

FORMULAÇÃO DE UM ELEMENTO FINITO DE CABO INCORPORANDO O EFEITO DO ATRITO (Elemento de cabos escorregando)

RUY M. PAULETTI
e
PAULO M. PIMENTA

*Laboratório de Mecânica Computacional
Departamento de Estruturas e Fundações
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Caixa Postal 61548, CEP 05424-930, São Paulo
e-mail:pauletti@uspif.if.usp.br*

SUMÁRIO

O trabalho apresenta a formulação geometricamente exata e a implementação computacional de um elemento finito de cabo que permite o escorregamento em presença de atrito. O novo elemento fornece procedimentos naturais para simular o processo de montagem e a resposta aos carregamentos de estruturas de cabos em geral, além de ter campos promissores de aplicação no modelamento de estruturas de concreto protendido e no estudo de oscilações auto-excitáveis. Resultados de exemplos elementares são discutidos.

SUMMARY

This work presents a geometrically exact formulation as well as the computational implementation of a cable finite element allowing sliding with friction. The new element provides natural techniques to simulate the assembly and the structural response to loading, besides having promising applications for the modelling of prestressed concrete structures as well as self-induced oscillations. Results for elementary examples are discussed.

INTRODUÇÃO

Tenso-estruturas, em particular as estruturas de cabos, têm uso nobre e emprego freqüente na engenharia civil. O modelamento matemático deste tipo de estruturas desperta o interesse de muitos pesquisadores (Krishna⁹, ..., Maker¹¹). O problema envolve relações geometricamente não lineares, tornando-se a estrutura um mecanismo, na ausência de forças de protensão. Além disso, a própria configuração original da estrutura é incôgnita, sendo o tratamento de tal particularidade um assunto em aberto.

Recibido: Enero 1995

Este trabalho apresenta a formulação de um elemento finito para estruturas de cabos que permite o escorregamento não-ideal, isto é, em presença de atrito. Ao incorporar o efeito do atrito, o novo elemento generaliza aquele apresentado por Aaufaure⁴, onde se equaciona o problema de um cabo passando por uma polia, no contexto da simulação do içamento dos cabos das linhas de transmissão de eletricidade.

A representação usual dos cabos por um agrupamento de elementos finitos do tipo treliça introduz uma condição de solidariedade entre os cabos, em correspondência aos pontos de cruzamento, que não se verifica para todas as estruturas, nem para todos os estados de um particular arranjo construtivo. Mesmo nos casos em que a solidariedade possa ser garantida construtivamente, resta o problema matemático de se determinar em quais pontos materiais esta solidariedade se verifica, uma vez que não se conhece a priori a configuração de equilíbrio.

Além de contribuir para a resolução da classe de problemas acima, o novo elemento pode, em concomitância com outros elementos estruturais, representar o comportamento de estruturas esbeltas de concreto protendido, quando é importante a não-linearidade geométrica. Finalmente, no contexto da análise dinâmica, pode-se empregar este elemento para o estudo de oscilações auto-excitáveis, sempre que se tratar de cabos escorregando com velocidades não-deprezíveis. O caso clássico é o da corda do violino².

ELEMENTO IDEAL DE CABOS ESCORREGANDO

Considere-se inicialmente o *elemento de cabo ideal* (cabo escorregando sem atrito ou cabo passando por uma polia), conforme se mostra na Figura 1. Associados aos trechos 1 e 2 do elemento têm-se os vetores dados na equação (1)

$$l_1 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{U}_1 - \mathbf{X}_3 - \mathbf{U}_3; \quad l_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{U}_2 - \mathbf{X}_3 - \mathbf{U}_3 \quad (1)$$

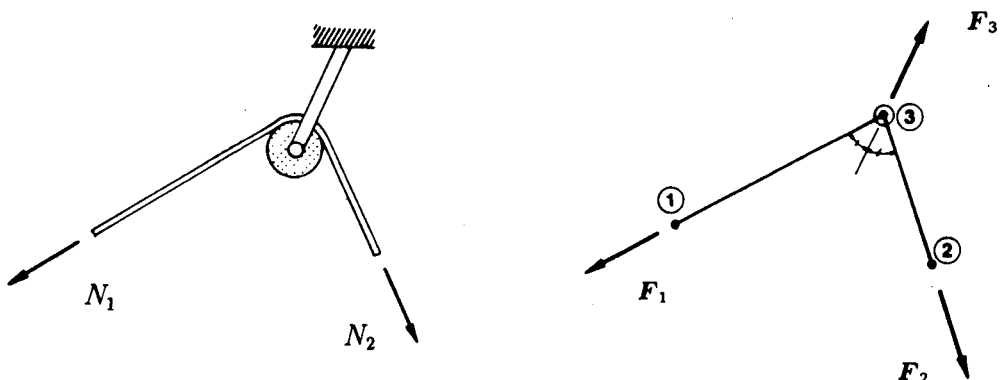


Figura 1. Elemento de cabo ideal (sem atrito)

onde \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 são as coordenadas dos nós de extremidade e \mathbf{X}_3 aquelas do nó intermediário, na configuração inicial, e \mathbf{U}_1 , \mathbf{U}_2 e \mathbf{U}_3 são os deslocamentos destes nós desde a configuração inicial até a configuração atual.

Os *cômpimentos atuais* dos dois trechos podem ser calculados por meio de

$$\ell_1 = \sqrt{\mathbf{l}_1^T \mathbf{l}_1}; \quad \ell_2 = \sqrt{\mathbf{l}_2^T \mathbf{l}_2} \quad (2)$$

O *comprimento total indeformado* do cabo é $\ell_0 = (\ell_1)_0 + (\ell_2)_0$ e o *comprimento inicial*, admitindo-se uma protensão inicial N_i , é $\ell_i = (\ell_1)_i + (\ell_2)_i$.

A partir das equações (1) e (2) definem-se ainda os *versores direcionais* dos trechos 1 e 2 do elemento de cabo

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{l}_1}{\ell_1}; \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{l}_2}{\ell_2} \quad (3)$$

Como a tensão é a mesma em ambos os trechos de cabo (propriedade da polia ideal), a deformação é $\epsilon = (\ell_1 + \ell_2 - \ell_i) / \ell_0$. Admitindo-se um material elástico linear, a força normal em ambos os trechos do elemento é $N = EA\epsilon + N_i$, onde E é o módulo de elasticidade e A a área da seção transversal do cabo.

A combinação das equações acima fornece as forças nodais agindo no elemento, que podem ser agrupadas no *vetor das forças nodais* \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \mathbf{v}_1 \\ N \mathbf{v}_2 \\ -(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Definido ainda o *vetor de deslocamentos incrementais* $\delta\mathbf{U}$

$$\delta\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{U}_1 \\ \delta\mathbf{U}_2 \\ \delta\mathbf{U}_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

pode-se procurar a *matriz de rigidez tangente* \mathbf{K} tal que

$$\delta\mathbf{F} = \mathbf{K}\delta\mathbf{U} \quad (6)$$

O vetor $\delta\mathbf{F}$ é a *derivada direcional* do vetor das forças nodais, dado pela *derivada de Gâteaux*

$$\mathbf{F} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{U} + \lambda\delta\mathbf{U}) - \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \mathbf{F}(\mathbf{U} + \lambda\delta\mathbf{U}) \Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} \bar{\mathbf{F}} \Big|_{\lambda=0} \quad (7)$$

onde são indicadas com uma barra as grandezas calculadas na configuração $(\mathbf{U} + \lambda\delta\mathbf{U})$, isto é, $\bar{\mathbf{l}}_1 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{U}_1 + \lambda\delta\mathbf{U}_1 - \mathbf{X}_3 - \mathbf{U}_3 - \lambda\delta\mathbf{U}_3$ e definições análogas para as demais grandezas.

Convém particionar \mathbf{K} segundo as componentes dos vetores $\delta\mathbf{F}$ e $\delta\mathbf{U}$, de modo que $\delta\mathbf{F}_i = \mathbf{K}_{ij}\delta\mathbf{U}_j$ isto é, a derivada direcional da força nodal agindo no nó i (\mathbf{F}_i) na direção do deslocamento do nó j (\mathbf{U}_j) fornece a submatriz \mathbf{K}_{ij} . Procedendo-se portando à derivação de $\delta\mathbf{F}_1$, obtém-se a primeira linha de submatrizes \mathbf{K}_{1j} . As outras

submatrizes obtêm-se por equilíbrio de forças e permutação de índices, o que ressalta a simetria de \mathbf{K} (como se requer de um sistema conservativo⁵). Resulta

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell_0} \mathbf{M}_{11} + \frac{N}{\ell_1} \mathbf{M}_1 & \frac{EA}{\ell_0} \mathbf{M}_{12} & -\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \frac{EA}{\ell_0} \mathbf{M}_{22} + \frac{N}{\ell_2} \mathbf{M}_2 & -\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}^T \\ -\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}^T & -\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22} + \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{12}^T \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde se denota, por concisão, $\mathbf{M}_{11} = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T$; $\mathbf{M}_{22} = \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T$; $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T$; $\mathbf{M}_1 = \mathbf{I}_3 - \mathbf{M}_{11}$; $\mathbf{M}_2 = \mathbf{I}_3 - \mathbf{M}_{22}$ (\mathbf{I}_3 é a matriz identidade de ordem 3).

ELEMENTO NÃO-IDEAL DE CABOS ESCORREGANDO

Considera-se agora a obtenção da matriz de rigidez tangente não ideal (isto é, incluindo o atrito entre cabos). Preliminarmente, recorde-se o problema clássico do equilíbrio de uma correia passando por um tambor cilíndrico fixo, Figura 2. Seja α o ângulo entre os trechos da correia nos dois lados do tambor e β o seu complemento. β é também a abertura angular do trecho do tambor em contato com a correia. Sendo μ o coeficiente de atrito estático entre cabo e correia, as forças normais N_1 e N_2 agindo nos trechos de cabo nos dois lados da correia guardam entre si a seguinte relação

$$\eta = \frac{N_1}{N_2} = e^{\mu\beta} \quad (9)$$

onde se admite que a força agindo no primeiro trecho seja maior que no segundo, isto é, $N_1 > N_2$. Observa-se que a relação (9) independe do diâmetro do cilindro, podendo portanto ser empregada no problema dos cabos escorregando com atrito.

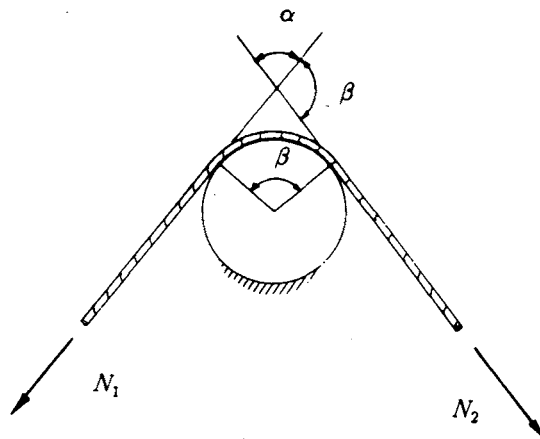


Figura 2. Correia passando por tambor cilíndrico fixo

Neste caso, o elemento de cabo deve representar dois diferentes regimes de comportamento

- $\diamond \frac{N_1}{N_2} \leq \eta \Rightarrow$ não há escorregamento;
- $\diamond \frac{N_1}{N_2} > \eta \Rightarrow$ a polia escorrega, e os cabos rearranjam-se até que a condição de não-escorregamento seja atingida, o que ocorre com $\frac{N_1}{N_2} = \eta$.

Relações análogas valem para $N_2 > N_1$. O problema é análogo ao da elastoplasticidade ideal. Não havendo escorregamento, o elemento de cabo com polia não-ideal comporta-se como o encadeamento de dois elemento de treliça. A montagem da matriz de rigidez do elemento para este caso é trivial.

Para o caso em que o equilíbrio se dá após o escorregamento do cabo, considere-se a configuração de equilíbrio do elemento de cabo não-ideal mostrada na Figura 3a. Os versores direcionais dos dois trechos de cabo são dados pelas equações (3). Sendo N_1 e N_2 as forças normais nos dois trechos do cabo, o vetor de forças nodais agindo num elemento em equilíbrio é:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \mathbf{v}_1 \\ N_2 \mathbf{v}_2 \\ -(N_1 \mathbf{v}_1 + N_2 \mathbf{v}_2) \end{bmatrix} \quad (10)$$

\mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 e \mathbf{F}_3 são necessariamente coplanares. Porém, enquanto no caso da polia ideal \mathbf{F}_3 era necessariamente dirigida segundo a bissetriz do ângulo α , no caso não ideal \mathbf{F}_3 terá uma componente paralela e outra componente normal à bissetriz. Convém decompor \mathbf{F}_3 nestas duas direções, conforme a equação (11) (Figura 3b)

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_3^i + \mathbf{F}_3^{ni} \quad (11)$$

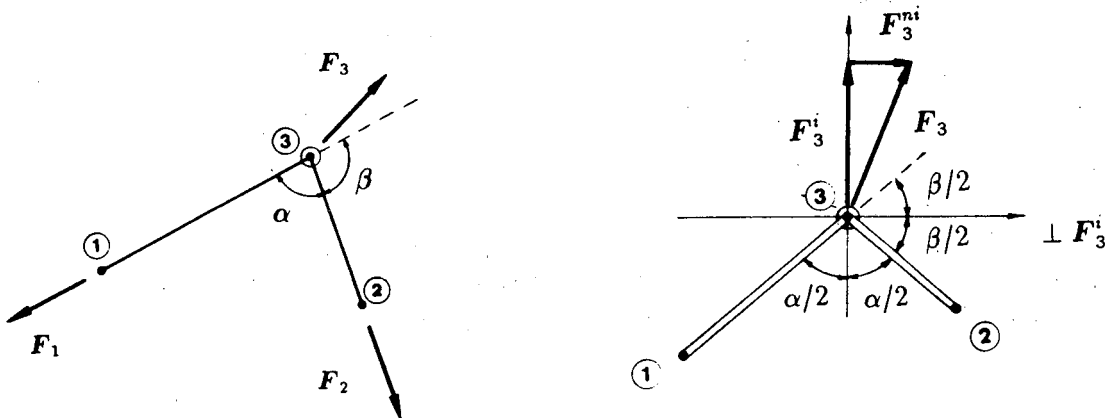


Figura 3. (a) Elemento de cabo não ideal; (b) Decomposição de forças no elemento não ideal

\mathbf{F}_3^i indica a componente de \mathbf{F}_3 segundo a bissetriz do ângulo α . Para atrito nulo, $\mathbf{F}_3^i = \mathbf{F}_3$, daí o índice superior i (de "ideal"). \mathbf{F}_3^{ni} , por outro lado, é a componente de \mathbf{F}_3 sustentada pelo atrito, daí o índice superior ni (de "não-ideal"). A parcela \mathbf{F}_3^i é responsável por sustentar uma tração constante N^i em ambos os trechos do cabo. Para um material elástico linear, existe uma deformação ϵ^i associada a este elemento, tal que

$$N^i = EA\epsilon^i = EA \frac{\ell_1 + \ell_2 - \ell_i}{\ell_0} \quad (12)$$

onde, analogamente ao que se definiu para o caso ideal, o comprimento total indeformado do cabo é $\ell_0 = (\ell_1)_0 + (\ell_2)_0$ e o comprimento inicial, assumindo uma protensão inicial N_i é $\ell_i = (\ell_1)_i + (\ell_2)_i$.

Desta maneira, pode-se escrever, para as forças normais totais agindo nos dois trechos

$$N_1 = N^i + \Delta N_1^{ni} = EA(\epsilon^i + \Delta\epsilon_1^{ni}); \quad N_2 = N^i + \Delta N_2^{ni} = EA(\epsilon^i + \Delta\epsilon_2^{ni}) \quad (13)$$

Ora, como \mathbf{F}_3^i é dirigida segundo a bissetriz do ângulo α , \mathbf{F}_3^{ni} deve ter a direção da bissetriz do ângulo β (Figura 3b), o que somente é possível se ΔN_1^{ni} e ΔN_2^{ni} forem iguais em módulo. E como estas parcelas devem incrementar ou reduzir a parcela ideal nos dois trechos do cabo, $\Delta\epsilon_1^{ni} = -\Delta\epsilon_2^{ni} = \Delta\epsilon^{ni}$. Substituindo-se $\Delta\epsilon^{ni}$ em (13) e estas em (9), obtém-se $\Delta\epsilon^{ni} = \frac{\eta-1}{\eta+1}\epsilon^i$ (sempre para $N_1 > N_2$). Como decorrência, as forças normais nos dois trechos de cabo podem ser postas em função de N^i

$$N_1 = \frac{2\eta}{\eta+1}N^i; \quad N_2 = \frac{2}{\eta+1}N^i \quad (14)$$

Introduzindo-se as expressões acima na equação (10), pode-se obter a matriz de rigidez tangente do elemento de cabo escorregando por uma polia não ideal, analogamente a quanto feito para a polia ideal.

Considere-se as duas primeiras linhas da partição $\delta\mathbf{F}_i = \mathbf{K}_{ij}\delta\mathbf{U}_j$. Indicando com uma barra as grandezas calculadas na configuração $(\mathbf{U} + \lambda\delta\mathbf{U})$, tem-se, levando em conta (7)

$$\delta\mathbf{F}_1 = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{2\bar{\eta}}{\bar{\eta}+1} \bar{\mathbf{F}}_1^i \right) \Big|_{\lambda=0}; \quad \delta\mathbf{F}_2 = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{2}{\bar{\eta}+1} \bar{\mathbf{F}}_2^i \right) \Big|_{\lambda=0} \quad (15)$$

Procedendo-se às derivações necessárias, chega-se às duas primeiras linhas de submatrizes de \mathbf{K} . A terceira linha de submatrizes obtém-se considerando o equilíbrio de forças. O resultado final é

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{ni} + \frac{2\eta}{\eta+1} \mathbf{K}_{11}^i & \mathbf{K}_{12}^{ni} + \frac{2\eta}{\eta+1} \mathbf{K}_{12}^i & -(\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{12}) \\ \mathbf{K}_{21}^{ni} + \frac{2}{\eta+1} \mathbf{K}_{21}^i & \mathbf{K}_{22}^{ni} + \frac{2}{\eta+1} \mathbf{K}_{22}^i & -(\mathbf{K}_{21} + \mathbf{K}_{22}) \\ -(\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{21}) & -(\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22}) & -(\mathbf{K}_{13} + \mathbf{K}_{23}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

onde o índice superior i foi acrescido aos termos da matriz de rigidez da polia ideal (isto é, \mathbf{K}_{11}^i , etc.), conforme determinados anteriormente, e além disso,

$$\mathbf{K}_{11}^{ni} = \frac{2\mu\eta}{(\eta + 1)^2 \sin \beta} \frac{N^i}{\ell_1} \mathbf{M}_{12} \mathbf{M}_1 \quad (17)$$

$$\mathbf{K}_{12}^{ni} = \frac{2\mu\eta}{(\eta + 1)^2 \sin \beta} \frac{N^i}{\ell_2} \mathbf{M}_{11} \mathbf{M}_2 \quad (18)$$

$$\mathbf{K}_{13}^{ni} = - \left(\mathbf{K}_{11}^{ni} + \mathbf{K}_{12}^{ni} \right) \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_{21}^{ni} = - \frac{2\mu\eta}{(\eta + 1)^2 \sin \beta} \frac{N^i}{\ell_1} \mathbf{M}_{22} \mathbf{M}_1 \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_{22}^{ni} = - \frac{2\mu\eta}{(\eta + 1)^2 \sin \beta} \frac{N^i}{\ell_2} \mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_2 \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_{23}^{ni} = - \left(\mathbf{K}_{21}^{ni} + \mathbf{K}_{22}^{ni} \right) \quad (22)$$

As matrizes \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 , \mathbf{M}_{11} , \mathbf{M}_{12} , \mathbf{M}_{22} e \mathbf{M}_{21} têm definições idênticas àquelas do caso ideal. Ressalta-se que, em função da introdução do atrito, \mathbf{K} perde a simetria. Com dedução análoga, conclui-se ainda que, para construir-se a matriz de rigidez para o caso em que $N_2 > N_1$, basta inverter os coeficientes que multiplicam as parcelas ideais das submatrizes de \mathbf{K} , e trocar o sinal das parcelas não ideais.

IMPLEMENTAÇÃO E APLICAÇÕES ELEMENTARES

A formulação acima foi implementada no programa CABLE, em desenvolvimento no *Laboratório de Mecânica Computacional (LMC/PEF)* da Escola Politécnica da USP. O algoritmo de solução utilizado foi o método incremental iterativo, com as iterações sendo efetuadas através do método de Newton exato, com busca unidimensional para acelerar a convergência, quando necessário. A solução do sistema de equações lineares em cada iteração utiliza a decomposição de Crout para matrizes assimétricas. Na versão atual o programa exclui *casos patológicos*, como a polia que escapa do elemento, o cabo que se retifica ou que se dobra completamente sobre si mesmo.

Como primeiro exemplo considera-se um único elemento de cabo com polia não ideal. As extremidades são fixas. O nó da polia está localizado no ponto médio do cabo. Os trechos, de comprimento $\sqrt{2}$ formam entre si um ângulo de 90° . Inicialmente o cabo, com $EA = 2 \cdot 10^9$ e $\mu = 0,25$, é tracionado em correspondência ao nó intermediário por uma força vertical F_Z (isto é, segundo a bissetriz do ângulo entre os trechos de cabo) de intensidade $2 \cdot 10^5$. Em seguida aplica-se uma força lateral F_X , crescente. A Figura 4a mostra as configurações de equilíbrio para diferentes valores de carga. A Figura 4b, por sua vez, mostra o valor do deslocamento lateral do nó de polia ao crescer de F_X . O escorregamento ocorre com $0,3875 \cdot 10^5 < F_X < 0,3890 \cdot 10^5$. A partir daí, esgota-se a capacidade da polia equilibrar a componente de força normal à

bissetriz do ângulo entre os trechos de cabo por meio do atrito, de modo que o cabo deve rearranjar-se até encontrar uma nova configuração de equilíbrio. Desprezando-se a deformação do cabo, a polia passa ocupar pontos de uma elipse cujos polos são as duas extremidades fixas do cabo. Ainda desprezando-se a deformação do cabo, é fácil determinar analiticamente o valor máximo da força lateral para o qual não há escorregamento, resultando $F_X = \frac{e^{\mu\beta}-1}{e^{\mu\beta}+1} F_Z = 3,8773 \cdot 10^4$, valor que concorda com os resultados obtidos pelo programa CABLE.

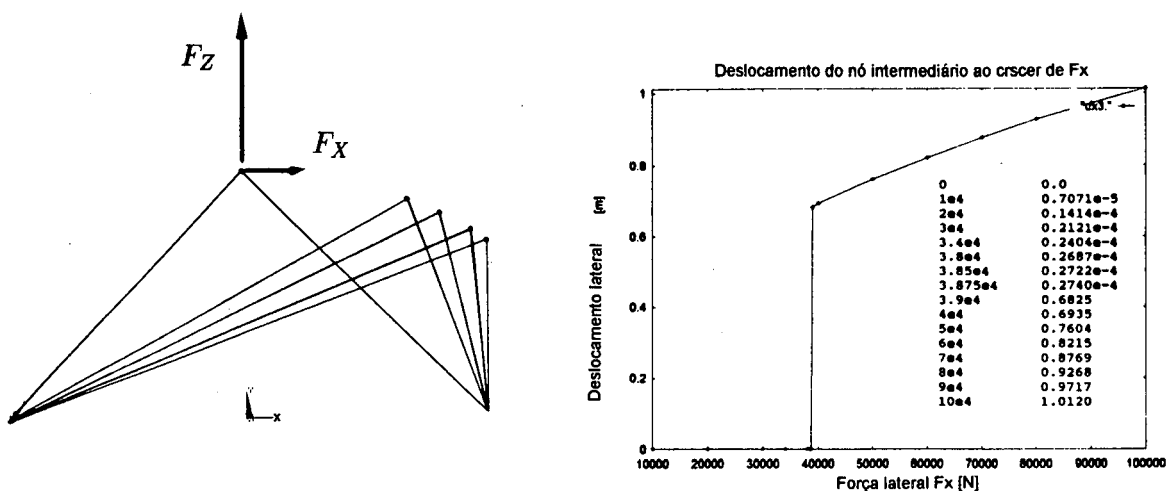


Figura 4. (a) Elemento de cabo escorregando em sucessivas configurações de equilíbrio; (b) Deslocamento do nó intermediário ao crescer de F_x

Como segundo exemplo, considera-se a perda de tensão em um cabo enrolado a um pilar cilíndrico rígido, conforme se mostra na Figura 5a. Uma das extremidades do cabo foi carregada com uma força normal $2 \cdot 10^5$, enquanto a outra foi fixada. A Figura 5b mostra a perda de tração ao longo do desenvolvimento do cabo, para coeficientes de atrito entre 0,01 e 0,10. Os valores determinados pelo programa CABLE coincidem com os valores analíticos, dados por $N(\beta) = T e^{\mu\beta}$, onde T é a tração aplicada à extremidade do cabo e β o seu desenvolvimento angular (isto é, $\beta_{total} = 4\pi$).

O exemplo seguinte considera o cabo principal de uma ponte pênsil com um vão de 80 m entre pilares. O cabo, com $EA = 2 \cdot 10^9$, é fixado ao solo e escorrega pelo topo dos pilares, que se admite sejam rígidos. Por simetria, modela-se a metade da estrutura, conforme a Figura 6, que mostra a geometria inicial (retilínea) e a geometria de equilíbrio do cabo sob a ação do peso próprio ($P_p = 300/\text{nó}$). A Figura 7, por sua vez, mostra a deformação provocada por uma sobrecarga $P_s = 10^4/\text{nó}$. No caso de escorregamento sem atrito, ocorre um incremento de 0,274m na flexa do vão central do cabo, em relação à geometria de equilíbrio sob a ação do peso próprio. A Figura 8 mostra como este incremento se reduz, à medida que se consideram coeficientes de atrito crescentes, até um valor assintótico de cerca de 0,2m. Mostra-se ainda o crescimento da tração no cabo, em correspondência ao apoio superior, até o valor assintótico de $0,2337 \cdot 10^6$, igual ao valor que se obtém ao se considerar o cabo solidário ao pilar.

Necessariamente, a tração na base do estaio (isto é, o ponto de fixação do cabo ao solo), tem comportamento inverso, tendendo a zero a medida que μ cresce.

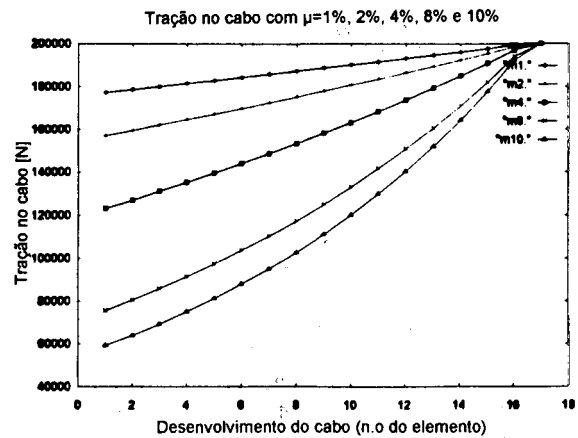
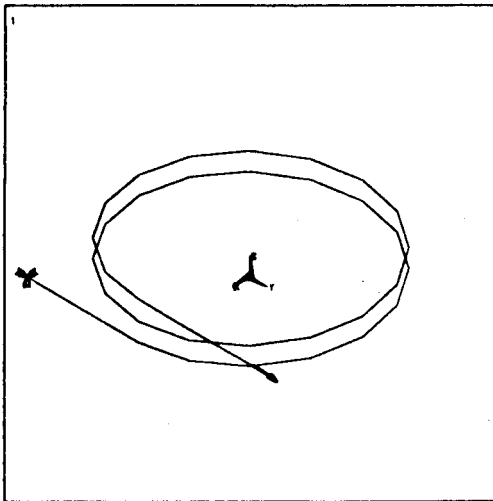


Figura 5. (a) Cabo enrolado a um pilar cilíndrico; (b) Tração no cabo para diversos coeficientes de atrito

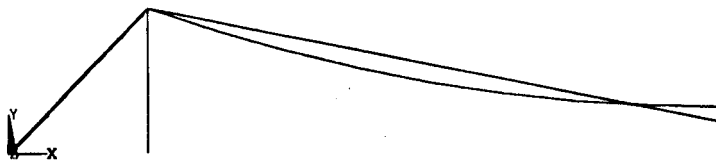


Figura 6. Cabo de ponte pênsil. Geometria inicial (retilínea) e de equilíbrio sob a ação do peso próprio



Figura 7. Cabo de ponte pênsil. Geometria deformada sob a ação da sobrecarga

Como um último exemplo, sobre a configuração de equilíbrio do cabo sujeito ao peso próprio, estende-se um cabo secundário, ao qual se impõe uma tração de $2 \cdot 10^5$, Figura 9 ao mesmo tempo em que ambos os cabos são carregados com $P_s = 10^4/\text{nó}$. Considera-se ainda que o pilar seja flexível, com $k_{pilar}^x = 10^5$. A Figura 10 mostra a

configuração de equilíbrio obtida permitindo-se o escorregamento entre os cabos. O máximo deslocamento se dá correspondência ao ponto de cruzamento. No caso ideal, este ponto desloca-se de 3,06m, enquanto que para $\mu = 0,1$ o deslocamento cai para 3,00m.

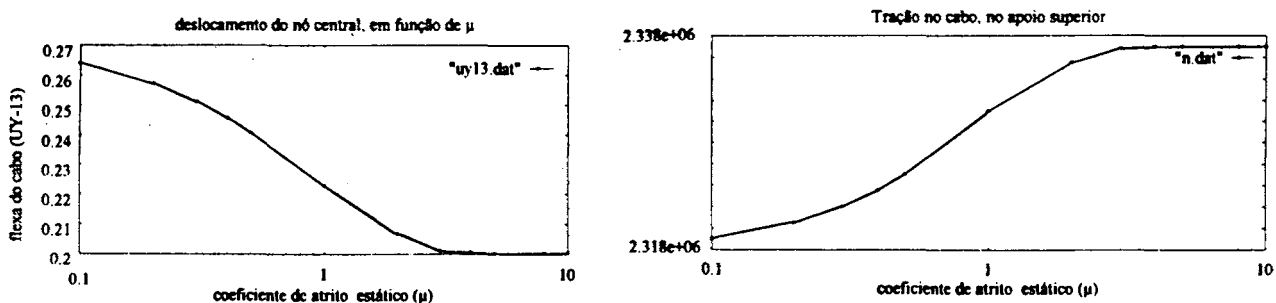


Figura 8. Variação do deslocamento do nó central e da tração no cabo, em função do coeficiente de atrito

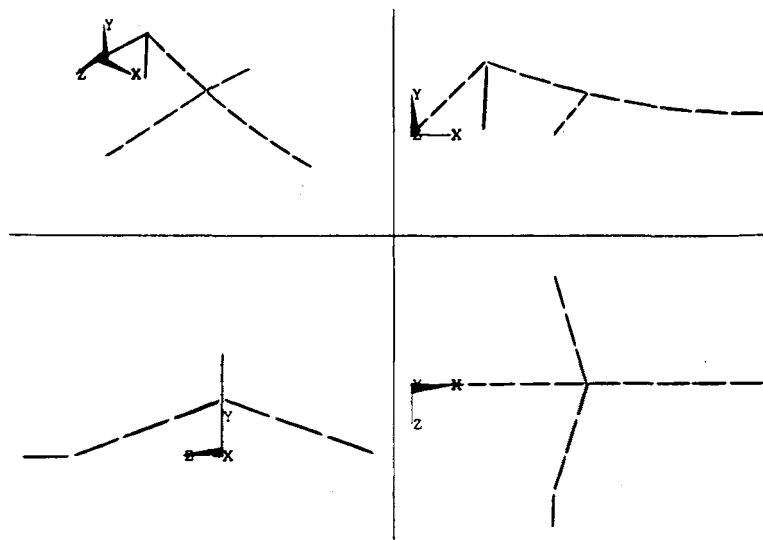


Figura 9. Arranjo espacial de elementos de cabo

As discrepâncias de configuração para valores usuais de μ são visualmente imperceptíveis. Tal não é o caso porém, quando se despreza o escorregamento (isto é, cabos solidários), conforme se pode ver na configuração mostrada na Figura 11, substancialmente diferente da anterior. Neste caso, o máximo deslocamento encontrado foi de 1,175m, ainda em correspondência ao ponto de cruzamento.

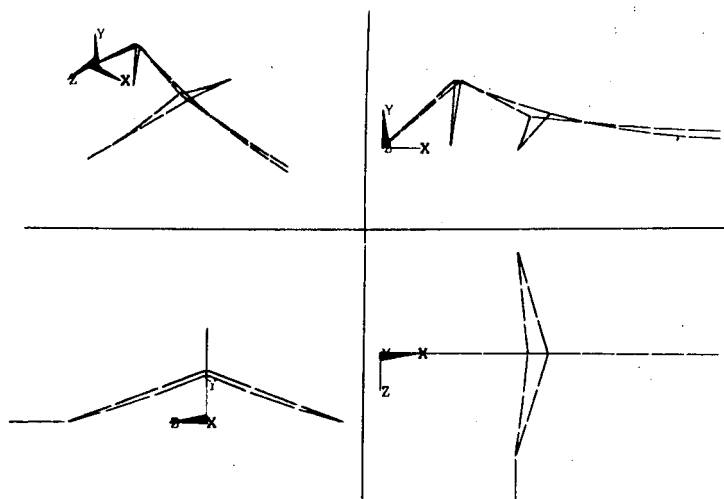


Figura 10. Geometria deformada considerando o escorregamento dos cabos

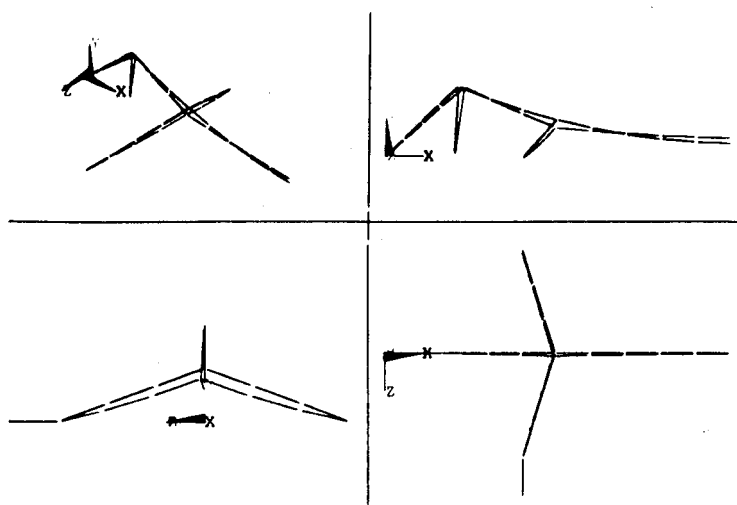


Figura 11. Geometria deformada impedindo o escorregamento dos cabos

REFERÊNCIAS

1. F. Aboul-Ella, "New iterative analysis of cable stayed structures". *Comp. Struct.*, Vol. **40**, pp. 549-554, (1991).
2. J.M. Adrien, R. Causse, X. Rodet, "Sound synthesis by physical models; application to strings", *Proceedings of the 1987 ICMC*, Univ. of Illinois, (1987).
3. S. Ahmad and T. K. Datta, "Nonlinear response analysis of marine risers", *Comp. Struct.*, Vol. **43**, pp. 281-295, (1992).

4. M. Aaufaure, "A finite element of cable passing through a pulley", *Comp. Struct.*, Vol. **46**, pp. 807-812, (1993).
5. H. Buefler, "Conservative systems, potential operators and tangent stiffness: reconsideration and generalization", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. **63**, pp 1-24, (1993).
6. N. A. Dumont et al., "Um modelo computacional para a análise de pórticos de concreto protendido com cabos aderentes e não-aderentes", *Proceedings XIV CILAMCE*, São Paulo, (Dec. 1993).
7. K. Eisenloffel and H. Adeli, "Microcomputer-Aided Design of Tensile Roof Structures". *Comp. Struct.*, Vol. **46**, pp. 157-174, (1993).
8. C. Gantes et al., "Modeling, loading, and preliminary design considerations for tall guyed towers", *Comp. Struct.*, Vol. **49**, pp. 797-805, (1993).
9. P. Krishna, "*Cable-suspended roofs*", McGraw-Hill, New York (1978).
10. W.J. Lewis and J. Shan, "Numerical modelling of the non-linear static response of clad cable net structures", *Comp. Struct.*, Vol. **35**, pp. 15-22, (1990).
11. B.N. Maker and T. A. Laursen, "A finite element formulation for the rod/continuum interactions: the one-dimensional slideline", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. **37**, pp. 1-18, (1994).
12. P. Roca and A.R. Mari, "Numerical treatment of prestressing tendons in the nonlinear analysis of prestressed concrete structures", *Comp. Struct.*, Vol. **46**, pp. 905-916, (1993).
13. P. Roca and A.R. Mari, "Nonlinear geometric and material analysis of prestressed concrete general shell structures". *Comp. Struct.*, Vol. **46**, pp. 917-929, (1993).
14. B.A. Schrefler, "Besonde Probleme bei der Bemessung von mehrfeldrigen Hängebrücken zur Überführung von Rohrleitungen", *Der Stahlbau*, Vol. **1**, pp. 22-29, (1978).
15. B.A. Schrefler and S. Odorizzi, "A geometrically non-linear analysis of combined beam and cable structures in space", *Int. Conf. on Finite Element Methods.*, Beijing, (1982).
16. B.A. Schrefler, S. Odorizzi and R.D. Wood, "A total lagrangian geometrically non-linear analysis of combined beam and cable structures", *Comp. Struct.*, Vol. **17**, pp. 115-127, (1983).
17. T.A. Shugar, "A Numerical Study of Automated Dynamic Relaxation for Nonlinear Static Tensioned Structures", Naval Civil Engineering Lab., Port Hueneme, Ca. Technical Note N-1778, (Oct. 1987).
18. G.D. Stefanou, "Dynamic response of tension cable structures due to wind loads", *Comp. Struct.*, Vol. **43**, pp. 365-372, (1992).
19. G.D. Stefanou et al., "Conjugate gradients method for calculating the response of large cable nets to static loads. *Comp. Struct.*, Vol. **49**, pp. 843-848, (1993).
10. B. Tabarrok and Z. Qin, "Nonlinear analysis of tension structures", *Comp. Struct.*, Vol. **45**, pp. 973-984, (1992).