

ESTRATÉGIA H-ADAPTATIVA PARA A ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA BIDIMENSIONAL

R.C.C. SILVA
L. LANDAU
e
F.L.B. RIBEIRO

*Programa de Engenharia Civil
COPPE/UFRJ
Caixa Postal 68506 - 21945 - 970
Rio de Janeiro, Brasil*

SUMÁRIO

Neste trabalho apresenta-se uma estratégia h-adaptativa para problemas de elasticidade bidimensional, discretizados por elementos finitos triangulares lineares, considerando a não linearidade do material. Esta estratégia é baseada na técnica de remalhamento (*remeshing*) onde, através de estimativa de erro a posteriori, se prediz o tamanho do elemento necessário para atingir um nível de precisão pré-especificado. O comportamento não linear do material é tratado através do modelo de subcamadas, não se limitando portanto a modelos bilineares.

SUMMARY

In this work an h-adaptive strategy for 2D elasticity is presented, using linear triangular elements and considering material non-linearity. This strategy is based on a remeshing technique where the size of the required element for a specific accuracy is provided by an a posteriori error estimation. The non-linear material behaviour is considered using a layered model and is not limited to bilinear models.

INTRODUÇÃO

Apesar do método de elementos finitos ser a técnica de aproximação de maior impacto na área de métodos numéricos, aplicados a problemas de engenharia, suas análises convencionais exigem grande esforço e experiência por parte dos analistas, principalmente em aplicações industriais envolvendo análises não lineares. Sendo assim, a automatização de procedimentos, visando à análise de erro e refinamento (automático) adaptativo, torna-se uma questão fundamental para o aperfeiçoamento e consolidação do método.

Recibido: Enero 1995

A estratégia h-adaptativa apresentada é utilizada ao longo do processo incremental de problemas de elasticidade, considerando a não linearidade física do material. A malha final, discretizada por elementos triangulares lineares, deverá atingir um nível de erro predeterminado pelo usuário. Duas alternativas de implementação do método h são freqüentemente utilizadas. Na primeira, a malha é sucessivamente refinada até a obtenção do nível de precisão desejado. Neste caso, o elemento a ser refinado é identificado através de um critério apropriado. A outra prediz o tamanho do elemento necessário para que o nível de precisão preestabelecido seja atingido. No caso não linear optou-se por esta última técnica, pois é, a princípio, computacionalmente mais econômica, já que evita a análise durante os sucessivos passos necessários para a obtenção da malha final. Utilizou-se uma estimativa de erro *a posteriori* baseada nos conceitos propostos por Zienkiewicz e Zhu, que implica na recuperação de um campo contínuo de tensões suavizadas para substituir o campo exato de tensões não conhecido. Neste trabalho, adotou-se a técnica conhecida como *superconvergent patch recovery* (SPR) para a recuperação do campo de tensões. Finalmente, o comportamento do material foi tratado através do modelo de subcamadas.

MODELO MATEMÁTICO

As equações básicas necessárias para a resolução de um problema estático bidimensional não linear podem ser deduzidas através do princípio dos trabalhos virtuais. Considera-se que para um corpo em equilíbrio (domínio Ω), sob a ação de forças de volume \mathbf{b} , e forças de superfície $\bar{\mathbf{t}}$ em Γ_σ , o trabalho virtual das forças externas é igual ao trabalho virtual das forças internas, para todo campo de deslocamento virtual $\delta \mathbf{u}$ que se anule no contorno Γ_u , onde o deslocamento \mathbf{u} é prescrito ($\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ em Γ_u). Então,

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \delta \mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (1)$$

Em (1) $\boldsymbol{\varepsilon}$ representa as deformações e $\boldsymbol{\sigma}$ as tensões.

MODELO DISCRETO

Utilizando os procedimentos normais de discretização do método de elementos finitos foram obtidas as seguintes expressões para os deslocamentos e deformações no elemento:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \quad (2)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \delta \mathbf{u} \quad (3)$$

onde a matriz \mathbf{N} contém as funções de interpolação, $\bar{\mathbf{u}}$ são os valores nodais da solução aproximada e \mathbf{L} é o operador diferencial linear. Substituindo-se (2) e (3) em (1),

considerando que a expressão assim obtida é válida para qualquer valor arbitrário de $\delta \bar{\mathbf{u}}$, tem-se

$$\int_{\Omega} (\mathbf{LN})^T \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (4)$$

Devido a não linearidade do material existirão forças residuais Ψ , tais que

$$\Psi = \mathbf{P} - \mathbf{F} \neq 0 \quad (5)$$

onde \mathbf{P} and \mathbf{F} representam os vetores de forças internas e os de forças externas determinados, respectivamente, pelas parcelas do lado esquerdo e do direito de equação (4). Neste caso, para que se obtenha o equilíbrio estático, a análise deve ser realizada até que as forças residuais se anulem.

Técnicas de solução

O método utilizado para a obtenção da resposta não linear de um problema estático é essencialmente incremental. Assume-se que para uma determinada intensidade de carga (αm), a solução (\mathbf{u}_m) é conhecida e procura-se a solução ($\mathbf{u}_m + \Delta \mathbf{u}_m$) para o nível de carga posterior ($\alpha m + \Delta \alpha m$).

A solução através de método puramente incremental está sujeita a erros que vão se acumulando a cada passo da análise. Para contornar este inconveniente, pode-se utilizar um método iterativo tangente. Este método consiste em se obter uma melhor aproximação de \mathbf{u} , utilizando uma expansão de Ψ através de séries de Taylor. Obtém-se, então, uma formulação incremental-iterativa para solucionar problemas não lineares na forma

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{u}_{m+1}^n) \cdot \Delta \mathbf{u}_{m+1}^n = \alpha_{m+1} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{P}(\mathbf{u}_{m+1}^n) \quad (6)$$

onde m e n representam, respectivamente, um contador de incrementos de carga e um contador de iterações e \mathbf{K}_t é a matriz de rigidez tangente.

Os novos deslocamentos são obtidos por

$$\mathbf{u}_{m+1}^{n+1} = \mathbf{u}_{m+1}^n + \Delta \mathbf{u}_{m+1}^n \quad (7)$$

A análise é realizada para este nível de carga até que se obtenha a convergência para uma tolerância pré-especificada.

Critério de escoamento

O critério de escoamento de Von Mises (Owen, Hinton³) é dado por

$$f = \sigma_e - \sigma_0 = \sqrt{3} \cdot J_2^{1/2} - \sigma_0 \quad (8)$$

onde σ_e é a tensão efetiva; σ_0 , a tensão de escoamento da superfície e J_2 , o segundo invariante do estado desviatório.

Foi considerado um endurecimento linear para o material, isto implica que, após o escoamento, as superfícies subsequentes possuem uma tensão de escoamento maior

do que a da superfície anterior. Além disso, considerou-se que o material com carregamento cíclico, possui um comportamento cinemático, isto é, as superfícies de escoamento preservam sua forma e orientação, mas transladam no espaço das tensões como um corpo rígido.

Para que o fluxo plástico ocorra ($\Delta\lambda \neq 0$), as tensões devem permanecer na superfície de escoamento ($\Delta f = 0$). Pode-se considerar, utilizando uma lei associativa, que as deformações plásticas ($\Delta\epsilon_p = \Delta\lambda \cdot \mathbf{a}$) ocorrem em uma direção normal à superfície de escoamento ($\mathbf{a} = \delta f / \delta \boldsymbol{\sigma}$). Encontra-se demonstrado (Crisfield¹) que para as considerações acima é válida a expressão

$$\Delta f = \mathbf{a}^T \cdot \Delta \boldsymbol{\sigma} - H' \cdot \Delta \lambda = 0 \quad (9)$$

com

$$\Delta \lambda = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \Delta \boldsymbol{\epsilon} / (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{a} + H') = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \Delta \boldsymbol{\epsilon} / (3\mu + H') \quad (10)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva, $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$ é o incremento total de deformação, H' é o módulo plástico e $\mu = E/2(1 + \nu)$ é a constante de Lamé, onde E representa o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson.

Modelo elasto-plástico de subcamadas

O comportamento cinemático pode ser simulado através do modelo de subcamadas. Este modelo consiste em assumir que o sólido seja composto de várias subcamadas, sendo cada uma constituída de um material elasto-plástico perfeito. Estas subcamadas possuem propriedades diferentes (espessura e tensão de escoamento), porém estão sujeitas a uma mesma deformação (Owen et al²). Optou-se pela utilização da curva característica de um material bilinear para exemplificar a dedução das espessuras das subcamadas, embora o modelo permita a análise de materiais com curva tensão-deformação complexa. Neste caso, um estado de tensão ($\boldsymbol{\sigma}_p$) superior ao estado limite de escoamento ($\boldsymbol{\sigma}_1$) pode ser escrito na forma

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \boldsymbol{\sigma}_1 + \Delta \boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{D} \cdot (\Delta \boldsymbol{\epsilon} - \Delta \lambda \cdot \mathbf{a}) \quad (11)$$

Considerando $\Delta \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_p - \boldsymbol{\epsilon}_1$, onde $\boldsymbol{\epsilon}_p$ e $\boldsymbol{\epsilon}_1$ são as deformações correspondentes às tensões $\boldsymbol{\sigma}_p$ e $\boldsymbol{\sigma}_1$, e substituindo (10) em (11), tem-se

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1 + [H' / (3\mu + H')] \cdot \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_p - \boldsymbol{\epsilon}_1) \quad (12)$$

que pode ser reescrito de uma forma genérica como

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot t_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot t_2 \quad (13)$$

onde t e $\boldsymbol{\sigma}$ para cada subcamada representam, respectivamente, a espessura e o estado de tensão.

$$t_1 = 1 - [H' / (3\mu + H')] \quad \text{e} \quad t_2 = [H' / (3\mu + H')] \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_p \quad (15)$$

Considerando um estado de deformação total ε qualquer, obtém-se um estado de tensão teste (σ^t) com $\sigma^t = \mathbf{D} \cdot \varepsilon$. A tensão total (σ) é obtida somando as diferentes contribuições de cada subcamada. Podem ocorrer duas situações: se a tensão efetiva teste σ_e^t (8) for menor do que a tensão de escoamento (σ_{oi}), então o material tem um comportamento elástico e a contribuição para a subcamada i é σ^t ; se σ_e^t for maior do que a tensão de escoamento (σ_{oi}), então houve plastificação e o estado de tensão deve retornar à superfície de escoamento da subcamada i . O retorno à superfície de escoamento foi realizado através da técnica de retorno radial (Crisfield¹).

ESTRATÉGIA ADAPTATIVA

Com o intuito de aprimorar a qualidade da solução numérica, utilizou-se uma estratégia h-adaptativa via *remeshing*, baseada em estimativas de erro *a posteriori*. Esta estratégia consiste em prever o tamanho necessário de alguns elementos, identificados através de um critério apropriado, de tal forma que a malha final atinja o nível de erro predeterminado.

Estimativa de erro

A estimativa de erro desenvolvida por Zienkiewicz e Zhu e conhecida como Z^2 consiste em substituir o campo de tensões exatas (σ), desconhecido, por um campo suavizado contínuo (σ^*) obtido segundo uma interpolação de seus valores nodais ($\bar{\sigma}^*$), aproximação esta igual à realizada para os deslocamentos em (2). O erro aproximado, associado à solução numérica, pode ser definido como sendo a função que determina a diferença entre o campo contínuo e o campo de tensões aproximadas (σ_h). Utilizando a norma de L_2 para determinar a magnitude do erro aproximado, tem-se

$$\|\hat{e}\|^2 = \|\sigma^* - \sigma_h\|^2 = \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_h)^T \cdot (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega \quad (16)$$

Sendo $\|\hat{e}\|$ um escalar positivo, ele pode ser avaliado em todo o domínio ou em subdomínios (elementos) do problema.

Pode-se definir um erro médio aproximado como sendo

$$\hat{e}_m^2 = \sum_{i=1}^n \|\hat{e}\|_i^2 / n \quad (17)$$

onde o índice i refere-se aos n elementos da malha. Como a ordem de grandeza da norma do erro depende das unidades empregadas no problema, procurou-se utilizar o conceito de erro relativo

$$\eta = \frac{\hat{e}_m \sqrt{n}}{\|\sigma^*\|} \quad (18)$$

Suavização das tensões

A estimativa de erro adotada depende da estratégia utilizada para a obtenção do campo contínuo de tensões. Optou-se pela técnica conhecida como *superconvergent patch recovery* (Zienkiewicz, Zhu⁶). O campo de tensões suavizadas, no interior de cada *patch* (conjunto de elementos que circundam um nó), é determinado através de uma expansão polinomial completa de grau p

$$\sigma^* = \mathbf{P} \cdot \mathbf{c} \quad (19)$$

onde \mathbf{P} é uma base do conjunto de todos os polinômios de grau p e \mathbf{c} contém os parâmetros a serem determinados para o problema em questão. Para funções lineares ($p = 1$) tem-se

$$\mathbf{P}(x, y) = [1, x, y] \quad (20)$$

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]^T \quad (21)$$

Os parâmetros \mathbf{c} são determinados através de um procedimento de ajuste, pelo processo dos mínimos quadrados, visando minimizar o quadrado das diferenças entre a expansão polinomial e o campo de tensões aproximadas nos pontos da amostragem (pontos de superconvergência). Para o elemento linear triangular, o ponto de superconvergência coincide com o baricentro do mesmo, ou seja, a tensão obtida através da análise numérica é mais precisa no baricentro do que em qualquer outro ponto deste elemento. O processo dos mínimos quadrados envolve a avaliação das derivadas parciais em relação a cada uma de suas variáveis, impondo-se a nulidade das mesmas. Obtém-se assim um sistema de equações que pode ser escrito de uma forma matricial

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad (22)$$

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^T(x_i, y_i) \cdot \mathbf{P}(x_i, y_i) \quad (23)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^T(x_i, y_i) \cdot \sigma_h(x_i, y_i) \quad (24)$$

onde o índice i refere-se aos n pontos de superconvergência do *patch* considerado para o nó j . O valor da tensão nodal do campo contínuo para este nó pode ser obtido diretamente por

$$\bar{\sigma}^*(x_j, y_j) = c_1 + c_2 x_j + c_3 y_j \quad (25)$$

Para a determinação dos coeficientes, é necessário que, no mínimo, três elementos concorram para o nó analisado. Para os nós de contorno, esta condição nem sempre é satisfeita, neste caso, utilizou-se a tensão média nodal.

Refinamento

Deseja-se obter uma malha *h*-adaptativa *via remeshing* que atenda a um nível de erro relativo preestabelecido ($\bar{\eta}$). Determinou-se então um parâmetro (ξ_i), por elemento, que é capaz de: identificar os elementos que devem ser subdivididos; prever o número de subdivisões necessárias (Ribeiro, Landau⁵). Sabe-se que o tamanho (*h*) do elemento decresce na taxa de 2^{ns} , onde *ns* é o número de subdivisões, e que, para elementos lineares o erro é proporcional ao tamanho. Ou seja,

$$\frac{h_i}{\bar{h}_i} = \frac{\|\hat{e}\|_i}{\bar{e}_m} = \xi_i = 2^{ns} \quad (26)$$

onde \bar{h}_i e \bar{e}_m representam, respectivamente, o tamanho e o erro médio de uma malha que satisfaz o erro relativo predeterminado $\bar{\eta}$. Obtendo o valor de \bar{e}_m através de (18) e substituindo em (26) temos

$$\xi_i = \frac{\|\hat{e}\|_i \cdot \sqrt{n}}{\bar{\eta} \|\sigma^*\|} = 2^{ns} \quad (27)$$

O número de subdivisões por elemento foi determinado por:

se	$\xi_i < 2$	$ns = 0;$
se	$2 \leq \xi_i < 4$	$ns = 1;$
se	$4 \leq \xi_i < 8$	$ns = 2;$
se	$8 \leq \xi_i < 16$	$ns = 3;$
se	$\xi_i \geq 16$	$ns = 4.$

Caso a malha não atinja o erro predeterminado, uma nova análise e, conseqüentemente, novas divisões deverão ser efetuadas.

ANÁLISE DE RESULTADOS

Para a análise numérica realizada, foi considerada uma viga curta em balanço (Figura 1), no estado plano de deformação, discretizada através de elementos triangulares lineares. A curva tensão-deformação do material, aproximada por seis trechos lineares, encontra-se representada na Figura 2, onde também foram indicadas a espessura (t_i) e a tensão de escoamento (σ_{oi}) de cada subcamada.

As análises adaptativas (estimativa de erro e refinamento) foram realizadas ao longo de dez incrementos de carga, sendo cada incremento igual a 0.1 ($\Delta\alpha = 0.1$). Estas análises foram executadas em cada passo de carga (αF_o), com exceção do primeiro, a partir da malha final obtida no passo anterior. Para o primeiro passo utilizou-se a malha inicial indicada na Figura 4.

Se a malha inicial for pouco refinada, provavelmente apenas uma análise não será suficiente para que a malha atinja o erro relativo predeterminado. Isto porque o critério de refinamento utilizado limita o número de subdivisões por análise. Observou-se que para o material elasto-plástico o erro relativo não se mantém constante durante todos os

passos de carga. De uma forma geral, este erro aumenta com a evolução da plastificação. Sendo assim, em algumas etapas da análise incremental o erro relativo preestabelecido foi ultrapassado, acarretando uma nova subdivisão da malha.

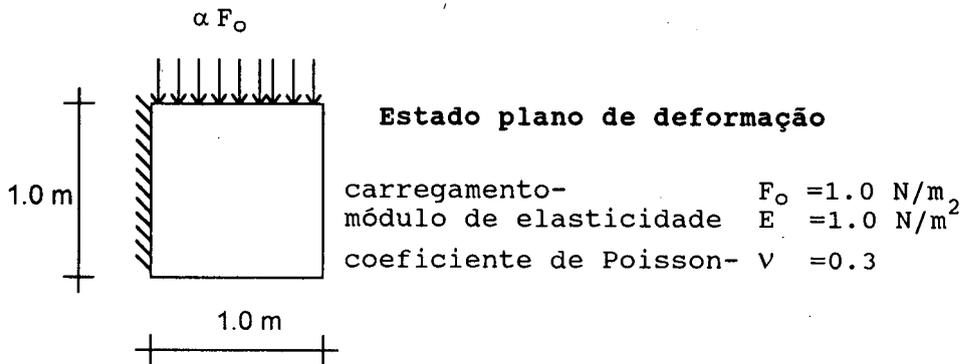


Figura 1. Viga curta em balanço

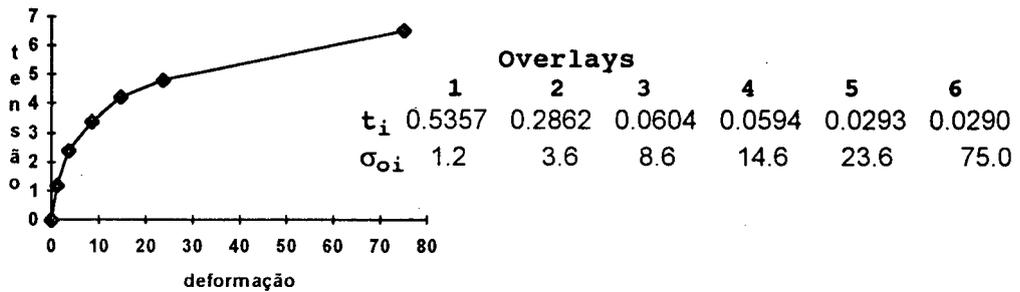


Figura 2. Curva tensão-deformação aproximada por seis overlays

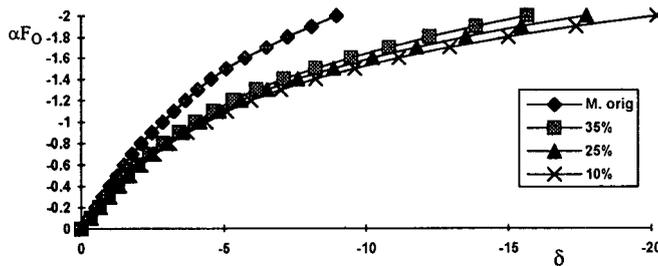


Figura 3. Curvas carga-deslocamento

Estão indicados na Tabela I, para todos os passos de carga, os erros relativos obtidos durante cada análise realizada, objetivando satisfazer o erro relativo predeterminado de 10%. O número de nós (NN) e o número de elementos (NE) para as malhas finais (última análise) encontram-se na mesma tabela.

Outras duas análises foram realizadas com o objetivo de atingir erros relativos de 35% e 25%. Encontram-se representadas na Figura 3 as curvas carga-deslocamento para as malhas adaptativas finais (Figura 4) e para a malha inicial. Foi considerado o deslocamento (δ) na direção vertical do nó situado no canto superior direito da viga curta.

α	Análise				NN	NE
	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a		
0.1	58.30	22.62	11.13	8.86	532	964
0.2	8.89				532	964
0.3	8.98				532	964
0.4	9.11				532	964
0.5	9.36				532	964
0.6	9.73				532	964
0.7	10.29	8.71			653	1199
0.8	9.27				653	1199
0.9	9.90				653	1199
1.0	10.59	9.14			834	1552

TABELA I. Erros relativos (%) e malhas obtidas durante a análise adaptativa com erro relativo de 10%

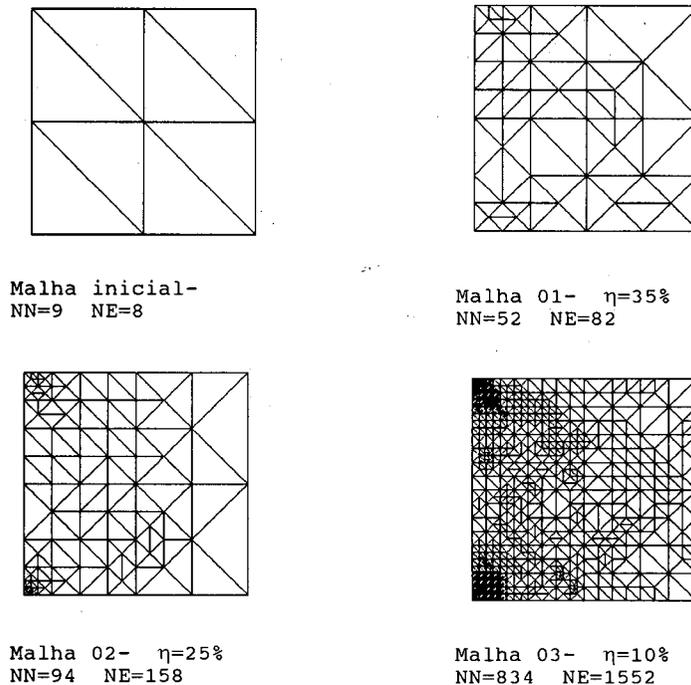


Figura 4. Malha inicial e malhas adaptativas finais

CONCLUSÃO

A estratégia adaptativa utilizada neste trabalho para a análise elasto-plástica bidimensional, onde a evolução das regiões plastificadas ao longo do carregamento implica na variação dos erros relativos, mostrou-se capaz de manter e recuperar o padrão de refinamento necessário para o nível de erro desejado. A utilização do modelo de subcamadas, em conjunto com elementos triangulares lineares, possibilitou que a redefinição da malha fosse realizada de forma ágil e versátil, atendendo à estratégia adaptativa proposta.

Os resultados obtidos permitem e exigem que se dê continuidade à investigação de, por exemplo, outras alternativas para os estimadores de erro e suavização (recuperação através de pós-processamento) do campo de tensões (Perić et al⁴) e esquemas de desrefinamento para o carregamento cíclico. Com isso será possível em futuro próximo a implementação de procedimentos numéricos capazes de realizarem análises dinâmicas elasto-plásticas através, também, de técnicas adaptativas.

REFERÊNCIAS

1. M. A. Crisfield, “*Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structure*”, John Wiley&Sons, England, (1991).
2. D.R.J. Owen, A. Prakash, O.C. Zienkiewicz, “Finite Element Analysis of Non-linear Composite Materials Use of Overlay Systems”, *Computers and Structures*, Vol. 4, pp. 1251–1267, (1974).
3. D.R.J. Owen, E. Hinton, “*Finite Elements in Plasticity—Theory and Practice*”, Pineridge Press, Swansea, (1980).
4. D. Perić, J. Yu, D.R.J. Owen, “On Error Estimates and Adaptivity in Elastoplastic Solids: Applications to the Numerical Simulation of Strain Localization in Classical and Crosserat Continua”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 1351–1379, (1994).
5. F.L.B. Ribeiro, L. Landau, “An H-refinement Strategy for Convection Dominated Problems Using Triangular Finite Elements”, *Anais XIV-CILAMCE*, Vol. 2, pp. 713–722, (1993).
6. O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, “The Superconvergent Patch Recovery (SPR) and Adaptive Finite Element Refinement”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 101, pp. 207–224, (1992).