

ALTERNATIVAS PARA A MEDIDA DO ERRO NA REPRESENTAÇÃO DO CARREGAMENTO NO MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO DE VETORES DE LANCZOS

JOSÉ ANTÔNIO O. DO NASCIMENTO *

e

ADEMAR GILBERTO GROEHS **

** Departamento de Estruturas
Universidade Estadual de Londrina
Caixa Postal 6001, CEP 86051-970
Londrina-PR, Brasil*

*** Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS
Caixa Postal 303, CEP 90001-970
Porto Alegre - RS, Brasil*

SUMÁRIO

O desenvolvimento de um método de redução de coordenadas, que utiliza uma base constituída por vetores de Lanczos gerados a partir da distribuição espacial do carregamento, suposta fixa, é apresentado. O erro relativo na representação do carregamento, quando se utiliza a base reduzida, como um critério de interrupção na geração dos vetores da base, é abordado, mostrando-se que a proposta de Wilson, Yuan e Dickens não é apropriada. Propõe-se, então, duas alternativas para a medida do referido erro relativo, ambas baseadas em normas não-Euclidianas. Mostra-se que a primeira, por envolver a solução de um sistema de equações cuja matriz é a matriz de massa do modelo estrutural, implica em custos computacionais adicionais altos, caso seja utilizada a formulação de matriz de massa consistente. Já a segunda alternativa leva a uma medida para o erro relativo facilmente calculável, pois envolve, apenas, produtos internos entre vetores. Exemplos numéricos são apresentados e sugere-se a utilização da segunda alternativa.

SUMMARY

A coordinate reduction method is described, using a basis formed by Lanczos vectors generated from the spatial distribution of the loading, assumed fixed. The relative error in the load representation, using the reduced basis, is treated as a stopping criterium in the generation of the vector basis, showing that the proposal of Wilson, Yuan and Dickens is not

Recibido: Enero 1995

appropriate. Two alternative measure of the mentioned relative error are proposed, both based on non-Euclidian norms. It is shown that the first, which includes the solution of a system of equations with the structural mass matrix, incurs in high additional computational costs, if a consistent mass matrix is used. For the second alternative an error measure can be easily computed, involving only vector dot products. Numerical examples are presented and the second alternative is recommended.

INTRODUÇÃO

Na análise dinâmica linear de estruturas, através de um método de discretização espacial como o MEF-Método dos Elementos Finitos, a técnica de redução de coordenadas tem sido intensamente utilizada. Classicamente usa-se uma base de redução de coordenadas constituída por um conjunto de autovetores do problema de autovalor associado às vibrações livres da estrutura. Essa base, denominada base modal (incompleta), não leva em consideração as características específicas do carregamento atuante.

Para uma classe de problemas onde o carregamento tem uma distribuição espacial fixa, Wilson *et al.*⁹ propuseram que os vetores da base fossem gerados a partir da distribuição espacial do carregamento, através de um algoritmo específico, que foi mostrado, depois, ser o Algoritmo de Lanczos⁷. Vários trabalhos mostraram a efetividade da utilização da base assim gerada, entre eles Arnold *et al.*¹ e Coutinho *et al.*².

Uma das questões relevantes, relacionadas ao uso de técnicas de redução, é o número de vetores que devem constituir a base, de forma que o esforço computacional seja reduzido e que se obtenha uma resposta dinâmica precisa. Assim, vários critérios *a priori* foram estabelecidos na literatura, para estimar o número de vetores na base. Um dos primeiros, e amplamente utilizado até hoje, foi proposto por Wilson *et al.*⁹, e utiliza uma medida para o erro relativo na representação do carregamento.

O presente trabalho mostra que a medida do erro relativo proposta por Wilson *et al.*⁹ não está definida apropriadamente, podendo fornecer resultados inadequados. O propósito deste trabalho é buscar uma nova medida do erro na representação do carregamento que possa ser utilizada no estabelecimento de um critério de interrupção na geração dos vetores da base.

REDUÇÃO DE COORDENADAS

Para um sistema estrutural discretizado através do MEF, as equações diferenciais lineares de equilíbrio dinâmico podem ser escritas

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t)$ é o vetor de forças nodais externas atuantes e $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(t)$ e $\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{u}}(t)$ são os vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações nodais, respectivamente. As matrizes são de ordem n e os vetores são n -dimensionais, onde n é o número de graus de

liberdade do modelo estrutural. Admite-se, neste trabalho, que o amortecimento é de Rayleigh, isto é, que a matriz de amortecimento possa ser obtida por uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez ($\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K}$, onde a_0 e a_1 são constantes).

Dependendo da complexidade da estrutura e do nível de detalhe desejado na descrição da resposta dinâmica, o modelo estrutural pode ter uma quantidade muito grande de graus de liberdade. A menos que o carregamento seja de curta duração, é comum aplicar-se um método de redução de coordenadas, que consiste em transformar o sistema original (1) num sistema de equações de tamanho bastante menor.

O Método de Rayleigh-Ritz tem sido amplamente utilizado para reduzir a dimensão das equações de movimento. O passo essencial no método é a escolha de um conjunto de m vetores linearmente independentes $\mathbf{Q}_m = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m]$, denominados vetores *teste*, para descrever, aproximadamente, a resposta dinâmica. Ou seja, busca-se uma solução aproximada $\mathbf{u}_m = \mathbf{u}_m(t)$ que esteja contida no subespaço gerado pelos vetores \mathbf{q}_j , $1 \leq j \leq m$

$$\mathbf{u}_m(t) = \sum_{j=1}^m \mathbf{q}_j v_j(t) = \mathbf{Q}_m \mathbf{v}_m(t) \quad (2)$$

onde $v_j(t)$, $1 \leq j \leq m$, são as coordenadas generalizadas.

Sem perda de generalidade pode-se assumir que o conjunto de vetores \mathbf{Q}_m é um conjunto \mathbf{M} -ortonormal, ou seja,

$$\mathbf{Q}_m^T \mathbf{M} \mathbf{Q}_m = \mathbf{I}_m \quad (3)$$

onde \mathbf{I}_m é a matriz de identidade de ordem m . Uma forma equivalente de definir um conjunto \mathbf{M} -ortonormal é a partir da definição de produto interno \mathbf{M} -ponderado entre os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} , também denominado produto interno *inerçial*.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_M = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y} \quad (4)$$

Assim, o conjunto de vetores \mathbf{q}_j , $1 \leq j \leq m$, é \mathbf{M} -ortonormal se

$$\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \rangle_M = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Cabe observar aqui que, da definição de produto interno \mathbf{M} -ponderado, dada por (4), decorre a definição de norma- \mathbf{M} , ou norma *inerçial*

$$\|\mathbf{x}\|_M = (\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_M)^{1/2} = (\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x})^{1/2} \quad (6)$$

A aplicação do Método de Rayleigh-Ritz às equações (1) leva ao seguinte sistema reduzido (ordem m) de equações diferenciais

$$\bar{\mathbf{M}}_m \ddot{\mathbf{v}}_m(t) + \bar{\mathbf{C}}_m \dot{\mathbf{v}}_m(t) + \bar{\mathbf{K}}_m \mathbf{v}_m(t) = \bar{\mathbf{f}}_m(t) \quad (7)$$

no qual $\bar{\mathbf{M}}_m$, $\bar{\mathbf{C}}_m$, $\bar{\mathbf{K}}_m$ são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez nas coordenadas generalizadas, dadas por

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}_m &= \mathbf{Q}_m^T \mathbf{M} \mathbf{Q}_m = \mathbf{I}_m \\ \bar{\mathbf{C}}_m &= \mathbf{Q}_m^T \mathbf{C} \mathbf{Q}_m (= a_0 \mathbf{I}_m + a_1 \bar{\mathbf{K}}_m) \\ \bar{\mathbf{K}}_m &= \mathbf{Q}_m^T \mathbf{K} \mathbf{Q}_m\end{aligned}\tag{8}$$

e $\bar{\mathbf{f}}_m$ é o vetor de forças generalizadas dado por

$$\bar{\mathbf{f}}_m(t) = \mathbf{Q}_m^T \mathbf{f}(t)\tag{9}$$

O vetor de deslocamentos generalizados $\mathbf{v}_m(t)$ é obtido resolvendo-se o sistema reduzido de equações diferenciais (7). O vetor de deslocamentos $\mathbf{u}_m(t)$ é, então, calculado por intermédio da *redução* de coordenadas (2).

O uso de técnicas de redução na análise de modelos estruturais com número elevado de graus de liberdade é altamente atrativa quando os vetores \mathbf{Q}_m selecionados são capazes de fornecer, com $m \ll n$, uma resposta dinâmica precisa, pois, nesse caso, as equações de movimento reduzidas (7) tem um número de incógnitas muitíssimo menor que o sistema de equações (1).

Classicamente \mathbf{Q}_m tem sido composto com os m primeiros autovetores do problema de autovalor correspondente às vibrações livres da estrutura

$$\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi\tag{10}$$

e essa escolha corresponde ao Método da Superposição Modal, com a base truncada em m vetores. Nesse caso, o sistema reduzido de equações (7) torna-se desacoplado, em face das propriedades de \mathbf{K} e \mathbf{M} -ortogonalidade dos modos de vibração.

VETORES DE LANCZOS

Para a classe de problemas nos quais o carregamento tem uma distribuição espacial fixa, ou seja, que pode ser escrito na forma

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 g(t)\tag{11}$$

onde \mathbf{f}_0 é a distribuição espacial do carregamento (invariável no tempo) e $g(t)$ é uma função escalar que descreve a variação do carregamento ao longo do tempo, Wilson *et al.*⁹ propuseram gerar a base de vetores \mathbf{Q}_m a partir de \mathbf{f}_0 , utilizando como primeiro vetor (\mathbf{q}_1) a resposta estática (normalizada em relação à matriz de massa) ao *vetor de cargas* \mathbf{f}_0 . Os vetores da base, do segundo em diante, são gerados a partir do vetor imediatamente anterior, através de um esquema tipo iteração inversa e \mathbf{M} -ortonormalizados, por um processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, em relação aos vetores anteriores já gerados.

Nour-Omid e Clough⁷ mostraram que o algoritmo proposto por Wilson *et al.*⁹ reduz-se, em aritmética exata, ao Algoritmo de Lanczos (Quadro 1).

| | |
|--------------------------------|--|
| | $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ |
| | $\mathbf{r}_0 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}_0$ |
| | $\beta_1 = (\mathbf{r}_0^T \mathbf{M} \mathbf{r}_0)^{1/2}$ |
| | $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\beta_1} \mathbf{r}_0$ |
| Para $j = 1, 2, 3, \dots, m :$ | $\bar{\mathbf{r}}_j = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{q}_j$ |
| | $\alpha_j = \mathbf{q}_j^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{r}}_j$ |
| | $\mathbf{r}_j = \bar{\mathbf{r}}_j - \beta_j \mathbf{q}_{j-1} - \alpha_j \mathbf{q}_j$ |
| | $\beta_{j+1} = (\mathbf{r}_j^T \mathbf{M} \mathbf{r}_j)^{1/2}$ |
| | $\mathbf{q}_{j+1} = \frac{1}{\beta_{j+1}} \mathbf{r}_j$ |

Quadro 1 - Algoritmo de Lanczos

Assim, o esforço computacional para gerar os vetores \mathbf{q}_j , $1 \leq j \leq m$, fica reduzido, visto que simplifica-se o processo de ortogonalização de cada vetor, bastando que ele seja ortogonalizado em relação aos dois vetores anteriores da seqüência. É importante salientar, no entanto, que em aplicações computacionais, ou seja, quando se utiliza aritmética de precisão finita, é necessário tomar algumas precauções com o conhecido fenômeno da perda de ortogonalidade entre os vetores de Lanczos, complementando o referido algoritmo com alguma técnica de reortogonalização^{6,7,8}.

Um passo do algoritmo de Lanczos pode, também, ser escrito como

$$\beta_{j+1} \mathbf{q}_{j+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{q}_j - \beta_j \mathbf{q}_{j-1} - \alpha_j \mathbf{q}_j \tag{12}$$

e essas igualdades podem ser condensadas em forma matricial como

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_m = \mathbf{Q}_m \mathbf{T}_m + \beta_{m+1} \mathbf{q}_{m+1} \mathbf{e}_m^{(m)T} \tag{13}$$

onde $\mathbf{e}_m^{(m)}$ é a m -ésima coluna da matriz identidade \mathbf{I}_m de ordem m , e \mathbf{T}_m é uma matriz tridiagonal de ordem m , cujos elementos são

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \beta_{m-1} & \alpha_{m-1} & \beta_m \\ & & & & & \beta_m & \alpha_m \end{bmatrix} \tag{14}$$

Se a expressão (13) é pré-multiplicada por $\mathbf{Q}_m^T \mathbf{M}$ obtém-se, em decorrência da propriedade de \mathbf{M} -ortonormalidade dos vetores de Lanczos, a seguinte propriedade:

$$\mathbf{Q}_m^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_m = \mathbf{T}_m \quad (15)$$

O VETOR ERRO NA REPRESENTAÇÃO DO CARREGAMENTO

O vetor erro na representação do carregamento, decorrente da utilização de uma base reduzida \mathbf{Q}_m , pode ser definido como segue. A igualdade (9), que fornece o vetor reduzido de forças $\bar{\mathbf{f}}_m(t)$, pode ser escrita, tendo em vista a igualdade (3)

$$\mathbf{Q}_m^T \mathbf{M} \mathbf{Q}_m \bar{\mathbf{f}}_m(t) = \mathbf{Q}_m^T \mathbf{f}(t) \quad (16)$$

Se a base fosse constituída por n vetores (ou seja $m = n$), \mathbf{Q}_m seria uma matriz quadrada de ordem n , regular (não-singular), e a igualdade (16) implicaria em

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{M} \mathbf{Q}_m \bar{\mathbf{f}}_m(t) \quad (17)$$

Para $m < n$, o vetor $\mathbf{M} \mathbf{Q}_m \bar{\mathbf{f}}_m(t)$ é uma apenas uma aproximação para o vetor $\mathbf{f}(t)$ e o vetor diferença entre eles é denominado erro na representação do carregamento:

$$\delta \mathbf{f}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{M} \mathbf{Q}_m \bar{\mathbf{f}}_m(t) \quad (18)$$

Se a igualdade (9) é substituída na expressão (18) esta torna-se

$$\delta \mathbf{f}^{(m)}(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_m^T) \mathbf{f}(t) \quad (19)$$

Para um carregamento $\mathbf{f}(t)$ que tem uma distribuição espacial fixa (11) pode-se escrever

$$\delta \mathbf{f}^{(m)}(t) = \delta \mathbf{f}_0^{(m)} g(t) \quad (20)$$

onde

$$\delta \mathbf{f}_0^{(m)} = (\mathbf{I} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_m^T) \mathbf{f}_0 \quad (21)$$

A MEDIDA DE ERRO PROPOSTA POR WILSON, YUAN E DICKENS

Com o intuito de estabelecer um critério de interrupção na geração dos vetores \mathbf{q}_j , $1 \leq j \leq m$, Wilson *et al.*⁹ propuseram uma medida para o erro na representação do carregamento (21), dada por

$$\epsilon_{0,W}^{(m)} = \frac{\langle \mathbf{f}_0, \delta \mathbf{f}_0^{(m)} \rangle}{\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0 \rangle} = \frac{\mathbf{f}_0^T \delta \mathbf{f}_0^{(m)}}{\mathbf{f}_0^T \mathbf{f}_0} \quad (22)$$

que, segundo os autores, varia de 1 (quando $m = 0$) até 0 (quando $m = n$).

Embora tenha havido uma ampla utilização da medida do erro proposta por Wilson *et al.*⁹ até a presente data^{1,2,10} é fácil mostrar que essa medida pode fornecer resultados totalmente inadequados. Através da observação da igualdade (22) vê-se que, se os vetores $\delta\mathbf{f}_0^{(m)}$ e \mathbf{f}_0 forem ortogonais, a medida resultante é zero, indicando, equivocadamente, que não há erro na representação do carregamento. Na verdade, a igualdade (22) deve ser interpretada mais como um teste de ortogonalidade entre os vetores $\delta\mathbf{f}_0^{(m)}$ e \mathbf{f}_0 do que uma medida do erro relativo³. Para identificar o que essa fórmula realmente mede, deve-se observar a expressão que fornece o cosseno do ângulo entre os vetores $\delta\mathbf{f}_0^{(m)}$ e \mathbf{f}_0 :

$$\cos(\delta\mathbf{f}_0^{(m)}, \mathbf{f}_0) = \frac{\mathbf{f}_0^T \delta\mathbf{f}_0^{(m)}}{\|\mathbf{f}_0\|_2 \|\delta\mathbf{f}_0^{(m)}\|_2} \tag{23}$$

onde $\|\cdot\|_2$ indica norma Euclidiana. É fácil mostrar que a medida do erro dada por (22), em virtude da igualdade acima, pode ser expressa como

$$\epsilon_{0,W}^{(m)} = \epsilon_{0,*}^{(m)} \times \cos(\delta\mathbf{f}_0^{(m)}, \mathbf{f}_0) \tag{24}$$

onde

$$\epsilon_{0,*}^{(m)} = \frac{\|\delta\mathbf{f}_0^{(m)}\|_2}{\|\mathbf{f}_0\|_2} \tag{25}$$

Demonstra-se, dessa forma, que a medida do erro proposta por Wilson *et al.*⁹ é o produto de uma medida que poderia ser considerada apropriada para o erro, dada por (25), multiplicada pelo cosseno do ângulo entre os vetores $\delta\mathbf{f}_0^{(m)}$ e \mathbf{f}_0 .

PRIMEIRA PROPOSTA PARA A MEDIDA DO ERRO

Uma alternativa seria adotar, então, a medida do erro dada pela expressão (25). No entanto, em problemas onde co-existem graus de liberdade *translacionais* e *rotacionais*, os vetores força tem componentes com diferentes unidades e a utilização da norma Euclidiana apresentaria a inconsistência de adicionar-se quantidades que não são dimensionalmente equivalentes. Cabe observar, aqui, que a medida do erro (22) apresenta, também, tal inconsistência, sendo esse um argumento adicional para ser descartada. Léger e Wilson⁵ e Jacob e Ebecken³ propuseram utilizar a expressão (25) para cada uma das direções geométricas existentes no problema, procedimento que contorna a citada dificuldade.

Com o intuito de buscar uma proposta alternativa, que solucione diferentemente a questão acima exposta, observa-se, através da igualdade (17), que o vetor força é uma combinação linear dos vetores $\mathbf{M}\mathbf{q}_j$. Em seguida verifica-se que os vetores $\mathbf{M}\mathbf{q}_j$ são \mathbf{M}^{-1} -ortonormais, pois

$$\langle \mathbf{M}\mathbf{q}_i, \mathbf{M}\mathbf{q}_j \rangle_{\mathbf{M}^{-1}} = (\mathbf{M}\mathbf{q}_i)^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{M}\mathbf{q}_j) = \mathbf{q}_i^T \mathbf{M}\mathbf{q}_j = \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \rangle_M = \delta_{ij} \tag{26}$$

Assim, parece *natural* que, para calcular normas de vetores forças, utilize-se a norma- \mathbf{M}^{-1} , ou seja, aquela que deriva do produto interno \mathbf{M}^{-1} -ponderado

$$\|\mathbf{f}\|_{M^{-1}} = (\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle_{M^{-1}})^{1/2} = (\mathbf{f}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f})^{1/2} \quad (27)$$

É fácil verificar que, para a norma proposta, o problema decorrente do vetor força ter componentes com diferentes unidades deixa de existir. Assim, a proposta para a medida do erro é dada pela expressão (25), onde a norma Euclidiana é substituída pela norma- \mathbf{M}^{-1} :

$$\epsilon_{0,P1}^{(m)} = \frac{\|\delta \mathbf{f}_0^{(m)}\|_{M^{-1}}}{\|\mathbf{f}_0\|_{M^{-1}}} \quad (28)$$

O cálculo da norma- \mathbf{M}^{-1} do vetor $\delta \mathbf{f}_0^{(m)}$ é efetuado a seguir, usando a expressão (21):

$$\begin{aligned} \|\delta \mathbf{f}_0\|_{M^{-1}}^2 &= \langle \delta \mathbf{f}_0^{(m)}, \delta \mathbf{f}_0^{(m)} \rangle_{M^{-1}} \\ &= \mathbf{f}_0^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_m^T \mathbf{M}) \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_m^T) \mathbf{f}_0 \\ &= \mathbf{f}_0^T [\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_m^T - \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_m^T + \mathbf{Q}_m (\mathbf{Q}_m^T \mathbf{M} \mathbf{Q}_m) \mathbf{Q}_m^T] \mathbf{f}_0 \end{aligned} \quad (29)$$

Como os vetores \mathbf{Q}_m são \mathbf{M} -ortonormais, vale a igualdade (3), podendo-se escrever

$$\begin{aligned} \|\delta \mathbf{f}_0\|_{M^{-1}}^2 &= \mathbf{f}_0^T (\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_m^T) \mathbf{f}_0 \\ &= \mathbf{f}_0^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_0 - (\mathbf{Q}_m^T \mathbf{f}_0)^T \mathbf{Q}_m^T \mathbf{f}_0 \\ &= \|\mathbf{f}_0\|_{M^{-1}}^2 - \sum_{j=1}^m (\mathbf{q}_j^T \mathbf{f}_0)^2 \end{aligned} \quad (30)$$

Dessa forma a medida do erro relativo (28) pode ser escrita como

$$\epsilon_{0,P1}^{(m)} = \left\{ 1 - \sum_{j=1}^m \frac{(\mathbf{q}_j^T \mathbf{f}_0)^2}{\|\mathbf{f}_0\|_{M^{-1}}^2} \right\}^{1/2} \quad (31)$$

Cabe observar que, computacionalmente, o denominador de (31) é calculado por

$$\|\mathbf{f}_0\|_{M^{-1}}^2 = \mathbf{f}_0^T \mathbf{x}_0 \quad (32)$$

onde \mathbf{x}_0 é obtido resolvendo-se o sistema de equações

$$\mathbf{M} \mathbf{x}_0 = \mathbf{f}_0 \quad (33)$$

Deve ser observado que, na obtenção da expressão (31), não foi lançado mão do fato que os vetores \mathbf{q}_j são vetores de Lanczos. Assim, tal expressão pode ser usada para qualquer conjunto de vetores \mathbf{q}_j , $1 \leq j \leq m$, \mathbf{M} -ortonormais.

Se a matriz de massa \mathbf{M} é diagonal, o esforço computacional é mínimo para avaliar, por (31), a medida do erro. Nos casos em que a massa associada a alguns graus de liberdade é nula (p.ex., casos de graus de liberdade rotacionais) resulta uma matriz de massa singular e o sistema de equações (33) só é solucionável se as correspondentes componentes do vetor \mathbf{f}_0 forem também nulas. A solução, nesses casos, não é única, pois as componentes do vetor \mathbf{x}_0 correspondentes às linhas (colunas) nulas de matriz \mathbf{M} são arbitrárias. No entanto, esses valores arbitrários para tais componentes do vetor \mathbf{x}_0 são *irrelevantes*, pois o que importa para a medida do erro é o produto interno $\mathbf{f}_0^T \mathbf{x}_0$ e ele não depende dos valores arbitrados em \mathbf{x}_0 em virtude de que as correspondentes componentes de \mathbf{f}_0 são nulas.

Caso o carregamento seja tal que alguma componente de \mathbf{f}_0 correspondente a uma linha (coluna) nula da matriz \mathbf{M} seja não-nula, a obtenção de \mathbf{x}_0 é impossível, ou seja, não existe \mathbf{x}_0 que satisfaça (33), ficando comprometida a medida do erro. Esse comprometimento retrata a impossibilidade, para a situação descrita, do vetor \mathbf{f}_0 ser representado por uma combinação linear dos vetores $\mathbf{M}\mathbf{q}_j$, como prevê a expressão (17)^{4,10}.

SEGUNDA PROPOSTA PARA A MEDIDA DO ERRO

Uma das dificuldades inerentes à utilização da fórmula (31) ocorre nos casos em que a matriz de massa é consistente, devido ao esforço computacional necessário para resolver o sistema de equações (33). Seria desejável, portanto, obter uma outra medida para o erro que não requeresse esse esforço adicional. A utilização da norma- \mathbf{M}^{-1} induz, como alternativa, utilizar a norma- \mathbf{K}^{-1} , oriunda do produto interno \mathbf{K}^{-1} -ponderado:

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{K}^{-1}} = (\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle_{\mathbf{K}^{-1}})^{1/2} = (\mathbf{f}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f})^{1/2} \quad (34)$$

pois, da mesma maneira que na norma- \mathbf{M}^{-1} , as parcelas intervenientes no desenvolvimento da expressão (34) são *dimensionalmente* equivalentes (sendo \mathbf{f} um vetor *força*).

A medida do erro relativo seria dada, então, por

$$\epsilon_{0,P2}^{(m)} = \frac{\|\delta \mathbf{f}_0^{(m)}\|_{\mathbf{K}^{-1}}}{\|\mathbf{f}_0\|_{\mathbf{K}^{-1}}} \quad (35)$$

O denominador da igualdade (35) é facilmente obtido, pois

$$\|\mathbf{f}_0\|_{\mathbf{K}^{-1}}^2 = \langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0 \rangle_{\mathbf{K}^{-1}} = \mathbf{f}_0^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_0^T (\beta_1 \mathbf{q}_1) = \beta_1 (\mathbf{f}_0^T \mathbf{q}_1) = \beta_1 (\mathbf{q}_1^T \mathbf{f}_0) \quad (36)$$

O numerador de (35) é calculado tendo em vista a igualdade (21)

$$\begin{aligned}
\|\delta \mathbf{f}_0\|_{K^{-1}}^2 &= \langle \delta \mathbf{f}_0^{(m)}, \delta \mathbf{f}_0^{(m)} \rangle_{K^{-1}} \\
&= \mathbf{f}_0^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_m^T \mathbf{M}) \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_m^T) \mathbf{f}_0 \\
&= \mathbf{f}_0^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_m^T \mathbf{M}) (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_0 - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_m^T \mathbf{f}_0) \\
&= \mathbf{f}_0^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_m^T \mathbf{M}) (\beta_1 \mathbf{q}_1 - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_m^T \mathbf{f}_0) \\
&= \beta_1 \mathbf{f}_0^T (\mathbf{q}_1 - \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_m^T \mathbf{M} \mathbf{q}_1) - \mathbf{f}_0^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_m^T \mathbf{M}) \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_m^T \mathbf{f}_0
\end{aligned} \tag{37}$$

A quantidade entre parênteses na primeira parcela é nula, em decorrência da \mathbf{M} -ortonormalidade dos vetores \mathbf{q}_j , $1 \leq j \leq m$. Permanece, então, apenas a segunda parcela, escrevendo-se

$$\|\delta \mathbf{f}_0^{(m)}\|_{K^{-1}}^2 = -\mathbf{f}_0^T [\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_m - \mathbf{Q}_m (\mathbf{Q}_m^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_m)] \mathbf{Q}_m^T \mathbf{f}_0 \tag{38}$$

que, em virtude da propriedade tridiagonal (15), pode ser escrita

$$\|\delta \mathbf{f}_0^{(m)}\|_{K^{-1}}^2 = -\mathbf{f}_0^T (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_m - \mathbf{Q}_m \mathbf{T}_m) \mathbf{Q}_m^T \mathbf{f}_0 \tag{39}$$

A expressão acima, por sua vez, pode ser escrita, devido à igualdade (13)

$$\begin{aligned}
\|\delta \mathbf{f}_0^{(m)}\|_{K^{-1}}^2 &= -\beta_{m+1} \mathbf{f}_0^T \mathbf{q}_{m+1} \mathbf{e}_m^{(m)T} \mathbf{Q}_m^T \mathbf{f}_0 \\
&= -\beta_{m+1} \mathbf{f}_0^T \mathbf{q}_{m+1} (\mathbf{Q}_m \mathbf{e}_m^{(m)})^T \mathbf{f}_0 \\
&= -\beta_{m+1} \mathbf{f}_0^T \mathbf{q}_{m+1} \mathbf{q}_m^T \mathbf{f}_0
\end{aligned} \tag{40}$$

Assim, a medida do erro relativo dada pela igualdade (35) pode ser escrita

$$\epsilon_{0,P2}^{(m)} = \left\{ -\frac{\beta_{m+1}}{\beta_1} \times \frac{(\mathbf{q}_{m+1}^T \mathbf{f}_0)(\mathbf{q}_m^T \mathbf{f}_0)}{\mathbf{q}_1^T \mathbf{f}_0} \right\}^{1/2} \tag{41}$$

EXEMPLOS

A característica que levou os seguintes exemplos a serem escolhidos foi a de apresentarem, apenas, graus de liberdade à translação, de modo a permitir que a medida de erro relativo baseada na norma Euclidiana (25) seja utilizada como medida de comparação.

Exemplo 1. A Figura 1 mostra o exemplo apresentado por Nour-Omid e Clough⁷, que consiste de um modelo contendo 170 elementos de treliça plana, num total de 100 graus de liberdade. Foram adotados $A = 0.01m^2$ (todas as barras), $E = 2.0 \times 10^3 MPa$ e $\rho = 8.0 \times 10^3 Kg/m^3$, de forma que o modelo apresenta um período fundamental $T_1 \approx 1.075s$. O carregamento é dado por uma carga concentrada aplicada no terceiro andar da estrutura. Foram plotadas as medidas dos erros correspondentes a j vetores de Lanczos, tomando-se $j = 1, 2, \dots, m = 20$ (Figura 2). Verifica-se uma boa concordância entre os resultados obtidos pela norma Euclidiana e pela Proposta 1 (norma- M^{-1}) e, para $j \geq 5$, entre essas e os resultados da Proposta 2 (norma- K^{-1}).

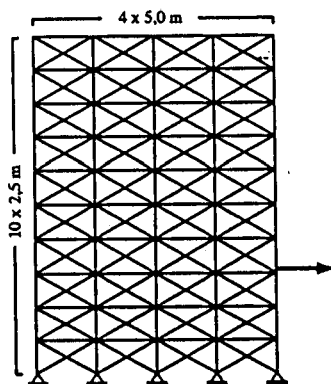


Figura 1. Exemplo 1

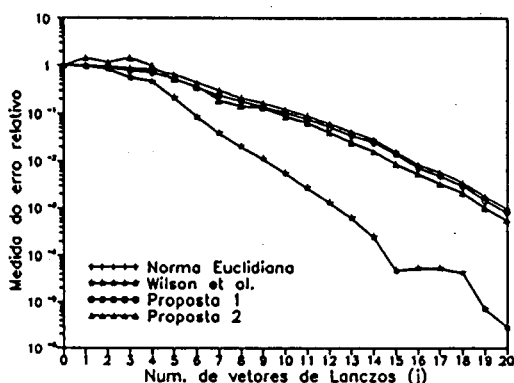


Figura 2. Medidas do erro relativo-Exemplo 1

Exemplo 2. A torre treliçada abaixo (Figura 3) é constituída por 15 módulos de $1m \times 1m$, num total de 32 nós e 75 barras, totalizando 60 graus de liberdade. As barras tem, todas, $A = 0.001m^2$, $E = 2.1 \times 10^5 MPa$ e $\rho = 7.85 \times 10^3 Kg/m^3$. A torre apresenta, para as características indicadas, um período fundamental $T_1 \approx 0.27068s$. O carregamento atuante é lateral, e todas as forças tem mesma intensidade. As diversas medidas do erro estão graficadas na Figura 4, com $j = 1, 2, \dots, m = 15$ vetores de Lanczos. Vê-se, através desse exemplo, que a medida do erro com base na Proposta 1, baseada na norma- M^{-1} , praticamente coincide com a medida do erro baseada na norma Euclidiana. Já os valores correspondentes à Proposta 2, com base na norma- K^{-1} , apresentam-se, para $j \geq 2$, com duas ordens de grandeza menores do que as citadas. Essa medida pode estar mais de acordo com a realidade pois, em muitos casos, obtém-se respostas dinâmicas precisas mesmo que a fórmula (22) não indique erro relativo pequeno³.

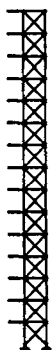


Figura 3. Exemplo 2

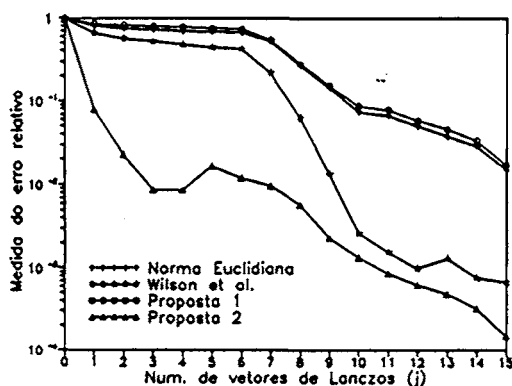


Figura 4. Medidas do erro relativo—Exemplo 2

CONCLUSÕES

O presente trabalho mostrou que a medida do erro relativo na representação do carregamento sugerida por Wilson *et al.*⁹ é inadequada. Foram apresentadas duas propostas para a medida do erro, baseadas respectivamente na norma- \mathbf{M}^{-1} e na norma- \mathbf{K}^{-1} do vetor erro na representação do carregamento. A implementação dessas propostas, com exceção da primeira para matriz de massa consistente, leva a um custo computacional desprezível. A Proposta 2 parece conduzir a resultados melhores do que a Proposta 1 por fornecer, em alguns exemplos, valores menores. Testes correlacionando o erro relativo na representação do carregamento com o erro relativo na resposta dinâmica são ainda necessários para indicar, de fato, se a Proposta 2 é adequada.

REFERÊNCIAS

1. R.R. Arnold, R.L. Citerley, M. Chargin e D. Galant, "Application of Ritz Vectors for Dynamic Analysis of Large Structures", *Computers & Structures*, Vol. 21, 5, pp. 901-907, (1985).
2. A.L.G.A. Coutinho, L. Landau, E.C.P. Lima e N.F.F. Ebecken, "The Application of the Lanczos Mode Superposition Method in Dynamic Analysis of Offshore Structures", *Computers & Structures*, Vol. 25, 4, pp. 615-625, (1987).
3. B. Jacob e N.F.F. Ebecken, "Adaptive Reduced Integration Method for Nonlinear Structural Dynamic Analysis", *Computers & Structures*, Vol. 45, 2, pp. 333-347, (1992).
4. K.J. Joo, E.L. Wilson e P. Léger, "Ritz Vectors and Generation Criteria for Mode Superposition Analysis", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 18, 2, pp. 149-167, (1989).
5. P. Léger e E.L. Wilson, "Generation of Load Dependent Ritz Transformation Vectors in Structural Dynamics", *Engineering Computations*, Vol. 4, pp. 309-318, (1987).
6. B. Nour-Omid, "The Lanczos Algorithm for Solution of Large Generalized Eigenproblems" In: Hughes, T.J.R., "The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1987).
7. B. Nour-Omid e R.W. Clough, "Dynamic Analysis of Structures Using Lanczos Coordinates", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 12, 4, pp. 565-577, (1984).
8. H.D. Simon, "The Lanczos Algorithm with Partial Reorthogonalization", *Mathematics of Computation*, Vol. 42, 165, pp. 115-142, (1984).
9. E.L. Wilson, M.W. Yuan e J.M. Dickens, "Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, 6, pp. 813-821, (1982).
10. H. Xia e J.L. Humar, "Frequency Dependent Ritz Vectors", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 21, 3, pp. 215-231, (1992).