

MODELO DINAMICO DE PROCESOS DE LODOS ACTIVOS

M. GIL RODRIGUEZ
*Centro de Investigaciones del Agua,
Consejo Superior de Investigaciones Científicas,
La Poveda, Arganda del Rey,
28500 Madrid.*

RESUMEN

Una Estación Depuradora de Aguas Residuales (E.D.A.R.) urbanas consta de una serie variable de etapas de proceso, cuyo objetivo es liberar de estas aguas negras la mayor cantidad de sustancias, ya disueltas o en suspensión.

En este artículo nos centraremos en el Tratamiento Secundario, etapa en la que se eliminan las materias disueltas biodegradables de las aguas residuales, por acción de los microorganismos presentes en los lodos activos. La configuración a estudiar comprende al digestor aerobio y sedimentador. Se exponen las ecuaciones que describen este sistema.

SUMMARY

A domestic wastewater treatment plant is composed of variable elements of process, their target is remove of these black waters the biggest ammount of dissolved and susended materials.

In this paper we are concerned with secondary treatment. This step removes biodegradable dissolved materials currently in these waters. The microorganisms action of activated sludge remove biodegradable dissolved compounds presents in these waters. An aerobic digester and clarifier is modeled.

MODELO MATEMATICO DEL REACTOR BIOLOGICO

El proceso de lodos activos consiste en la eliminación de sustancias biodegradables por microorganismos en un reactor aireado. Esta es una reacción autocatalítica en la que la materia orgánica es oxidada, actuando los microorganismos de catalizador, en la que ellos mismos son producto de la reacción.

La corriente del aireador pasa a sedimentación en donde los lodos son separados, recirculando al aireador su mayor parte, mientras que una fracción pasa a tratamiento de lodos.

La fracción de lodos separada determina la edad de lodos, que es el cociente de la masa de lodos en el sistema entre la masa de ellos eliminada por día. La edad de los lodos determina aspectos tales como su sedimentación o posibilidad de nitrificación. Para su control se necesita la medida de caudales y sólidos suspendidos, su valor suele fijarse entre 4 y 10 días.

Recibido: Diciembre 1988

Por la aireación del contenido del digestor aerobio se considera como aproximación a un reactor de mezcla completa.

La cinética de proliferación de gérmenes con un sustrato limitante está descrita según Monod⁵:

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{\mu S}{S + K_s} - K_d \right) X \quad (1)$$

siendo

- X = Concentración de lodos activos (mg/l).
- μ = Tasa máxima de crecimiento (h^{-1}).
- S = Concentración del sustrato biodegradable (mg/l).
- K_s = Coeficientes de saturación (mg/l).
- K_d = Coeficiente de degradación (mg/l).

La influencia de la temperatura en μ es:

$$\mu_T = \mu_{20} \theta^{(T-20)}$$

θ es un coeficiente cinético de temperatura cuyo valor está alrededor de la unidad.

Se acepta como la mayoría de los autores que la producción de biomasa a expensas del sustrato es directamente proporcional a la disminución de sustrato.

$$\delta X = -R \delta S \quad (2)$$

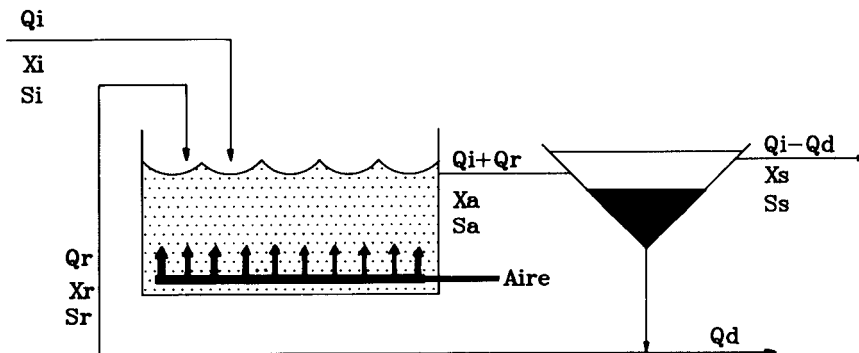


Figura 1. Esquema de tratamiento secundario.

La evolución del sustrato y lodos en el reactor aerobio se obtiene por aplicación de balances de materia.

El reactor está alimentado por un caudal Q_i de composición S_i y concentración de lodos X_i , así como del caudal de recirculación Q_r , S_r y X_r .

En el balance del sustrato tendremos que la acumulación en el digestor aerobio es:

$$V dS_a$$

Lo que le entra es:

$$Q_i S_i dt + Q_r S_r dt$$

Lo que sale es:

$$(Q_i + Q_r)S_a dt$$

Y lo que desaparece por asimilación es:

$$\frac{\mu}{R} \cdot \frac{S_a X_a}{S_a + K_s} V dt$$

La ecuación del sustrato es:

$$\frac{dS_a}{dt} = \frac{Q_i}{V} \cdot S_i + \frac{Q_r}{V} \cdot (S_r - S_a) - \frac{Q_i}{V} \cdot S_a - \frac{\mu}{R} \cdot \frac{S_a X_a}{S_a + K_s} V dt \quad (3)$$

De la misma manera se procede para los lodos. Obteniéndose la siguiente expresión:

$$\frac{dX_a}{dt} = \frac{Q_r}{V} \cdot X_r - \frac{Q_i + Q_r}{V} \cdot X_a + \left(\frac{\mu S_a}{S_a + K_s} - K_d \right) X_a \quad (4)$$

En esta última expresión se ha despreciado la cantidad de lodos aportados por el influente, ya que éste es una corriente sometida a tratamiento que incluye sedimentación.

Las ecuaciones (2) y (3) constituyen el modelo dinámico del aireador, permitiendo obtener la evolución de lodos y sustrato como función de las corrientes de entrada y recirculación⁷.

MODELO MATEMATICO DEL SEDIMENTADOR

La obtención de ecuaciones del sedimentador se basa en la hipótesis de Pflanz⁶ que considera el sedimentador como dos zonas homogéneas, una de clarificación y otra de sedimentación, de volúmenes V_1 y V_2 . Y que las corrientes de clarificación y de lodos transitan por el sedimentador con la misma dinámica, que en primera aproximación se describen por un retardo puro, R_1 y R_2 respectivamente.

La hipótesis de Pflanz consiste en suponer que la concentración de lodos separados del efluente, en estado de equilibrio, es proporcional al flujo de lodos que entran al decantador.

$$X_s^o = K(Q_i^o + Q_r^o) \frac{X_a^o}{A} \quad (5)$$

El superíndice ^o indica que las variables están tomadas en condiciones estáticas

K es un coeficiente comprendido entre 0.08 y 0.1.

A es el área de separación de fases.

Realizando un balance global del decantador en condiciones estáticas se obtiene:

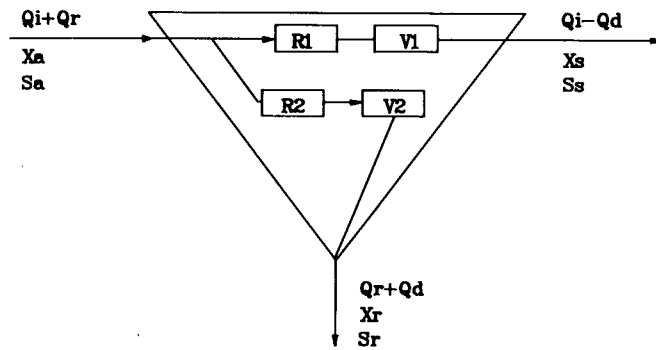


Figura 2. Simplificación del decantador.

$$\begin{array}{ccc}
 (Q_i^\circ + Q_r^\circ)X_a^\circ & = & (Q_i^\circ - Q_d^\circ)X_s^\circ + (Q_r^\circ + Q_d^\circ)X_r^\circ \\
 \text{Lodos que entran en} & & \text{Lodos en el} & & \text{Lodos de reciclo} \\
 \text{el decantador por} & & \text{effluente de} & & \text{y eliminación} \\
 \text{unidad de tiempo} & & \text{salida} & &
 \end{array} \tag{6}$$

De donde se obtiene la concentración de lodos espesados:

$$X_r^\circ = \frac{(Q_i^\circ + Q_r^\circ)}{(Q_r^\circ + Q_d^\circ)} \left(\frac{1 - K(Q_i^\circ - Q_d^\circ)}{A} \right) X_a^\circ \tag{7}$$

Como en el decantador se provoca la separación sólido-líquido la reacción biológica se reduce y aún disminuye más a causa de la falta de suministro de aire. Por lo que podemos considerar que:

$$S_a^\circ = S_r^\circ = S_s^\circ \tag{8}$$

Balance de sustrato en zona de clarificación:

$$V_1 dS_s = (Q_i - Q_d)S_a(t - R_1)dt - (Q_i - Q_d)S_s dt \tag{9}$$

Balance de lodos en la zona de clarificación:

$$V_2 dX_s = (Q_i - Q_d) \left(\frac{K}{A} \right) (Q_i(t - R_1) + Q_r(t - R_1))X_a Q_i(t - R_1)dt \tag{10}$$

Balance de sustrato en la zona de espesamientos:

$$V_2 dS_r = (Q_r + Q_d)S_a(t - R_2)dt - (Q_r + Q_d)S_r dt \tag{11}$$

Balance de lodos en la zona de espesamiento. Se efectúan los siguientes cambios variables para simplificación final.

$$\Gamma = \frac{Q_i(t - R_2) + Q_r(t - R_2)}{Q_r(t - R_2) + Q_d(t - R_2)}$$

$$\Sigma = 1 - \frac{(Q_i(t - R_2) - Q_d(t - R_2))K}{A} \tag{12}$$

$$V_2 dX_r = (Q_r + Q_d)\Gamma\Sigma X_a(t - R_2)dt - (Q_r + Q_d)X_r dt$$

Las ecuaciones (9),(10),(11) y (12) constituyen el modelo matemático del decantador.

MODELO MATEMATICO DEL TRATAMIENTO AEROBIO

Las ecuaciones (3), (4), (9), (10), (11) y (12) constituyen el modelo matemático del tratamiento secundario según el esquema de la Figura 1. Ecuaciones que reordenadas quedan como:

$$\frac{dS_i}{dt} = \frac{Q_1}{V}(S_r - S_a) - \frac{\mu S_a}{R(S_a + K_s)}X_a \tag{13}$$

$$\frac{dX_a}{dt} = \frac{Q_r X_r}{V} - \frac{(Q_i + Q_r)X_a}{V} + \frac{\mu S_a}{S_a + K_s}X_a \tag{14}$$

$$\frac{dS_a}{dt} = \frac{Q_i - Q_d}{V_1}(S_a(t - R_1) - S_s(t)) \tag{15}$$

$$\frac{dX_s}{dt} = \frac{Q_i - Q_d}{V_1}(1 - \Sigma)(X_a(t) - X_s(t - R_1)) \tag{16}$$

$$\frac{dS_r}{dt} = \frac{Q_r - Q_d}{V_2}(S_a(t - r_2) - S_r) \tag{17}$$

$$\frac{dX_r}{dt} = \frac{Q_r + Q_d}{V_2}(X_r - \Gamma\Sigma)X_a(t - R_2) \tag{18}$$

$$Q_d = \frac{V \cdot X_a + V_2 \cdot X_r}{E \cdot 24 \cdot X_r} \tag{19}$$

siendo *E* la edad de los lodos en días.

Ecuaciones que integradas para unas condiciones iniciales determinadas y con variables manipulables (*Q_r* y *E*) permitirán determinar el estado del sistema como función de las entradas (*Q_i*, *X_i* y *S_i*).

Para condiciones estáticas las derivadas se anulan y las variables retrasadas dejan de tener sentido. En estas condiciones del modelo dinámico y reordenando términos se obtiene según:

$$\frac{Q_i + Q_r}{V} \cdot \left(\Gamma - Q_r \left(1 - \frac{K(Q_i - Q_d)}{A} \right) \frac{X_a}{Q_r + Q_d} \right) = \frac{\mu S_a}{S_a + K_s} - K_d$$

$$B = \frac{Q_i + Q_r}{V} \cdot \left(1 - Q_r \left(\frac{K(Q_i - Q_r)}{A} \right) \frac{X_a}{Q_r + Q_d} + K_d \right)$$

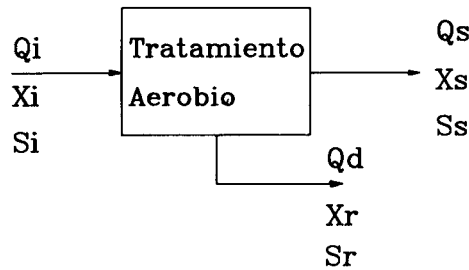


Figura 3. Entradas/salidas de tratamiento aerobio.

$$S_a = \frac{B \cdot K_s}{\mu - B} \quad (20)$$

$$X_a = \frac{\frac{Q_i}{V} \cdot (S_i - S_a) R}{B} \quad (21)$$

$$X_r = \frac{Q_i + Q_r}{Q_r + Q_d} \cdot \left(1 - \frac{K}{A} \cdot (Q_i - Q_d)\right) \cdot \frac{Q_i}{V} \cdot (S_i - S_a) \frac{R}{B} \quad (22)$$

$$X_s = \frac{K(Q_i + Q_r)}{A \cdot V \cdot B} \cdot (S_i - S_a) \cdot R \cdot Q_i \quad (23)$$

Ecuaciones que suministran información de lo que resultaría para unas condiciones dadas de funcionamiento del tratamiento aerobio considerado.

DETERMINACION DE RETRASOS

Las ecuaciones (9), (19), (11) y (12) contienen variables sometidas a retrasos, a continuación se muestra un método aproximado de cálculo de retrasos y un ejemplo ilustrativo.

El cálculo de una variable sujeta a un retraso puro se calcula teniendo en cuenta que la transformada de Laplace de un retraso puro es:

$$e^{-Ls}$$

En donde:

- e : es el número e .
- L : Tiempo de retraso.
- s : Variable compleja.

La aproximación¹ se basa en suponer la siguiente igualdad:

$$e^{-Ls} = \frac{1 - \frac{Ls}{2}}{1 + \frac{Ls}{2}} \quad (24)$$

de donde se obtiene:

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1 - \frac{Ls}{2}}{1 + \frac{Ls}{2}} \tag{25}$$

En donde:

$x(s)$: Variable de la que se realiza el retraso.

$y(s)$: Variable igual a $x(s)$ con retraso L .

Realizando la transformada inversa se obtiene:

$$y + \frac{L}{2} \cdot y' = x - \frac{L}{2} \cdot x' \tag{26}$$

de donde se obtiene la derivada de la variable retrasada:

$$y' = \frac{2(x - y)}{L} - x' \tag{27}$$

que integrada da:

$$y = \frac{2}{L} \cdot \int (x - y) dt - x \tag{28}$$

que se determina por integración numérica según el esquema de la Figura 4.

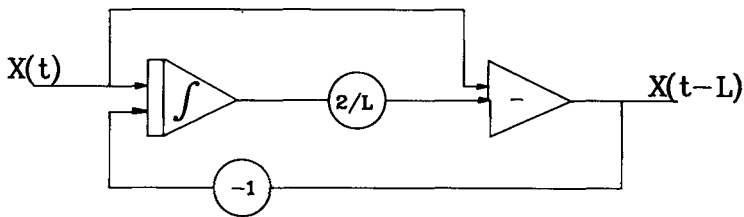


Figura 4. Diagrama de obtención de una variable con retraso.

El siguiente programa es una aplicación del método de integración de Runge-Kuta de 4º orden para integración de ecuaciones diferenciales al caso particular de la obtención de una variable con un retraso LL .

En donde se observa la bondad del método utilizado, salvo en los momentos iniciales a causa de que las condiciones iniciales de ambas ecuaciones diferenciales es la misma, lo que así se hizo para demostrar que se corrige pronto y con muy buena aproximación, pero si la condición inicial de la variable retrasada fuese la que le correspondería por cálculo, los valores de la variable con retraso serían los correctos desde el momento inicial.

```

'RUNGE-KUTA DE 4TO. ORDEN PARA RESOLUCION DE EC. DIFERENCIALES
  DIM X(100),F(50),K(4,50) : CLS : GOTO 20
10   '-----SUBROUTINA-----
      F(1)=2*T : LL=3
      F(2)=(X(1)-X(2))*2/LL-F(1) : RETURN
20   N=2 : T=0
      X(1)=0 : X(2)=0
      INPUT "DIME PASO DE INTEGRACION Y TIEMPO DE SIMULACION ";D,B
      INPUT "DIME INTERVALO PRESENTACION DE RESULTADOS ";R
      A=T : CON=0
      LPRINT"      t      f(t)      f(t-3)"
      FOR J=A TO B STEP D : GOTO 1000
30   LPRINT : LPRINT USING "#####.#";T,
      FOR I=1 TO N
          LPRINT USING"#####.#";X(I), : NEXT I
40   FOR I=1 TO N : X(N+I)=X(I) : NEXT I
      GOSUB 10 : CON=CON+1
      FOR I=1 TO N : K(1,I)=F(I) : NEXT I
      D1=D/2 : T=T+D1
      FOR L=1 TO 3
          T=T+INT(L/3)*D1
          FOR I=1 TO N
              X(I)=X(N+I)+D1*K(L,I)*INT(L/3+1)
          NEXT I
      GOSUB 10
      FOR I=1 TO N : K(L+1,I)=F(I) : NEXT I
      NEXT L
      FOR I=1 TO N
          X(I)=X(N+I)+D/6*(K(1,I)+2* K(2,I)+2*K(3,I)+K(4,I))
      NEXT I
      NEXT J      : LPRINT : END
1000 IF CON/R=INT (CON/R) THEN 30 ELSE 40

```

t	f(t)	f(t-3)
0.0	0.00	0.00
1.0	1.00	-0.62
2.0	4.00	-1.37
3.0	9.00	-1.22
4.0	16.00	0.37
5.0	25.00	3.68
6.0	36.00	8.84
7.0	49.00	15.92
8.0	64.00	24.96
9.0	81.00	35.98
10.0	100.00	48.99
11.0	121.00	63.99
12.0	144.00	81.00
13.0	169.00	100.00
14.0	196.00	121.00
15.0	225.00	144.00
16.0	256.00	169.00
17.0	289.00	196.00
18.0	324.01	225.00
19.0	361.00	256.00
20.0	400.00	289.00

REFERENCIAS

1. P.S. Buckley, "*Techniques of Process Control*", John Wiley, New York, (1964).
2. M. Gil Rodriguez, *Revista Técnica de Ingeniería Equipamiento y Procesos*, Vol. 3, No. 3, pp. 39-41, (1985).
3. J.M. Guillen y M. Gil Rodriguez, *Regulación y Mando Automático*, Vol. 93, pp. 40-46, (1979).
4. J.M. Guillen, M. Gil Rodriguez y M.A. Armada, *I Simposio Nacional sobre Modelado y Simulación en la Industria y Servicios Públicos*, pp. 355-358, Sevilla, (1980).
5. J. Monod, *Ann. Inst. Pasteur* 79, Vol. 4, pp. 390-410, (1950).
6. P. Pflanz, "*Advances in Water Pollution Research*", Pergamon Press, London, (1969).
7. J. Ranta y R. Hamalainen, "Simulation and Control of a Biological Wastewater Treatment System", *Report B25*, Helsinki University of Technology, Systems Theory Laboratory, (1975).