condições de contorno de temperatura prescrita e condições de fluxo prescrito permanecem lineares, enquanto que condições de contorno convectivas tornam-se não lineares. O presente trabalho utiliza o Método dos Elementos de Contorno (MEC) juntamente com o segundo enfoque. A TK lineariza a equação que governa o problema e permite que apliquemos o MEC; este transforma a equação diferencial e condições de contorno em uma equação integral de contorno, que após a discretização em elementos fornece um sistema de equações algébricas envolvendo as incógnitas nodais<sup>6</sup>. Em presença de condições não lineares de contorno e de interface no espaço transformado, o sistema de equações algébricas é também não linear. O primeiro autor a considerar problemas não lineares de potencial com o MEC foi Banerjee<sup>5</sup> em 1979 que resolveu o problema com condutividade variável por um enfoque iterativo do primeiro tipo. Este enfoque, por forçar a discretização do domínio, foi superado pelo uso da TK. Um histórico dos desenvolvimentos posteriores pode ser visto em<sup>2</sup>. Neste mesmo trabalho apresenta-se o método de Newton-Raphson que toma partido da expressão integral da TK fornecendo expressões análogas às obtidas no caso de condutividade constante<sup>1,2,3,12</sup>. Em regiões compostas de mais de uma região homogênea a técnica de sub-regiões pode ser aplicada diretamente se as condutividades das sub-regiões independerem da temperatura; condições de contorno não lineares são tratadas como no caso de um único material. Quando a condutividade de alguma sub-região varia com a temperatura, a TK remove a não linearidade da sub-região mas introduz não-linearidades nas condições de interface das sub-regiões que possuem  $K$  variável com a temperatura. As não linearidades, que no espaço transformado se reduzem às condições de contorno e de interface, são consideradas na solução do sistema de equações não lineares correspondente por um esquema de Newton-Raphson<sup>2,3</sup>.

## FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A equação que rege a condução de calor em uma região  $\Omega$  limitada por uma superfície  $\Gamma$ , sem fontes internas de calor, pode ser escrita em coordenadas cartesianas como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (1)$$

onde  $u$  é a temperatura e  $K$  a condutividade térmica do meio. As condições de contorno podem ser dos seguintes tipos

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2)$$

$$q = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_q \quad (3)$$

$$q = h(u - u_c) \quad \text{em } \Gamma_c \quad (4)$$

$$q = \sigma \varepsilon (u^4 - u_r^4) \quad \text{em } \Gamma_r \quad (5)$$

O contorno  $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q + \Gamma_c + \Gamma_r$  é composto de:  $\Gamma_u$  onde a temperatura é prescrita,  $\Gamma_q$  onde o fluxo é prescrito,  $\Gamma_c$  onde há convecção e  $\Gamma_r$  onde ocorre radiação;  $q = -K\partial u/\partial n$ ,  $n$  é a direção normal ao contorno dirigida para fora do domínio,  $h$  o coeficiente de filme,  $u_c$  a temperatura do fluido em contato com  $\Gamma_c$ ,  $\sigma$  a constante de Stefan-Boltzmann ( $5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ ) e  $\varepsilon$  a emissividade do trecho do contorno que troca calor por radiação com uma superfície a uma temperatura  $u_r$ . Das condições de contorno mencionadas, a de convecção é não linear quando  $h = h(u)$  e a de radiação é sempre não linear. Quando  $K$  não varia com a temperatura, a equação (1) se reduz à equação de Laplace  $\nabla^2 u = 0$ . Quando  $K = K(u)$ , pode-se expandir a equação (1) como

$$K\nabla^2 u = -\frac{dK}{du} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] \tag{6}$$

onde os termos não lineares aparecem no lado direito da equação. Esta forma permite considerar o lado direito da equação (6) como uma fonte não linear<sup>9</sup>. Este enfoque não foi o adotado pois implica em uma discretização do domínio e o sistema de equações é não linear para qualquer tipo de condição de contorno. Uma formulação mais elegante e eficiente pode ser obtida com o uso da transformada de Kirchhoff<sup>7</sup> que lineariza a equação (1)

$$U = T(u) = \int_{u_0}^u K(\mu)d\mu \tag{7}$$

onde  $u_0$  é um valor de referência arbitário, aqui escolhido como zero. Aplicando a equação (7) em (1) obtém-se a equação de Laplace em  $U$

$$\nabla^2 U = 0 \tag{8}$$

Derivadas de  $U$  com relação às coordenadas cartesianas são dadas por

$$\frac{\partial U}{\partial x} = K(u)\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = K(u)\frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = K(u)\frac{\partial u}{\partial z} \tag{9}$$

As condições de contorno no espaço transformado ficam então

$$U = T(\bar{u}) = \bar{U} \quad \text{em } \Gamma_u \tag{10}$$

$$V = -\bar{q} \quad \text{em } \Gamma_q \tag{11}$$

$$V = -h(u - u_c) \quad \text{em } \Gamma_c \tag{12}$$

$$V = -\sigma\varepsilon(u^4 - u_r^4) \quad \text{em } \Gamma_r \tag{13}$$

onde  $V = \partial u/\partial n = K(u)\frac{\partial u}{\partial n} = K(u)v$ .

Pela lei de Fourier temos que  $V = -q$ . As curvas da condutividade em função da temperatura foram aproximadas por poligonais. Isto confere uma generalidade na representação das curvas de condutividade e nos permite aplicar diretamente as expressões da transformada de Kirchhoff obtidas para o caso linear a cada trecho da

poligonal. O grau de aproximação da curva depende apenas do número de segmentos utilizados. A condutividade  $K(u)$  para valores de  $u$  correspondentes a um segmento genérico  $i$  é dada pela equação de uma reta como mostrado na Figura 1

$$K(u) = K_i + a_i(u - u_i) \quad (14)$$

A expressão da transformada de Kirchhoff é obtida substituindo a expressão de  $K$  na definição (7)

$$U = \int_0^u (a_i \mu + b_i) d\mu = \frac{a_i}{2} u^2 + b_i u \quad (15)$$

A transformada pode ser interpretada geometricamente como a área sob a curva  $K \times u$ ; a temperatura de referência, tomada como nula, é arbitrária e corresponde a um potencial constante somado a todos os pontos da região e do contorno do problema transformado. Uma vez fixada a temperatura de referência fica estabelecida uma relação de um para um entre temperaturas e suas transformadas de Kirchhoff, que nos permite resolver a equação diferencial linear no espaço transformado e retornar ao espaço original após a solução. A transformada  $U$  correspondente a uma temperatura  $u$  no trecho  $i$  é obtida somando-se ao valor da transformada no ponto  $i$  a área hachurada na Figura 1

$$U = U_i + \frac{K_i + K}{2} (u - u_i) \quad (16)$$

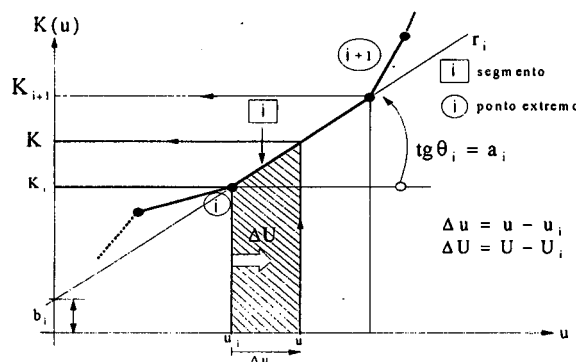


Figura 1. Representação Poligonal da Curva  $K(u)$

No cálculo da transformada inversa temos  $U$  e calculamos  $u$  por um algoritmo de localização do trecho da poligonal<sup>2</sup>. Substituindo a condutividade dada em (14) na expressão da transformada de Kirchhoff correspondente ao trecho  $i$ , equação (16), obtemos a inversa

$$u = T^{-1}(U) = u_i - \frac{K_i + \sqrt{K_i^2 + 2a_i \Delta U}}{a_i} \quad (17)$$

A seguir, apresentamos a formulação de elementos de contorno para a equação de Laplace em  $U$ . Nos problemas não lineares aqui examinados, os coeficientes de influência não precisam ser recalculadas ao longo do processo iterativo pois dependem apenas da solução fundamental e das funções que interpolam a geometria,  $U$  e sua derivada normal ao contorno  $V$ . O fato de não recalculá-los representa uma considerável economia de tempo de processamento gasto com integrações numéricas. Esta característica é explorada computacionalmente no algoritmo de Newton-Raphson armazenando-se em memória auxiliar o sistema linear e os coeficientes de influência correspondentes aos elementos com não-linearidades; a cada iteração traz-se para a memória principal o sistema linear que é alterado em função da iteração anterior, sem que haja necessidade de recalculá-los os coeficientes de influência.

### MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NO ESPAÇO TRANSFORMADO

A equação de Laplace pode ser substituída pela seguinte equação integral de contorno<sup>2,6</sup>

$$c_i U_i + \int_{\Gamma} v^* U d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* V d\Gamma \quad (18)$$

na qual  $u^*$  é a solução fundamental da equação de Laplace,  $v^* = \partial u^* / \partial n$  e o coeficiente  $c_i$  é a razão entre o ângulo sólido no ponto  $i$  e o ângulo sólido de um ponto interno. A solução aproximada é obtida subdividindo-se o contorno em elementos que aproximam sua geometria e sobre os quais as funções  $U$  e  $V$  podem variar de acordo com as funções de interpolação associadas a valores nodais. A equação (18) pode ser escrita em forma discreta como<sup>2</sup>

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} U_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} V_j \quad (19)$$

onde  $H_{ij}$  e  $G_{ij}$  são obtidos integrando-se  $v^*$  e  $u^*$ , respectivamente, ao longo dos elementos de contorno e  $N$  é o número de nós do contorno. A aplicação da equação (19) a todos nós do contorno fornece um sistema de equações que pode ser escrito em forma matricial como

$$\mathbf{HU} = \mathbf{GV} \quad (20)$$

Podemos definir uma função de resíduos  $\Psi$ , que mede o afastamento da solução aproximada da solução exata  $X$  ( $X_j = V_j$  quando a temperatura é prescrita no nó  $j$ , caso contrário  $X_j = U_j$ )

$$\psi(\mathbf{X}) = \mathbf{HU} - \mathbf{GV} \quad (21)$$

As curvas de condutividade, suas aproximações polinomiais e as curvas de K3/K2, K3/K1, U3/U2 e U2/U1 nas interfaces podem ser vistas em<sup>2</sup>. Neste exemplo, todas as resistências de contato nas interfaces são desprezíveis. Na superfície interna do cilindro a temperatura é mantida a  $2000^{\circ}\text{C}$  e a superfície externa é mantida a  $0^{\circ}\text{C}$ . A primeira iteração partiu de uma estimativa das temperaturas nas interfaces de  $u = 1000^{\circ}\text{C}$  em  $r = 10$  mm e  $u = 500^{\circ}\text{C}$  em  $r = 13$  mm. Os resultados numéricos para a distribuição radial de temperaturas são mostrados na Tabela I juntamente com a solução analítica. A convergência foi obtida em 3 iterações com um erro relativo médio de  $6 \times 10^{-6}$ .

1ª Sub-Região			2ª Sub-Região			3ª Sub-Região		
r	u( $^{\circ}\text{C}$ )		r	u( $^{\circ}\text{C}$ )		r	u( $^{\circ}\text{C}$ )	
(mm)	Anal.	MEC	(mm)	Anal.	MEC	(mm)	Anal.	MEC
5,0	2000	2000	10,0	711	711	13,0	105	105
5,25	1920	1921	10,25	667	668	13,25	93	93
5,5	1841		10,5	622		13,5	81	
5,75	1764	1765	10,75	577	578	13,75	68	68
6,0	1689		11,0	532		14,0	55	
6,25	1615	1616	11,25	485	485	14,25	42	42
6,5	1542		11,5	437		14,5	28	
6,75	1472	1472	11,75	388	388	14,75	14	14
7,0	1402		12,0	338		15,0	0	0
7,25	1335	1335	12,25	285	284			
7,5	1268		12,5	229				
7,75	1204	1204	12,75	170	168			
8,0	1142		13,0	105	105			
8,25	1081	1081						
8,5	1023							
8,75	966	967						
9,0	911							
9,25	858	857						
9,5	807							
9,75	758	757						
10,0	711	711						

Tabela I. Distribuição Radial de Temperaturas no Cilindro Composto

## CONCLUSÕES

A solução de elementos de contorno apresenta uma alta precisão e no exemplo apresentado praticamente coincide com a solução exata obtida por um modelo analítico uni-dimensional<sup>2</sup>. As semelhanças entre a metodologia de cálculo da solução analítica e da solução do M.E.C. são marcantes. Em ambos esquemas, um sistema de equações algébricas não lineares é resolvido para os valores da transformada nas interfaces e

contorno externo; o ajuste para o ciclo de iteração seguinte é feito graças à igualdade de temperaturas (inversa da transformada de Kirchhoff) nas interfaces. Uma vez obtida a convergência,  $U$  e  $V$  são obtidos em pontos internos; valores de temperatura e fluxo tanto no contorno como em pontos internos são obtidos pela transformada inversa. A aproximação de curvas  $K(u)$  por poligonais permite o cálculo da TK e da sua inversa de uma forma simples; uma melhor representação das curvas é sempre possível, bastando aumentar o número de trechos sem que isto afete a eficiência computacional do modelo. O algoritmo de Newton-Raphson apresentado permite um tratamento unificado de todas as não linearidades estudadas, tendo convergido em poucas iterações para problemas com condutividade térmica dependente da temperatura, condições de contorno não lineares e descontinuidades na interface no espaço transformado.

### REFERÊNCIAS

1. J.P.S. Azevedo e L.C. Wrobel, "Transferência de Calor com Não Linearidades Usando o Método dos Elementos de Contorno", *Anais do 3º SIBRAT*, Vol. 2, pp. 683-700, Salvador, (1984).
2. J.P.S. Azevedo, "Análise de Problemas Não Lineares de Transferência de Calor pelo Método dos Elementos de Contorno", *Tese de M.Sc.*, pp. 249, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, (1985).
3. J.P.S. Azevedo e L.C. Wrobel, "Non-Linear Heat Conduction in Composite Bodies: A Boundary Element Formulation", *Int. Jnl. of Num. Meth. in Eng.*, Vol. 26, pp. 19-38, (1988).
4. K.J. Bathe e M.R. Khoshgoftaar, "Finite Element Formulation and Solution of Nonlinear Heat Transfer", *Nucl. Eng. Design*, Vol. 51, pp. 389, (1979).
5. R. Bialecki e A.J. Nowak, "Boundary Value Problems in Heat Conduction with Nonlinear Material and Nonlinear Boundary Conditions", *Applied Math. Modelling*, Vol. 5, 6, pp. 417-421, (1981).
6. C.A. Brebbia, J.C.F. Telles e L.C. Wrobel, "*Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*", Springer-Verlag, Berlin, (1984).
7. H.S. Carslaw e J.C. Jaeger, "*Conduction of Heat in Solids*", 2nd edn., Clarendon Press, Oxford, (1959).
8. J. Donea e S. Giuliani, "Finite Element Analysis of Steady-State Nonlinear Heat Transfer Problems", *Nuclear Engng. Design*, Vol. 30, 2, pp. 205-213, (1974).
9. K. Onishi e T. Kuroki, "Boundary Element Method in Singular and Nonlinear Heat Transfer", *Proc. Fourth Int. Seminar on Boundary Element Methods in Engng.*, pp. 141-155, Springer Verlag, Berlin, (1982).
10. E.M. Sparrow e R.N. Koopman, "Heat Transfer in Reactor Componentes Having Temperature Dependent Thermal Conductivity", *Nuclear Sci. Eng.*, Vol. 42, pp. 406, (1970).
11. E.L. Wilson, K.J. Bathe e F.E. Peterson, "Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Heat Transfer", *Nuclear Eng. Design*, Vol. 29, pp. 110, (1974).
12. L.C. Wrobel e J.P.S. Azevedo, "A Boundary Element Analysis of Non-Linear Heat Conduction", *Proc. of the Fourth Int. Conf. on Numerical Methods in Thermal Problems*, Swansea, (1985).