

UN MÉTODO DE PANELES PARA EL CÁLCULO DE LA RESISTENCIA DE OLA EN BARCOS

JORGE D'ELÍA
MARIO STORTI
y
SERGIO IDELSOHN

*Grupo de Tecnología Mecánica del INTEC
Universidad Nacional del Litoral y CONICET
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina
Tel./Fax: + 54-42-55 91 75 Fax: + 54-42-55 09 44
E-mail: jdelia@venus.unl.edu.ar*

RESUMEN

Presentamos un método de paneles para el cómputo linealizado del flujo potencial con una superficie libre, y el de la curva de resistencia de olas sobre un cuerpo con formas hidronavales en función del número de Froude. Las ecuaciones gobernantes del flujo potencial con una superficie libre son, la ecuación de Laplace para el potencial de velocidad, con condiciones de borde apropiadas, y la condición de superficie libre basada en la ecuación de Bernoulli. Sin embargo, el problema hidrodinámico resulta incompletamente formulado, en el sentido de Birkhoof¹, porque permite soluciones con ondas de superficie viajeras, que se propagan en ambas direcciones (corriente arriba y corriente abajo), donde las primeras son consideradas como sin significado físico y deben ser descartadas. La unicidad de la solución es recuperada mediante una extensión de la técnica de Dawson².

A PANEL METHOD FOR THE SHIP WAVE RESISTANCE PROBLEM

SUMMARY

We present a panel method for a linearized computation of the potential flow with a free surface, and the wave-resistance curve over a ship-like body as a function of the Froude number. The governing equations of the potential flow with a free surface are, the Laplace equation for the velocity potential with appropriate boundary conditions and the free surface condition based on the Bernoulli equation. However, the hydrodynamic problem is incompletely-posed, in the Birkhoof's sense¹, because allows solutions with trailing waves propagating in both (upstream and downstream) directions, where the first should be considered as non-physical and should be discarded. The unicity of the solution is recovered by means of an extension of the Dawson's technique².

Palabras claves: método de elementos de contorno, flujo potencial, superficie libre, resistencia de olas e hidrodinámica naval.

Recibido: Febrero 1997

INTRODUCCIÓN

El problema de la generación de olas y de la resistencia de onda (o de ola) sobre embarcaciones, es un antiguo problema en la ingeniería naval, y con el advenimiento tanto de los computadores digitales como de los métodos numéricos, hoy es posible tratarlo desde el punto de vista de la hidrodinámica computacional. La presencia de una superficie libre nos conduce a un problema con una no linealidad geométrica, y un modo clásico de tratarlo, es resolver una secuencia de problemas lineales, donde esperamos que sus soluciones convergan a la solución del problema original. En nuestro caso, la posición de la superficie libre es parte de las incógnitas. En este trabajo nos restringiremos en el problema linealizado, donde nuestra exposición procederá en las siguientes etapas: 1) una revisión de la formulación potencial para problemas con una superficie libre, 2) implementación numérica de la condición de superficie libre, 3) exploración de las posibilidades del método de Newton-Raphson (discreto y en el continuo), 4) adaptación del método de paneles en este problema, 5) y finalmente dos ensayos numéricos de validación del método, dados por un cilindro circular horizontal sumergido y un casco de ensayo de la serie Wigley.

FORMULACIÓN POTENCIAL EN FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE

Consideremos un cuerpo rígido de formas hidrodinámicas, con velocidad constante de avance sobre un fluido que ocupa la región $z < 0$ (fluido uniforme, calmo e infinitamente profundo), tal como lo esquematizamos en la Figura 1. La trayectoria del cuerpo es una recta paralela a la coordenada x , de modo tal que el cuerpo está parcial

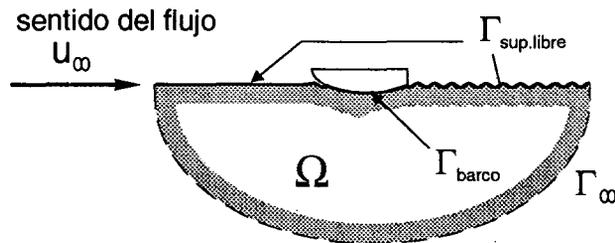


Figura 1. Cuerpo hidrodinámico con velocidad de avance constante, en un mar uniforme, calmo e infinitamente profundo

o totalmente sumergido en el fluido. A medida que la velocidad del cuerpo se incrementa, el campo de presión producido por el flujo perturba la superficie libre y se produce un cierto "patrón de olas". Aún con flujo invíscido una cierta energía debe ser suministrada por el cuerpo móvil, de modo de mantener dicho patrón, y esto sólo es posible si una fuerza de arrastre actúa sobre el cuerpo. Esta fuerza es denominada como "resistencia de onda", y es una de las componentes de la fuerza de arrastre que persiste aún para viscosidad despreciable, al igual que el arrastre de forma y el arrastre por onda de choque. La principal aplicación práctica la podemos encontrar en hidrodinámica

naval, donde las principales componentes de la fuerza de arrastre sobre embarcaciones de grandes dimensiones, son el arrastre de forma y la resistencia de onda.

Supongamos que debido a los usuales procesos disipativos, se alcanza una solución estacionaria para el patrón de olas. Entonces, el campo de velocidad estará gobernado por el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u} = \nabla\Phi \\ \Delta\Phi = 0 \end{array} \right\} \quad \text{en} \quad \Omega \quad (1)$$

donde $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ es la velocidad del fluido, $\Phi = \Phi(\mathbf{x})$ es el potencial total, con $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Las "condiciones de borde cinemáticas" son simplemente la condición de resbalamiento sobre la superficie libre y sobre la superficie mojada de la nave, y una condición equivalente en el borde al infinito

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \mathbf{u}_\infty \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{array} \right\} \quad \text{en} \quad \Gamma_{\text{libre}} + \Gamma_{\text{barco}} \quad (2)$$

Este sistema de ecuaciones es suficiente *si la posición de la superficie libre fuera conocida a priori*. Como este no es el caso, necesitamos agregar una condición de modo tal de ajustar la posición de la superficie libre. Primero, como hemos supuesto que el flujo es invíscido, recordemos que la ecuación de Bernoulli nos permite obtener la presión como una función de la velocidad $\nabla\Phi$ y de la altura z

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gz = \text{cte} \quad \text{en} \quad \Omega \quad (3)$$

El equilibrio mecánico de la interfase aire-agua, implica que la presión debe ser la misma en ambos lados de la interfase (despreciando la tensión superficial). Por otra parte, supondremos que la presión del aire es constante e igual a la presión atmosférica normalizada P_{atm} , de modo que

$$\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + g\eta = \text{cte} \quad \Gamma_{\text{libre}} \quad (4)$$

donde $\eta(x, y)$ es la elevación de la superficie con respecto a la posición de equilibrio hidrostático $z = 0$. Sin embargo, un análisis más detallado muestra que el problema hidrodinámico previo resulta incompletamente formulado, en el sentido de Birkhoof¹, y esto puede verse también mediante simples consideraciones de simetría. El sistema de ecuaciones previo es invariante bajo la inversión de coordenada $x \rightarrow -x$, de modo que si el cuerpo es también simétrico, entonces, para un dado par solución $\{\Phi(x, y, z), \eta(x, y)\}$ de las anteriores ecuaciones, entonces, el par reflejado $\{-\Phi(-x, y, z), \eta(-x, y)\}$ es también una solución (Figura 2). Pero, puede mostrarse que el arrastre para la solución reflejada es de igual módulo pero de sentido contrario al de la solución original, de modo que se nos presentan dos opciones: la solución es simétrica, y entonces el arrastre es nulo, o bien la solución del problema no es única, y una condición adicional deberemos imponer con el requisito de seleccionar aquellas soluciones que

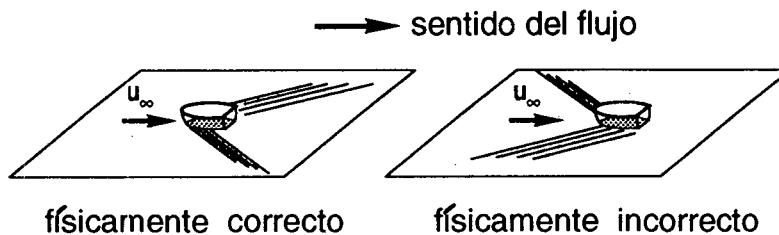


Figura 2. Los términos evaluados hacia *corriente arriba* permiten descartar las soluciones sin significado físico, y retener los patrones de olas que se propagan hacia corriente *abajo abajo*

tengan “sentido físico” que, entre otras consideraciones, deben conducir a un arrastre positivo (esto es, orientado corriente abajo). Usualmente, esta condición es impuesta mediante la adición de un término evaluado “corriente arriba” (upwind), o de “difusión numérica”. Para la ecuación del potencial completa, un método muy común es evaluar la “densidad corriente arriba” (upwind in density). En este método, la densidad es calculada en un punto ubicado a una pequeña distancia corriente arriba, del punto donde las velocidades son evaluadas. Esta pequeña distancia tiene que ser del mismo orden que el tamaño local de la malla. Inspirados en la mencionada técnica de la “densidad en corriente arriba” para flujo transónico Figura 3, hemos implementado un esquema análogo que hemos denominado “elevación en corriente arriba”, donde la condición dinámica sobre la superficie libre es reemplazada por

$$\frac{1}{2}|\nabla\Phi|_Q^2 + g\eta_P = \text{cte} \quad \Gamma_{\text{libre}} \tag{5}$$

donde P es un punto sobre la superficie, ligeramente desplazado corriente arriba del punto Q donde el término de energía cinética es evaluado (Figura 4).

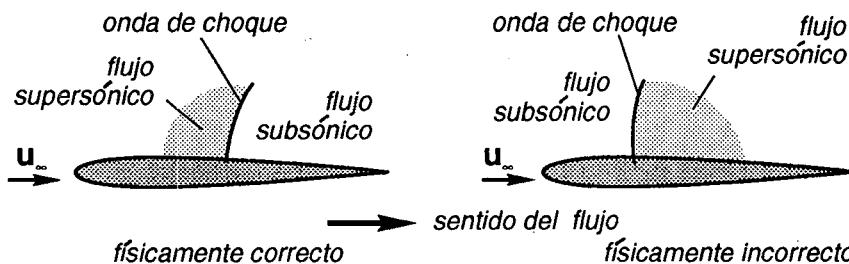


Figura 3. Las soluciones físicamente admisibles y los términos evaluados hacia *corriente arriba* muestran una cercana analogía en aerodinámica compresible

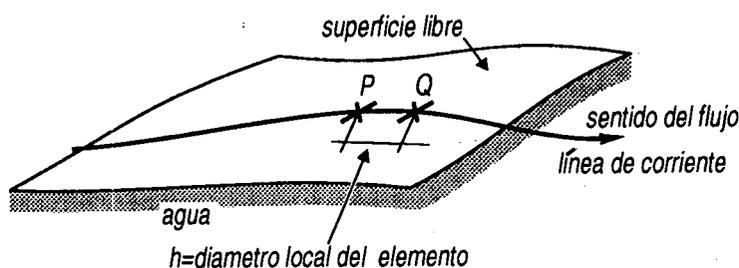


Figura 4. El método de la "elevación en corriente arriba" (upwind in elevation)

CONDICIÓN DE CONTORNO NUMÉRICA PARA LA SUPERFICIE LIBRE

Un análisis más detallado muestra que en el problema incremental, las ecuaciones discretizadas por el método de paneles pueden escribirse como

$$\mathbf{A}\mu' = \mathbf{C}(-\mathbf{D}\mu' + \mathbf{r}) \quad , \quad \mu' = -\phi \quad (6)$$

donde ϕ' , μ' son el potencial y la carga dipolar de perturbación, respectivamente, \mathbf{r} es el residuo discreto de la ecuación de Bernoulli, \mathbf{A} , \mathbf{C} son ciertas matrices de influencia propias del método de paneles (luego explicitadas), \mathbf{D} es la matriz derivada, versión discreta del operador derivada segunda a lo largo de las líneas de corriente, y es el término donde se suele introducir una cierta difusividad numérica, o lo que es equivalente, se la evalúa desplazada corriente arriba. Para hallar la carga dipolar μ' podemos resolver un sistema lineal, donde la matriz de coeficientes es $\mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{D}$. La matriz derivada \mathbf{D} es adimensionalizada por $K = U_\infty^2/g \propto Fr^{-2}$, donde $Fr = U_\infty/\sqrt{gL}$ es el número de Froude (adimensional), U_∞ es la rapidez del flujo en el infinito corriente arriba, g es la aceleración de la gravedad, y L es la longitud característica del problema (la eslora en una embarcación). Puede mostrarse que cuando el número de Froude Fr se incrementa, el término $\mathbf{C}\mathbf{D}$ tiende a inestabilizar el problema. Además, el número de condición de la matriz del sistema, depende sensiblemente de la cantidad de difusión numérica agregada en \mathbf{D} , esto es, de la escala de longitud usada en el desplazamiento corriente arriba.

TÉCNICA CUASI DAWSON PARA LA MATRIZ DERIVADA

Una opción para el cómputo de la matriz derivada \mathbf{D} , es a partir de una extensión de la técnica de Dawson². En su versión original, ésta ha sido propuesta en una formulación en velocidades, donde el operador de la derivada segunda \mathbf{D} evaluado en los centroides i , se discretiza mediante un esquema en diferencias finitas orientado corriente arriba, para una malla estructurada con paso constante h_x , donde la tercera derivada de la velocidad es descartada. En este trabajo, proponemos una extensión de la técnica de Dawson para una formulación potencial, y sobre una malla estructurada con paso variable, donde en consonancia con el esquema de Dawson, descartamos el aporte de la cuarta derivada en la aproximación del operador derivada segunda, mediante un

esquema en diferencias finitas orientado, y que es evaluado sobre el plano de referencia del problema linealizado (coincidente con el plano de equilibrio hidrostático). Si bien no expondremos en detalle el desarrollo para una malla de paso variable adjuntamos, a modo de ejemplo, los coeficientes que resultan para una malla de paso constante h_x

$$D_2\phi_i = \frac{5\phi_i - 14\phi_{i+1} + 14\phi_{i+2} - 6\phi_{i+3} + 1\phi_{i+4}}{2h_x^2} \quad (7)$$

EL MÉTODO DE PANELES

El método de paneles/BEM (por Boundary Element Method, Brebbia³) subyacente es descripto sumariamente en las siguientes secciones. Otras referencias de aplicación de este método en este problema son, por ejemplo, los trabajos de Broeze/Romate⁴, y Tahara/Stern⁵. Para una dada posición de la superficie libre, el potencial (de perturbación) ϕ sobre los paneles lo obtenemos resolviendo un sistema lineal de la forma $\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}$, donde $\boldsymbol{\mu} = -\phi$ es la carga dipolar, evaluada en los centroides de los paneles, $\boldsymbol{\sigma}$ es el flujo de masa a través de los paneles, \mathbf{A} , \mathbf{C} son sendas matrices cuadradas densas que dan cuenta de la influencia entre los paneles. El flujo de masa $\boldsymbol{\sigma}$ es conocido a partir de la solución no perturbada, donde usualmente se impone un flujo de velocidad constante $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty$, y entonces tendremos que resolver para la carga dipolar $\boldsymbol{\mu}$. Ahora bien, si la superficie es libre para ajustar su posición bajo la acción del campo gravitatorio, entonces hay un conjunto adicional de incógnitas dadas por las elevaciones de los nodos pertenecientes a la superficie libre $\boldsymbol{\eta}$. Pero los coeficientes de interacción dependen de la geometría de los paneles, de modo que el sistema de ecuaciones previo deberíamos reescribirlo como $\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\mu} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\eta})$, en cuyo caso tendremos que agregar las condiciones dinámicas dadas por las ecuaciones de Bernoulli (desplazadas corriente arriba), las cuales en forma discreta son de la forma $\mathbf{R}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}$. Ahora estas ecuaciones son un sistema no-lineal en el par $\{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}\}$, que tendremos que resolver con un método apropiado. En la siguiente sección propondremos para ello, una técnica basada en el método de Newton-Raphson.

LA TÉCNICA DE NEWTON-RAPHSON "DISCRETA"

Desde que la primera ecuación es lineal en $\boldsymbol{\mu}$, un método iterativo simple basado en la iteración de punto fijo, podría ser el siguiente

- 1) Elegir un campo de elevación inicial: $\boldsymbol{\eta}^0$, $n \leftarrow 0$
- 2) Hallar el campo potencial $\boldsymbol{\phi}^n$ con $\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}^n)\boldsymbol{\phi}^n = \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}^n)\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi}^n)$
- 3) Hallar una nueva posición de la superficie libre, resolviendo $\boldsymbol{\eta}^{n+1}$ con $\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}^{n+1}, \boldsymbol{\phi}^n) = \mathbf{0}$
- 4) Si no converge, entonces hacer $n \leftarrow (n + 1)$ e ir a 2)

Esta estrategia es simple e involucra sólo modificaciones menores en un código de paneles estándar, pero exhibe muy bajas tasa de convergencia aún para muy pequeñas elevaciones, donde el sistema es casi lineal. Por esta causa podríamos recurrir

a un algoritmo basado en Newton-Raphson, donde el cómputo de los incrementos $\{\Delta\boldsymbol{\mu}^{n+1}, \Delta\xi^{n+1}\}$ pueden ser obtenidos a partir de una ecuación de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & (\partial\mathbf{A}/\partial\xi)\boldsymbol{\mu} \\ (\partial\mathbf{R}/\partial\boldsymbol{\mu}) & (\partial\mathbf{R}/\partial\xi) \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\mu}^{n+1} \\ \Delta\xi^{n+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\xi)\boldsymbol{\mu} - \mathbf{C}(\xi)\boldsymbol{\sigma}(\xi) \\ \mathbf{R}(\xi, \boldsymbol{\mu}) \end{bmatrix}^n \quad (8)$$

Otra posibilidad es proponer un esquema de Newton-Raphson para las “ecuaciones del continuo” y luego discretizar tal sistema. El sistema resultante es diferente del anterior (porque la discretización y la solución por Newton-Raphson no conmutan) y muestra algunas ventajas. Primero, la formulación es por lejos mucho más simple, como luego veremos y, en segundo lugar, el número de incógnitas en el sistema es $2N_{sl} + N_b$, donde N_{sl} es el número de paneles en la superficie libre, y N_b es el número de paneles sobre la superficie mojada de la embarcación, mientras que en la segunda propuesta el número de incógnitas es simplemente $N_{sl} + N_b$. Desde que en general, $N_{sl} > N_b$ y en muchos casos de cómputos prácticos $N_{sl} \gg N_b$, la segunda propuesta permite significativos ahorros en los recursos computacionales.

EL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON “EN EL CONTINUO”

Supongamos ahora que disponemos de valores aproximados tanto para el campo de potencial (de perturbación) ϕ ($\Phi = \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{x} + \phi$), como para el campo de elevación $(\phi, \eta)^n$. Como es usual, esperamos que los valores de la iteración siguiente $(\phi, \eta)^{n+1}$ serán cercanos a la previa $(\phi, \eta)^n$, y en tal suposición podemos intentar una expansión a primer orden en los incrementos

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi^{n+1} - \phi^n \\ \eta' &= \eta^{n+1} - \eta^n \end{aligned} \quad (9)$$

Entonces, podemos re-escribir una ecuación de Bernoulli linealizada (y no desplazada corriente arriba) en la forma

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \phi' + g\eta' = \frac{1}{2}(u_\infty^2 - |\nabla \phi^n|^2) - g\eta^n = R_{\text{Bernoulli}}^n \quad (10)$$

Por otra parte, tenemos que hallar una expresión linealizada para el incremento de potencial $\Delta\phi$ cuando se produce una pequeña perturbación en la superficie libre $\Delta\eta$. Como ambos potenciales ϕ^n y ϕ^{n+1} deben ser armónicos, con condiciones de borde homogéneas en los bordes al infinito y sobre la embarcación, y como estos bordes no cambian con la perturbación sobre la superficie libre, podemos concluir que estas ecuaciones también se aplican para el incremento $\Delta\phi$. Lo único que cambia es la posición de la superficie libre, y nos resulta conveniente dar cuenta de esto mediante un término fuente en la condición de borde para el incremento. Esto puede implementarse mediante una técnica por “flujo de transpiración”, que a su vez puede identificarse como una técnica de perturbación por expansión⁶, y la podemos comprender fácilmente a partir de la Figura 5. Sea \mathbf{u}^n la velocidad en la iteración n correspondiente a la posición de la superficie libre dada por η^n . Entonces, una pequeña perturbación en la

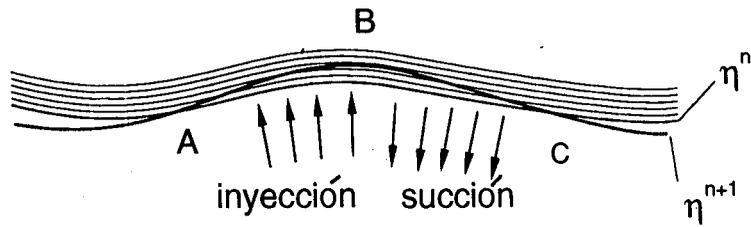


Figura 5. El método del "flujo de transpiración"

posición de la superficie libre $\Delta\eta$ puede ser simulada mediante, un flujo de "inyección" en aquellos puntos donde la nueva posición $\eta^{n+1} = \eta^n + \Delta\eta$ tiende a separarse de la vieja posición η^n , y un flujo de "succión" en aquellos puntos donde η^{n+1} tiende a aproximarse a η^n . Una perturbación por expansión muestra que un flujo de transpiración posible está dado por $\mathbf{u}^n \cdot \nabla \Delta\eta'$, y entonces el problema completo para Δ es

$$\begin{aligned} \Delta\phi' &= 0 & \text{en} & \quad \Omega \\ \frac{\partial\phi'}{\partial n} &= 0 & \text{en} & \quad \Gamma_{\text{barco}} \\ \frac{\partial\phi'}{\partial n} &= \mathbf{u}^n \cdot \nabla\eta' & \text{en} & \quad \Gamma_{\text{sup.libre}} \end{aligned} \tag{11}$$

Resolviendo para $\Delta\eta$ y reemplazando obtenemos una condición de borde para $\Delta\phi$

$$\frac{\partial\phi'}{\partial n} + \left[\left(\frac{1}{g} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \phi' \right) \right]_{\text{corr.arr.}} = \frac{1}{g} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) R_{\text{Bernoulli}} \tag{12}$$

Esta es una versión corriente arriba, como lo indica el subíndice en el segundo término del miembro izquierdo, la cual quiere significar que la cantidad dada debe ser evaluada a una pequeña distancia corriente arriba, a partir de la posición donde los otros términos son evaluados.

MÉTODO DE PANELES ESTÁNDAR Y EXTENDIDO

Método de paneles estándar

En el método de paneles/BEM estándar (BEM por Boundary Element Method, Brebbia³), consideramos un flujo potencial sin superficie libre. Mediante el tercer teorema de Green y la formulación de Morino⁷, obtenemos una representación integral para el potencial de velocidad (de perturbación) ϕ . Sobre la superficie del dominio, esta representación se reduce a una ecuación integral para las densidades superficiales de carga monopolar σ y dipolar μ . La primera es hallada por aplicación de la condición de borde (deslizamiento del flujo sobre las superficies de discontinuidad), y la segunda es la incógnita sobre la superficie del dominio. Para su discretización empleamos un método de paneles de bajo orden, que nos permite una integración analítica de los

coeficientes de influencia monopulares \mathbf{C} y dipolares \mathbf{A} , donde ambas son matrices densas en general. La superficie cerrada $\bar{\Gamma}$ la suponemos regular por partes (con campo de normales continuo por partes), e igual a $\bar{\Gamma} = \Gamma_\infty + \Gamma_p + \Gamma_b$, donde Γ_∞ es la superficie hacia infinito, Γ_p es el plano de referencia (o de equilibrio hidrostático), Γ_b es la superficie mojada de la embarcación. Esta superficie cerrada la aproximamos mediante una polihédrica finita $\bar{\Gamma}_n$, donde el plano de referencia es recortado a una distancia relativamente grande con respecto a la nave, y la superficie hacia infinito Γ_∞ está implícitamente incorporada en una formulación por paneles para regiones exteriores, como lo es en nuestro caso. Cada cara de la superficie polihédrica es un panel plano, usualmente cuadriláteros o triángulos. Mediante una técnica de colocación estándar en los centroides de los n paneles, podemos formar un sistema de n ecuaciones algebraicas linealmente independientes. En el problema del flujo básico, la posición de la superficie libre coincide con la de equilibrio hidrostático, el término fuente proviene de la condición de deslizamiento, y tendremos

$$\mathbf{H}_{nn}\boldsymbol{\mu}_n^0 = \mathbf{C}_{nn}\boldsymbol{\sigma}_n^0 \quad (13)$$

donde $\mathbf{H}_{nn} = 1/2\mathbf{I}_{nn} - \mathbf{A}_{nn}$ es la matriz del sistema, \mathbf{A}_{nn} , $\mathbf{C}_{nn} \in R^{n,n}$ son las matrices de influencia dipolar y monopolar, respectivamente, $\mathbf{I}_{nn} \in R^{n,n}$ es la matriz identidad, $\boldsymbol{\mu}_n^0, \boldsymbol{\sigma}_n^0 \in R^{n,1}$ son los vectores columna dipolar y monopolar, respectivamente, y n es tanto el número de paneles como el número de puntos de colocación (los centroides de los paneles).

Método de paneles extendido

Por otra parte, en el método de paneles/BEM extendido consideramos el flujo potencial con superficie libre, linealizado en el continuo. Para ello, modificamos ligeramente la formulación estándar, incorporando la matriz derivada \mathbf{D} (rala) y cambiando el término fuente, de modo de obtener un sistema lineal denso en función del número de Froude F_n , donde el "flujo de transpiración" $\boldsymbol{\sigma}_p^1$ sobre el plano de referencia (plano de equilibrio hidrostático) puede escribirse como

$$\boldsymbol{\sigma}_p^1 = \frac{1}{2g}(\mathbf{u}_v, \nabla u_v^2) + \frac{1}{g}(\mathbf{u}_v, \nabla)^2 \boldsymbol{\mu}_p^1 \quad (14)$$

Pero como estamos interesados en obtener el coeficiente de resistencia de onda C_w (adimensional), en función del número de Froude $F_n = U_0/\sqrt{gL}$, donde L es una longitud característica del problema, podemos introducir $\mathbf{u}_v = \alpha_v \mathbf{u}_{v1}$, donde α_v es un factor de velocidad (adimensional), \mathbf{u}_{v1} es el campo de velocidad sobre todo el plano de referencia del problema de flujo básico cuando en el infinito la velocidad es unitaria. Luego, el flujo de transpiración a inyectar sobre el plano de referencia lo podemos expresar como

$$\boldsymbol{\sigma}_p^1 = \frac{\alpha_v^3}{2g}(\mathbf{u}_{v1}, \nabla U_{v1}^2) + \frac{\alpha_v^2}{g}(\mathbf{u}_{v1}, \nabla)^2 \boldsymbol{\mu}_p^1 \quad ; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_F \quad (15)$$

Reemplazando y reordenando hallamos el siguiente sistema matricial de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{pp} - \mathbf{C}_{pp}\mathbf{D}_{pp} & \mathbf{A}_{pb} \\ \mathbf{A}_{bp} - \mathbf{C}_{bp}\mathbf{D}_{pp} & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_p^1 \\ \boldsymbol{\mu}_b^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{pp}\boldsymbol{\sigma}_p^0 \\ \mathbf{C}_{bp}\boldsymbol{\sigma}_p^0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_p^0 = (0, 5\alpha_v^3/g)(\mathbf{u}_{v1}, \nabla u_{v1}^2)$ es el vector fuente de inyección sobre el plano de referencia, $\boldsymbol{\mu}_p^1, \boldsymbol{\mu}_b^1$ son la densidad bipolar sobre el plano y sobre la nave, respectivamente,

$\mathbf{D}_{pp} = (\alpha_v^2/g)(\mathbf{u}_{v1}, \nabla)^2$ es la matriz derivada evaluada sobre la porción finita del plano, $\mathbf{A}_{pp}, \mathbf{A}_{bb}, \mathbf{C}_{pp}$ son los bloques de autoinfluencia (bipolar y monopolar) en las submallas del plano y de la nave, respectivamente, donde las bipolares incluyen la matriz identidad, mientras que $\mathbf{A}_{bp}, \mathbf{A}_{pb}, \mathbf{C}_{bp}, \mathbf{C}_{pb}$ son los bloques de acoplamiento (bipolar y monopolar) entre ambas submallas.

Matrices de influencia bipolar y monopolar

Suponemos que en cada panel ambas densidades superficiales de carga bipolar y monopolar son constantes, y por tanto, las podemos extraer fuera de los operadores integrales discretos $\mathbf{A}_{nn} = [A_{ij}]$ y $\mathbf{C}_{nn} = [C_{ij}]$, con $i, j = 1, 2, \dots, n$, y tendremos las siguientes definiciones

$$A_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} d\Gamma_j \frac{(\mathbf{n}_j, \mathbf{x}_{ij})}{r_{ij}^3}; \quad C_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} d\Gamma_j \frac{1}{r_{ij}} \quad (17)$$

donde $r_{ij} = \|\mathbf{x}_{ij}\|_2 = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}^j\|_2$ es la distancia euclídea desde el punto de integración variable $\mathbf{x}^j \in \Gamma_j$ sobre el panel j , de superficie Γ_j , al punto de colocación \mathbf{x}_i (centroide del panel i). En las condiciones asumidas podemos integrar ambas en forma cerrada mediante el teorema de Stokes, donde las integrales de superficie sobre cada panel fuente, las podemos reemplazar por integrales de línea sobre su perímetro cerrado λ_j de las m_j aristas, siguiendo una propuesta de Medina/Liggett⁸.

EJEMPLOS NUMÉRICOS

Cilindro circular horizontal sumergido

Como primer ejemplo, consideremos un cilindro de sección circular y en posición horizontal. La resistencia de onda analítica por unidad de longitud transversal W_L está dada por $W_L = (4\pi^2 g^3 \rho R^4 / U^4) \exp(-2gf/U^2)$, donde R es el radio del cilindro, f es la profundidad de su eje, g es la aceleración de la gravedad, U es la velocidad no perturbada infinito corriente arriba. En este caso el número de Froude es definido como $F = U/\sqrt{gf}$. En la Figura 6. mostramos el coeficiente de resistencia de ola analítico C_w en función del número de Froude F , para $R = 0.1, f = 1, g = 3$, comparado con la solución numérica obtenida por el método de paneles extendido para dos mallados, i) malla C_1 con 128×3 paneles sobre la superficie "libre", y 128 paneles sobre el cilindro, ii) malla C_2 con 512×3 paneles sobre la superficie "libre" y 128 paneles sobre el cilindro. Mientras que en la Figura 7 mostramos el potencial de perturbación ϕ_w y el

incremento de altura η en función de la coordenada x paralela al flujo externo impuesto, donde podemos observar que la altura de la ola es aproximadamente constante, como es de esperar en una propagación de onda 1D sin amortiguamiento.

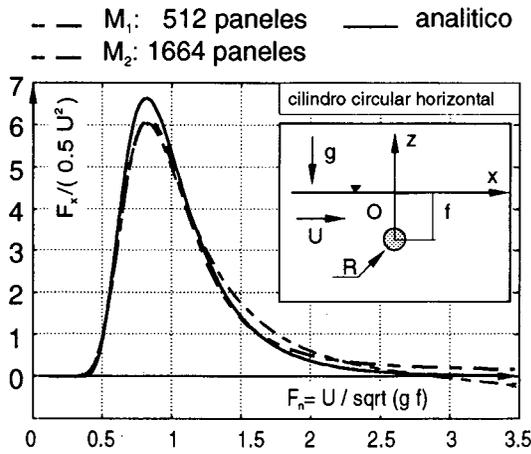


Figura 6. Coeficiente de arrastre de onda C_w en función del número de Froude F_n , para un cilindro circular horizontal sumergido

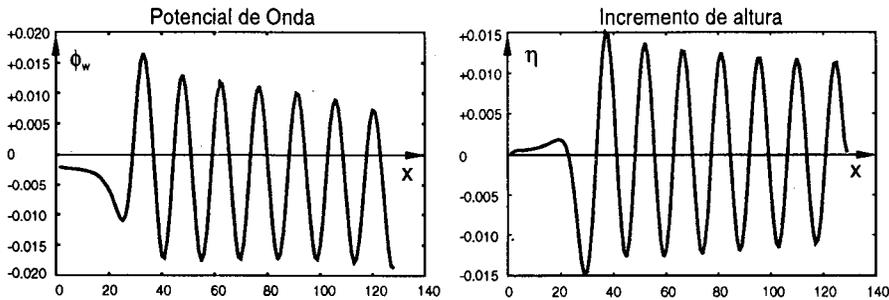


Figura 7. Gráfica del potencial de perturbación ϕ_w y de la altura de elevación η , para un cilindro circular horizontal

Casco Wigley, modelo 1805 A

Ahora consideremos el casco Wigley, modelo 1805 A, esquematizado en la Figura 8. Su semi-casco mojado está dado por la siguiente función analítica², donde $-L/2 \leq x \leq L/2$ es la eslora, y $-H \leq z \leq 0$ es el calado

$$y(x, z) = \frac{3B}{4} \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{L/2} \right)^2 \right] \left[1 - 0.6 \left(\frac{x}{L/2} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{z}{H} \right)^2 \right] \tag{18}$$

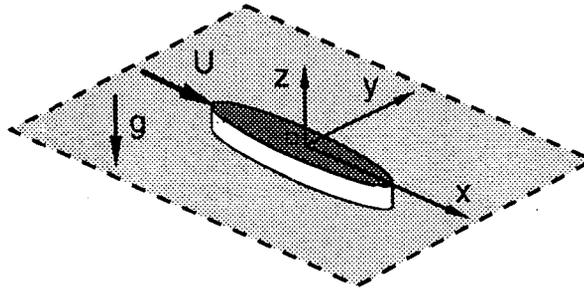


Figura 8. Esquema para el cómputo sobre modelos, en particular de la serie Wigley

Como coeficiente de resistencia de onda C_w , adoptamos¹⁰ el coeficiente Circular de Froude $C_w = R/R_0$, con $R_0 = (\pi/250)\rho\Omega_{eq}U^2$, donde $\Omega_{eq} = V^{2/3}$ es una sección equivalente obtenida a partir del volumen total V , ρ es la densidad del fluido, y U es la velocidad no perturbada. El volumen total para este modelo Wigley es $V = (44/75)LH$. En la solución numérica por el método de paneles extendido, con $L = 16$, $H = 1$, hemos considerado tres mallas estructuradas sobre el plano de referencia:

- a) la M_1 con 37×14 en el plano y 154 en el casco,
- b) la M_2 con 33×28 en el plano y 198 en el casco,
- c) la M_3 con 37×26 en el plano y 234 en el casco.

Por ejemplo, en las Figuras 9, 10, 11 y 12 mostramos la malla M_1 . Los coeficientes de resistencia de onda C_w (según la anterior definición) son mostrados en la Figura 13, donde graficamos: 1) los resultados numéricos con 484 paneles informados por Dawson², 2) los experimentos de Shearer sobre el modelo fijo^{2,10}, 3) los obtenidos por el método de paneles extendido implementado en este trabajo. Finalmente en las Figuras 14, 15, 16 y 17 hemos graficado las isolíneas del campo de elevación para los siguientes números de Froude $F = 0.40, 0.45, 0.60, 0.70$, donde también mostramos la envolvente teórica para una perturbación puntual viajera, de aproximadamente 19 grados 29 minutos.

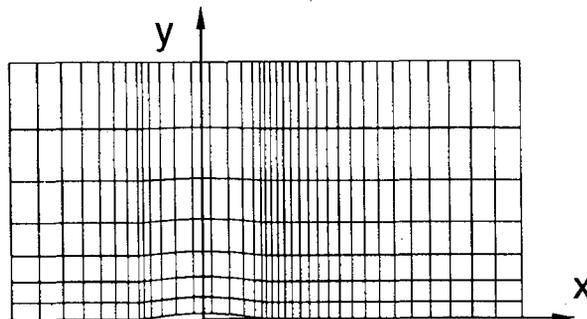


Figura 9. Vista xy de la mitad superior de la malla M_1 con 37×14 paneles sobre la superficie libre y 154 sobre el casco mojado, para el modelo Wigley 1805 A

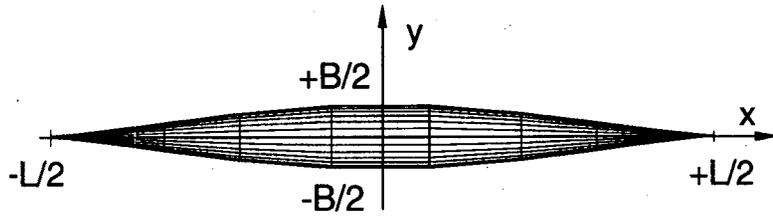


Figura 10. Vista xy de la malla M_1

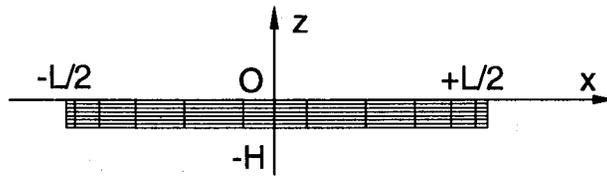


Figura 11. Vista xz de la malla M_1

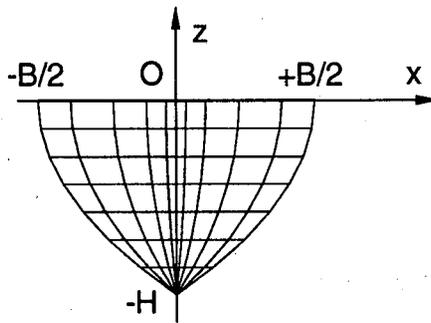


Figura 12. Vista yz de la malla M_1

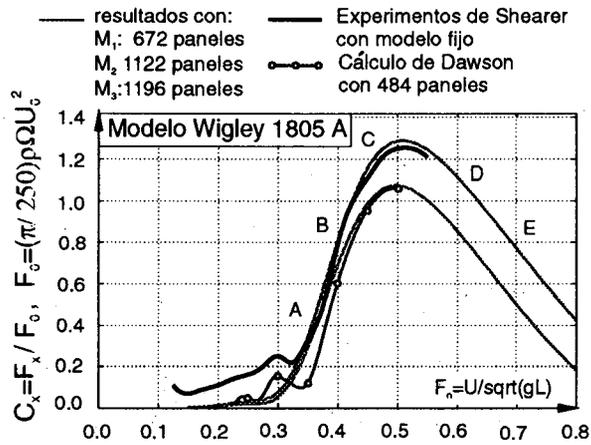


Figura 13. Coeficiente de resistencia de onda C_w para el modelo Wigley 1805 A

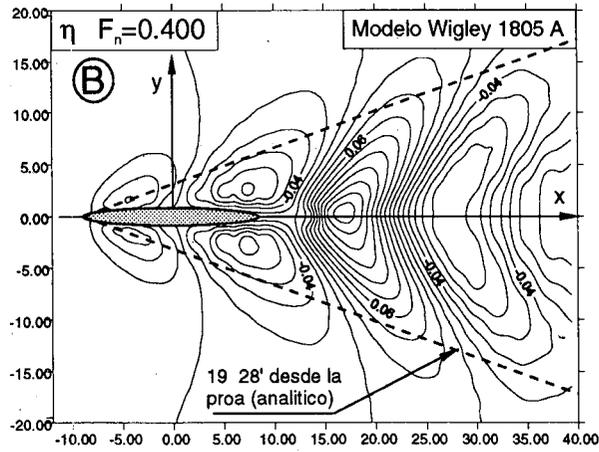


Figura 14. Isolíneas de elevación η para Froude $F_n = 0.40$, malla M_3 (punto B)

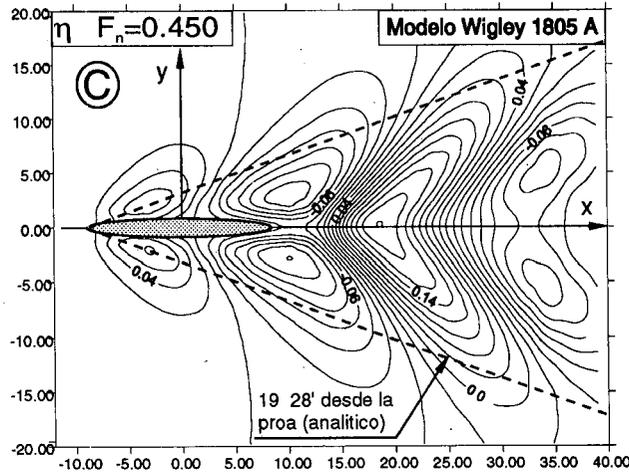


Figura 15. Isolíneas de elevación η para Froude $F_n = 0.45$, malla M_3 (punto C)

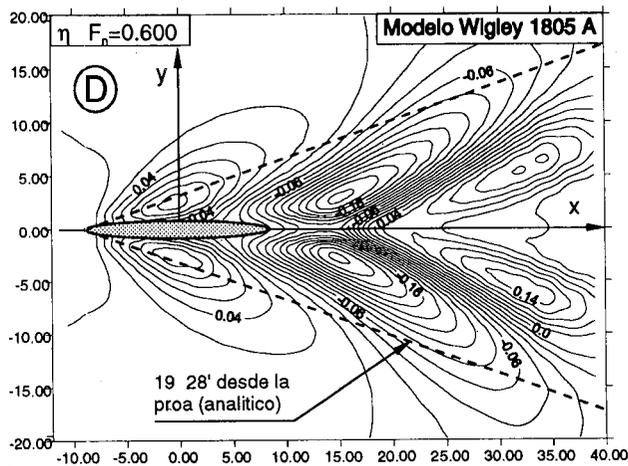


Figura 16. Isolíneas de elevación η para Froude $F_n = 0.60$, malla M_3 (punto D)

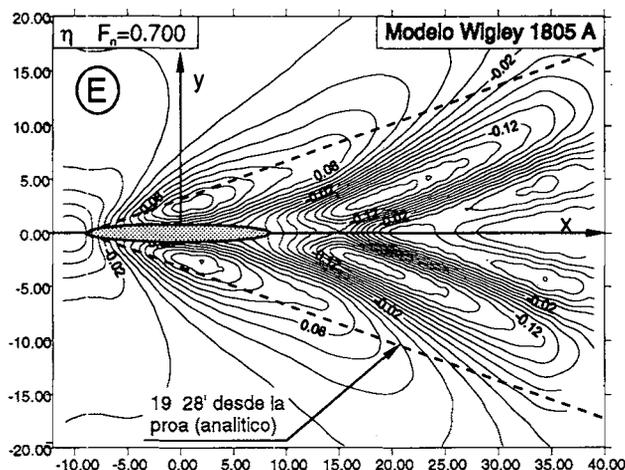


Figura 17. Isolíneas de elevación η para Froude $F_n = 0.70$, malla M_3 (punto E)

CONCLUSIONES

Se ha presentado un método de paneles/BEM extendido de bajo orden, para el trazado por puntos de la curva de resistencia de onda sobre embarcaciones, en función del número de Froude. La solución linealizada de este problema exige una extensión del método de paneles/BEM estándar, con el propósito de incorporar una condición de superficie libre linealizada. En este trabajo, esto hemos elegido hacerlo mediante, i) una linealización *en el continuo* de las ecuaciones para luego discretizar por paneles, ii) una técnica por *flujo de transpiración* para el operador de superficie, donde su relativa complejidad dificulta su discretización por otros métodos más difundidos, como el de elementos finitos o el de las diferencias finitas. Finalmente, consideramos que un método de paneles extendido constituye una herramienta práctica en cálculo industrial porque, i) permite un trazado relativamente muy rápido, en tiempos de CPU, de la curva de resistencia de onda, ii) facilita substancialmente el problema del mallado y su verificación, porque sólo debe discretizarse las superficies del casco mojado de la nave y la de una porción finita del plano de equilibrio hidrostático del agua, lo cual constituye una valiosa propiedad en problemas de flujo tridimensionales.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su gratitud al *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas* (CONICET, Argentina) por su financiación y al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE, Barcelona, España) por su gentil colaboración.

REFERENCIAS

1. Birkhoof G., "*Hydrodynamics*", Greenwood Press Publishers, reimpresso, (1978).
2. C.W. Dawson, "A Practical Computer Method for Solving Ship-Wave Problems", *Proceedings 2nd International Conference on Numerical Ships Hydrodynamics*, Berkeley, C.A., pp. 30, (1977).
3. C.A. Brebbia (Ed.), "*Topics in Boundary Elements Research*" Vol. 1,2,3,5, Springer Verlag, (1984).
4. J. Broeze and J.E. Romate, "Absorbing Boundary Conditions for Free Surface Wave Simulations with a Panel Method", *Jour. Comp. Physics*, Vol. **99**, pp. 146-158, (1992).
5. Y. Tahara y F. Stern, "An Interactive Approach for Calculating Ship Boundary Layers and Wakes for Nonzero Froude Number", *Journal of Comp. Physics*, Vol. **98**, pp. 33-53, (1992).
6. M. Van Dyke, "*Perturbation Methods on Fluid Mechanics*", The Parabolic Press, Stanford, (1975).
7. L. Morino (Ed.), "*Computational Methods in Potential Aerodynamics*", Springer-Verlag, (1985).
8. Medina D.E. y Liggett J.A., "Three-Dimensional Boundary Element Computation of Potential Flow in Fractured Rock", "*Int. Jour. for Num. Meth. in Enging*", Vol. **26**, pp. 2319-2330, (1988).
9. S. Ohring, "Three Dimensional Ship Wave Generation Using an Efficient Finite Difference Scheme with Double Model Linearization", *Jour. Comp. Physics*, Vol. **41**, pp. 89-114, (1981).
10. J.V. Wehausen, "The Wave Resistance of Ships", *Advances in Applied Mechanics*, Vol. **13**, pp. 93-245, (1973).