

# OPTIMIZACION DE FORMAS EN ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL EN MEDIOS HOMOGENEOS MEDIANTE EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

F. ESPIGA  
L. GRACIA  
y  
M. DOBLARE

*Dpto. de Ingeniería Mecánica,  
E.T.S. Ingenieros Industriales,  
Universidad de Zaragoza,  
Luciano Gracia s/n,  
50015 Zaragoza*

## RESUMEN

En este trabajo se aborda el problema de la optimización de forma de sólidos elásticos bidimensionales, considerando material isótropo u ortótropo, de cara a obtener una distribución de tensiones lo más uniforme posible en zonas del contorno especificadas. Para ello se calcula la tensión de Von Mises en la zona del contorno a optimizar, y a partir de ésta y de la tensión de referencia especificada se define la función objetivo. Como restricción se impone que el área del sólido en cuestión sea igual a un valor prefijado, aunque se contempla también la posibilidad de que no haya restricciones. Se detalla igualmente el algoritmo utilizado para resolver el problema de optimización no lineal resultante, incluyendo por último algunos ejemplos que ponen de manifiesto la validez de la formulación presentada.

## SUMMARY

In this work, the shape optimization problem for 2-D elastic orthotropic solids is formulated. The objective function is defined in order to obtain an almost uniform Von Mises stress distribution along specified boundary zones. The only constraint is the weight of the solid, although the unconstrained problem is also considered. The method used for the analysis of the section is the B.E.M. which has important advantages in this kind of problems. The complete formulation is also included as is the explanation in detail of the nonlinear optimization algorithm. Finally several examples and their conclusions are also presented.

Recibido: Noviembre 88

## INTRODUCCION

La necesidad de diseños mecánicos óptimos no es una exigencia reciente. Ya Galileo en su famosa obra "Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a Due Nuove Scienze" (1638) plantea el problema de encontrar la forma de una viga en la que la tensión sea la misma en cualquier sección transversal<sup>22</sup>. Posteriormente, diversos problemas de optimización atrajeron el interés de D. Bernoulli, L. Euler, Lagrange y Saint-Venant, entre otros.

Las aportaciones de los diferentes autores han hecho que las formas de los elementos que constituyen cualquier sistema mecánico hayan ido evolucionando en el sentido de obtener una transmisión de esfuerzos óptima con unos costes lo más reducidos posibles. Esta evolución en el diseño se ha producido, hasta hace un par de décadas, de forma lenta y discontinua, impulsada más por la intuición y experiencia del diseñador que por una aplicación general y rigurosa de los conceptos de Teoría de Optimización. No ha sido hasta muy recientemente que el tema de la obtención de diseños mecánicos óptimos ha despertado una atención importante en la comunidad científica internacional.

Diferentes razones cabe considerar en este creciente interés sobre este tema: el desarrollo de técnicas generales y potentes para el análisis de problemas complejos (método de los elementos finitos<sup>25</sup>, método de los elementos de contorno<sup>1,3</sup>); la aparición de nuevos algoritmos numéricos para optimización lineal y no lineal con una gran variedad de restricciones; y el uso de técnicas experimentales que permiten el chequeo de los resultados numéricos previos<sup>9</sup>.

Dentro del amplio campo de la optimización de elementos mecánicos, un tipo de problema que se encuentra actualmente en pleno auge es el de la optimización de formas.

El método de los elementos finitos ha sido ampliamente utilizado en los últimos años en la optimización de formas. Así, Zienkiewicz y Campbell<sup>26</sup> toman como variables de diseño las posiciones de los nodos de la malla de elementos finitos, derivan la matriz de rigidez y el vector de cargas con respecto a las variables de diseño, obteniendo las derivadas de las variables de estado. Finalmente, utilizan una secuencia de problemas de programación lineal como técnica de optimización.

Más recientemente, Chun y Haug<sup>5</sup> utilizan un método de proyección del gradiente como el presentado en [13], calculando los gradientes de manera análoga a Rousset y Haug<sup>21</sup>. El objetivo es minimizar el peso con restricciones concernientes a la tensión de Von Mises en el contorno.

Dems y Mroz<sup>7,8</sup> han desarrollado también una técnica general para estructuras elásticas lineales, basada en el cálculo variacional y el problema adjunto.

Basándose en la teoría de [14], Choi y Haug<sup>5</sup> obtienen las expresiones necesarias para calcular el efecto de las variaciones de forma sobre los funcionales que aparecen en el diseño óptimo de formas estructurales. Como aplicación práctica, Yoo et al.<sup>24</sup> y Yang et al.<sup>23</sup> optimizan la forma de diversos elementos. El objetivo es minimizar el peso, teniendo en cuenta restricciones en tensión.

Una formulación variacional para la optimización de formas de cuerpos elásticos bidimensionales es presentada por Kikuchi y Taylor<sup>16</sup>.

Braibant y Fleury<sup>2</sup> han desarrollado un modelo para el diseño óptimo de elementos bidimensionales basado en elementos finitos cuadráticos isoparamétricos. La forma del

elemento se describe por medio de curvas de Bezier y  $\beta$ -splines. El objetivo es minimizar el peso, con restricciones en tensiones y desplazamientos.

Zochowski y Mizukami<sup>28</sup> presentan varios ejemplos en Elasticidad bidimensional. Utilizan elementos triangulares con interpolación lineal. El objetivo es minimizar el peso, con restricciones en desplazamientos.

Sin embargo, a pesar de su profusa utilización, este método presenta serias desventajas en la optimización de formas. En primer lugar, es necesario discretizar todo el dominio, mientras que las variables de diseño pertenecen al contorno, lo cual implica un importante aumento del tiempo necesario para generar los datos y resolver el problema, obteniendo una gran cantidad de resultados innecesarios. En segundo lugar, y más importante, la redefinición de la malla es muy costosa y con múltiples problemas en orden a evitar interpenetraciones y conseguir una malla regular. Por último, la precisión en el cálculo de las derivadas de las variables de estado, fundamentalmente a la hora de aplicar cualquier método de optimización, no es todo lo buena que cabría desear, a menos que se utilicen para las variables de estado aproximaciones de orden superior a las que se utilizarían si se tratase simplemente de un problema de análisis.

Todas estas desventajas pueden evitarse en gran medida utilizando el método de los elementos de contorno. Es por ello que la tendencia actual en la optimización de formas se orienta hacia el uso de dicho método, habiendo aparecido la práctica totalidad de las publicaciones sobre el tema en los últimos años. Así, Zochowski y Mizukami<sup>27</sup> han desarrollado modelos basados en elementos de contorno y técnicas de programación lineal. El objetivo es minimizar el área, sujeto a restricciones en desplazamientos y a otras de tipo geométrico.

Mota et al.<sup>18,19</sup> han desarrollado modelos basados en elementos lineales y cuadráticos y en técnicas de optimización no lineal. El objetivo, en este caso, es minimizar la flexibilidad, manteniendo el área constante.

Recientemente, Burczynski y Adamczyk<sup>4</sup> han desarrollado también modelos para Elasticidad bidimensional basados en elementos de contorno. Su objetivo es maximizar la rigidez, manteniendo el área constante. Se plantean las condiciones de optimalidad, y el sistema no lineal resultante se resuelve mediante el método de Newton-Raphson.

Eizadian y Trompette<sup>10</sup> han desarrollado igualmente modelos basados en elementos de contorno y técnicas de optimización no lineal. El objetivo que plantean es minimizar la tensión tangencial a lo largo del contorno móvil, sujeto a restricciones geométricas. La geometría se define mediante elementos lineales y circulares. El problema de optimización no lineal se resuelve mediante el método de los multiplicadores de Lagrange.

Por último, Kane<sup>15</sup> utiliza elementos cuadráticos no conformes para optimizar la forma de sólidos elásticos bidimensionales. El objetivo es uniformar la distribución de tensiones a lo largo de una zona del contorno, con restricciones de tipo geométrico. Utiliza como variables de diseño una serie de parámetros que definen la geometría de la zona en estudio.

No obstante, aunque el método de los elementos de contorno ha comenzado a utilizarse en gran medida en la optimización de formas, debido a las ventajas que aporta, su uso se ha restringido a problemas particulares, tanto en lo concerniente a la geometría como en lo que se refiere a la elección de las variables de diseño. Tampoco se

ha planteado de una manera general el problema de optimización de formas en medios ortótropos.

Por este motivo, el objetivo de este trabajo es abordar el problema de optimización de forma de sólidos elásticos bidimensionales, simple y múltiplemente conexos, bajo condiciones de contorno cualesquiera, sin restricciones en cuanto a la geometría inicial y las sucesivas geometrías que puedan ir apareciendo a lo largo del proceso de optimización, considerando medios homogéneos y materiales isótropos u ortótropos.

Con objeto de obtener una completa generalidad, tanto para la geometría inicial como para las sucesivas geometrías que van apareciendo a lo largo del proceso de optimización, se han elegido como variables de diseño las coordenadas de los nodos de la malla de elementos de contorno.

En cuanto al método de optimización utilizado, sigue la idea de los métodos de "direcciones posibles", pero intentando que los sucesivos diseños satisfagan las restricciones, de manera que sea posible detener el proceso de optimización en cualquier momento, de tal forma que el diseño obtenido en ese instante sea válido (aunque no óptimo).

## FORMULACION DEL M.E.C. EN ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL

La ecuación de partida del método de los elementos de contorno en Elasticidad es la bien conocida identidad de Somigliana<sup>12</sup>, la cual expresa el vector de desplazamientos  $u_i(Q)$  en un punto  $Q$  de un dominio  $\Omega$  como una función de los desplazamientos  $u_i(Q)$  y las tensiones  $t_i(P)$  en los puntos del contorno de dicho dominio, y de las fuerzas por unidad de volumen  $X_i$ :

$$C_{ik} u_i(Q) = \int_{\Gamma} U_{ik}(Q, P) t_i(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ik}(Q, P) u_i(P) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ik}(Q, P) X_i(P) d\Omega \quad (1)$$

donde  $U_{ik}$  es la solución fundamental de la ecuación de Navier,  $T_{ik}$  son las tensiones correspondientes a dicha solución fundamental, y  $C_{ik}$  depende de la situación del punto  $Q$  con respecto al dominio  $\Omega$ <sup>12</sup>. En el presente trabajo, no se van a considerar fuerzas de volumen, por lo que discretizando el contorno en  $Ne$  elementos, y utilizando una aproximación lineal en tensiones y desplazamientos dentro de cada elemento, la expresión (1) queda finalmente en la forma:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{Ne} \begin{bmatrix} A_{kj}^{111} & A_{kj}^{211} & A_{kj}^{112} & A_{kj}^{212} \\ A_{kj}^{121} & A_{kj}^{221} & A_{kj}^{122} & A_{kj}^{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_1^j)_1 \\ (u_1^j)_2 \\ (u_2^j)_1 \\ (u_2^j)_2 \end{bmatrix} = \quad (2)$$

$$= \sum_{j=1}^{Ne} \begin{bmatrix} B_{kj}^{111} & B_{kj}^{211} & B_{kj}^{112} & B_{kj}^{212} \\ B_{kj}^{121} & B_{kj}^{221} & B_{kj}^{122} & B_{kj}^{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (t_1^j)_1 \\ (t_1^j)_2 \\ (t_2^j)_1 \\ (t_2^j)_2 \end{bmatrix}$$

donde  $(u_i^j)_k$  es el desplazamiento en la dirección  $i$  del nodo  $k$  del elemento  $j$ ,  $(t_i^j)_k$  es la tensión en la dirección  $i$  en el nodo  $k$  del elemento  $j$ , y:

$$A_{kj}^{imn} = \int_{\Gamma_j} \phi_i T_{kj}^{mn} d\Gamma_j \quad B_{kj}^{imn} = \int_{\Gamma_j} \phi_i U_{kj}^{mn} d\Gamma_j \quad (3)$$

Aplicando las ecuaciones (2) en cada nodo del contorno, e introduciendo las condiciones de contorno, se obtiene finalmente un sistema algebraico de la forma<sup>20</sup>:

$$\mathbf{Kx} = \mathbf{p} \quad (4)$$

con incógnitas en tensiones y/o desplazamientos, dependiendo de las condiciones de contorno.

## EL PROBLEMA DE OPTIMIZACION

En Elasticidad pueden plantearse diferentes objetivos a la hora de abordar el problema de optimización de formas. El problema de optimización elegido en este caso consiste en obtener la forma del *contorno móvil* que de lugar a una distribución de tensiones lo más uniforme posible sobre el mismo, entendiendo por contorno móvil la zona del contorno que se modifica a lo largo del proceso de optimización. Para ello, se define la función objetivo como:

$$f(x_i, y_i) = \int_{\Gamma_m} (\sigma_{vm} - \sigma_0)^2 d\Gamma_m \quad (5)$$

donde  $\sigma_{vm}$  es la tensión de Von Mises y  $\sigma_0$  es la tensión de referencia. Si no se impone ninguna restricción, se obtiene la forma del contorno móvil tal que la tensión de Von Mises a lo largo del mismo está lo más próxima posible en torno a la tensión de referencia. Otra alternativa consiste en imponer como restricción el valor del área, eligiendo en cada iteración el valor de  $\sigma_0$  como la media ponderada de las tensiones de Von Mises sobre el contorno móvil. Con esto se obtiene la forma de área dada tal que las tensiones de Von Mises a lo largo del contorno móvil son lo más uniformes posibles, como se verá en los ejemplos presentados. Dicha restricción se define como:

$$h(x_i, y_i) = A_0 - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = 0 \quad (6)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el radio-vector que une el origen de coordenadas con un punto cualquiera del contorno y  $\mathbf{n}$  es la normal exterior al contorno en dicho punto.

Teniendo en cuenta la discretización del contorno, la función objetivo se evalúa como:

$$f(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^{Nem} \int_{\Gamma_j} (\sigma_{vm} - \sigma_0)^2 d\Gamma_j \quad (7)$$

donde  $Nem$  es el número de elementos móviles, entendiendo por tales aquellos en los que las coordenadas de alguno de sus nodos pueden modificarse a lo largo del proceso de optimización. Del mismo modo, la restricción se transforma en:

$$h(x_i, y_i) = A_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{Nem} (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{n}_j) L_j = 0 \quad (8)$$

En las expresiones anteriores se observa que, mientras la restricción depende exclusivamente de variables geométricas, siendo una función explícita de las variables de diseño, la función objetivo depende de éstas de manera implícita, a través de la variable intermedia  $\sigma_{vm}$ , que es función de las variables de estado, siendo su valor en el caso bidimensional:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\alpha\sigma_{11}^2 + \beta\sigma_{22}^2 - \gamma\sigma_{11}\sigma_{22} + 3\tau_{12}^2} \quad (9)$$

donde los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  varían según se trate de tensión o deformación plana, y material isótropo u ortótropo<sup>11</sup>.

En definitiva, para evaluar la función objetivo, es preciso expresar las componentes del tensor de tensiones en cada punto del contorno móvil en función de las variables de estado del problema (desplazamientos y tensiones en el contorno). De dicho tensor de tensiones se conocen en cualquier punto del elemento, una vez realizado el análisis, dos de sus componentes en coordenadas locales del mismo:

$$\sigma_j^n = \sigma_j^1 \phi_1 + \sigma_j^2 \phi_2 \quad \tau_j = \tau_j^1 \phi_1 + \tau_j^2 \phi_2 \quad (10)$$

siendo necesario recurrir a las relaciones tensiones-deformaciones para obtener la tercera. Como sólo es posible obtener la deformación a lo largo del elemento en coordenadas locales de éste, será preciso transformar dichas relaciones a estas coordenadas. Así, para coordenadas locales se obtiene:

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}' \quad (11)$$

donde  $\mathbf{D}$  es la matriz que relaciona deformaciones con tensiones en coordenadas globales y  $\mathbf{H}$  es una matriz que depende de la geometría, y tiene por componentes:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} n_x^2 & -2n_x n_y & n_y^2 \\ n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 & n_x n_y \\ n_y^2 & 2n_x n_y & n_x^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

En el caso en que el contorno móvil esté descargado, la tensión normal en un plano perpendicular al contorno viene dada por:

$$\sigma_j^t = \frac{\varepsilon'_{22}}{2(B_{12} + C)n_x^2 n_y^2 + B_{11}n_y^4 + B_{22}n_x^4} \quad (13)$$

donde  $B_{11}$ ,  $B_{22}$ ,  $B_{12}$  y  $C$  vienen dadas en función de las constantes elásticas del material<sup>11</sup>.

El valor de  $\varepsilon'_{22}$  se obtiene mediante la expresión:

$$\varepsilon'_{22} = \frac{1}{L_j} \left[ -n_y(u_x^2 - u_x^1) + n_x(u_y^2 - u_y^1) \right] \quad (14)$$

Sustituyendo este valor en la expresión (13), se obtiene el valor de la tensión en un plano perpendicular al contorno, y una vez conocido el mismo, es posible calcular las componentes del tensor de tensiones en coordenadas globales mediante:

$$\sigma = \mathbf{H} \sigma' \quad (15)$$

Por último, por medio de (9) se obtiene la tensión de Von Mises en cada elemento. Según se deduce de (14), la deformación en sentido longitudinal es constante dentro de cada elemento, por lo que cuando el contorno móvil está descargado, el valor que se obtiene para la tensión de Von Mises es constante dentro de cada elemento, y la función objetivo puede expresarse entonces como:

$$f(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^{Nem} (\sigma_{vm} - \sigma_0)^2 L_j \quad (16)$$

donde  $Nem$  es el número de elementos del contorno móvil.

El gradiente de la función objetivo se obtiene por derivación de la expresión (16) respecto de las coordenadas de cada nodo:

$$\frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{Nem} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{vm} - \sigma_0)_j^2 L_j + (\sigma_{vm} - \sigma_0)_j^2 \frac{\partial L_j}{\partial x_k} \right] \quad (17)$$

y para obtener la derivada del primer factor es preciso aplicar la regla de la cadena comenzando por la expresión (9), hasta llegar a las derivadas de las variables de estado, en este caso los desplazamientos, las cuales se calculan por derivación implícita del sistema (4) en la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_k} = \mathbf{K}^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_k} \mathbf{x} \right] \quad (18)$$

Como el vector de resultados y la inversa de la matriz de coeficientes están disponibles una vez realizado el análisis, solamente es necesario calcular las derivadas de la matriz de coeficientes y del vector de términos independientes. Hay que advertir que al derivar la matriz de coeficientes, sólo se verán afectadas aquellas constantes

que correspondan a la integración desde el nodo respecto a cuyas coordenadas se deriva, y a la integración sobre los elementos adyacentes a dicho nodo. Las derivadas correspondientes pueden encontrarse en [11].

El gradiente de la restricción se obtiene por derivación de la expresión (8) respecto a las coordenadas de cada uno de los nodos móviles resultando:

$$\frac{\partial h(x_i, y_i)}{\partial x_k} = -\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2} \quad \frac{\partial h(x_i, y_i)}{\partial y_k} = -\frac{x_{k-1} - x_{k+1}}{2} \quad (19)$$

expresiones que dependen explícitamente de las variables de diseño, por lo que no es necesario ningún cálculo adicional.

Las condiciones de Kuhn-Tucker que deben cumplirse en el mínimo pueden expresarse en la forma:

$$\frac{\text{grad}f(\mathbf{x}^*) \cdot \text{grad}h(\mathbf{x}^*)}{|\text{grad}f(\mathbf{x}^*)| \cdot |\text{grad}h(\mathbf{x}^*)|} = -1 \quad (20)$$

Numéricamente, esta condición se establece fijando una cota de error en el mínimo,  $\varepsilon_m$ , de tal forma que si:

$$\frac{\text{grad}f(\mathbf{x}^*) \cdot \text{grad}h(\mathbf{x}^*)}{|\text{grad}f(\mathbf{x}^*)| \cdot |\text{grad}h(\mathbf{x}^*)|} = \cos(\pi - \varepsilon_m) \quad (21)$$

se cumple,  $\mathbf{x}^*$  se considera solución del problema de optimización.

El método de optimización utilizado necesita también la definición de otra cota de error para la restricción,  $\varepsilon_r$ , de tal forma que la restricción original se sustituye por una "banda de restricción", dentro de la cual se considera resuelto el problema si se cumple la condición (21) (Figura 1):

$$h_i = -\varepsilon_r A_0 \leq h(x_i, y_i) \leq \varepsilon_r A_0 = h_s \quad (22)$$

o lo que es lo mismo:

$$1 - \varepsilon_r \leq \frac{A}{A_0} \leq 1 + \varepsilon_r \quad (23)$$

Si el punto actual,  $\mathbf{x}_k$ , no es el óptimo, será preciso determinar el nuevo diseño, pudiendo presentarse tres situaciones diferentes:

1)  $\mathbf{x}_k$  está en el interior de la región de diseño (Punto 1 en Figura 1).

La dirección de optimización corresponde al menos gradiente de la función objetivo en  $\mathbf{x}_k$ . Por consiguiente, el nuevo punto de diseño viene dado por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha [-\text{grad}f(\mathbf{x}_k)] \quad (24)$$

Si se obliga a que  $\mathbf{x}_{k+1}$  satisfaga la restricción  $h$ , y aproximamos ésta linealmente en  $\mathbf{x}_k$ , esta condición se expresa como:



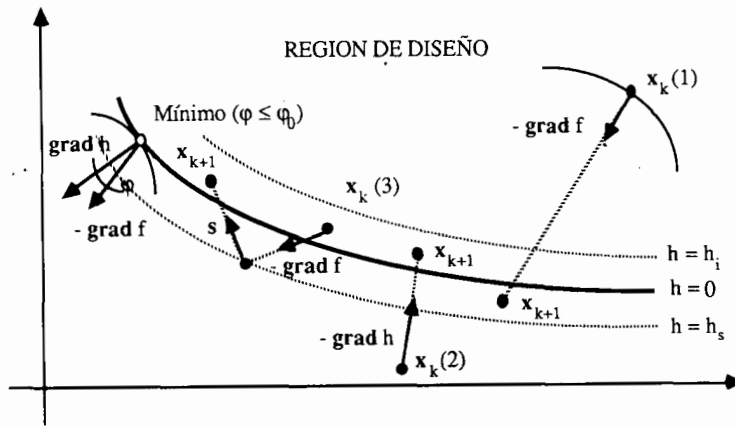


Figura 1. Diferentes situaciones a lo largo del proceso de optimización.

$$h(\mathbf{x}_{k+1}) = h(\mathbf{x}_k) - \alpha \text{grad}f(\mathbf{x}_k) \cdot \text{grad}h(\mathbf{x}_k) = 0 \tag{25}$$

y a partir de ella se obtiene el tamaño de etapa:

$$\alpha = \frac{h(\mathbf{x}_k)}{\text{grad}f(\mathbf{x}_k) \cdot \text{grad}h(\mathbf{x}_k)} \tag{26}$$

2)  $\mathbf{x}_k$  está fuera de la región de diseño (Punto 2 en Figura 1).

La línea que une  $\mathbf{x}_k$  con  $\mathbf{x}_{k+1}$  es en este caso el menos gradiente de la restricción,  $-\text{grad}h(\mathbf{x}_k)$ . De esta forma, se alcanza la banda de restricción lo más rápidamente posible. Expresando estas condiciones, se obtienen el tamaño de etapa y el nuevo punto de diseño:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha \cdot \text{grad}h(\mathbf{x}_k) \tag{27}$$

$$h(\mathbf{x}_{k+1}) = h(\mathbf{x}_k) - \alpha \text{grad}h(\mathbf{x}_k) \cdot \text{grad}h(\mathbf{x}_k) = 0 \tag{28}$$

$$\alpha = \frac{h(\mathbf{x}_k)}{\text{grad}h(\mathbf{x}_k) \cdot \text{grad}h(\mathbf{x}_k)} \tag{29}$$

3)  $\mathbf{x}_k$  está en el interior de la banda de restricción (Punto 3 en Figura 1).

En este caso, se ha seguido un proceso bietapa, que ha demostrado un buen comportamiento. La primera dirección corresponde al menos gradiente de la función objetivo, y la segunda,  $s$ , a la proyección de  $\text{grad}h$  sobre el hiperplano tangente a  $f(\mathbf{x}_k)$ . Así,  $\mathbf{x}_{k+1}$  puede escribirse como:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha [-\text{grad}f(\mathbf{x}_k)] + \beta s \tag{30}$$

con:

$$\mathbf{s} = -\text{grad}h(\mathbf{x}_k) + \text{grad}h(\mathbf{x}_k) \cdot \text{grad}f(\mathbf{x}_k) \cdot \frac{\text{grad}f(\mathbf{x}_k)}{|\text{grad}f(\mathbf{x}_k)|^2} \quad (31)$$

y los tamaños de las etapas son:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{h - h_s}{\text{grad}f \cdot \text{grad}h} \\ \beta &= \frac{-h_s}{\text{grad}h \cdot \mathbf{s}} \end{aligned} \right\} h < 0 \quad \left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{h_i}{\text{grad}f \cdot \text{grad}h} \\ \beta &= \frac{h_i - h}{\text{grad}h \cdot \mathbf{s}} \end{aligned} \right\} h > 0 \quad (32)$$

En el caso de optimización sin restricción, se elige como dirección de minimización el menos gradiente de la función objetivo, de manera que el nuevo diseño viene dado por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha[-\text{grad}f] \quad (33)$$

y el tamaño de etapa se determina de manera que la función objetivo se reduzca en un determinado porcentaje en aproximación lineal:

$$f(\mathbf{x}_{k+1}) \approx f(\mathbf{x}_k) - \alpha|\text{grad}f|^2 = \gamma f(\mathbf{x}_k) \quad (34)$$

de donde:

$$\alpha = \frac{(1 - \gamma) f(\mathbf{x}_k)}{|\text{grad}f|^2} \quad (35)$$

habiéndose tomado para  $\gamma$  el valor 0.5. Si el valor de la función objetivo no disminuye en el nuevo diseño, se reduce el tamaño de etapa a la mitad, y se determina el diseño correspondiente a dicho valor.

Las condiciones de mínimo se reducen en este caso a que el gradiente se anula en el punto considerado. Como esta condición es difícil de verificar desde el punto de vista numérico, se detiene el proceso cuando habiendo reducido el tamaño de etapa en cuatro ocasiones en la misma iteración, se verifique que:

$$\frac{f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_{k+1})}{f(\mathbf{x}_k)} \leq \varepsilon_f \quad (36)$$

donde se introduce una nueva cota de error  $\varepsilon_f$ .

## RESULTADOS

Con objeto de verificar la formulación desarrollada, se ha implementado el correspondiente programa de ordenador, aplicándose a la resolución de los ejemplos que se incluyen a continuación.

El primero de ellos corresponde a un cilindro hueco sometido a una presión radial en el exterior. Se trata de comprobar la precisión en el cálculo de las derivadas de

las variables de estado mediante el M.E.C., comparando los resultados obtenidos con la solución teórica conocida. Se analizan las derivadas del desplazamiento radial y de la tensión circunferencial, respectivamente, respecto del radio interior. Los valores utilizados han sido:

$$\begin{aligned}
 p_0 &= 1000 \text{ kg/cm}^2 & R_i &= 4 \text{ cm} \\
 R_e &= 16 \text{ cm} & \nu &= 0.25 \\
 E &= 2100000 \text{ kp/cm}^2
 \end{aligned}$$

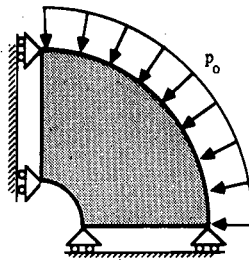


Figura 2. Cilindro sometido a presión radial.

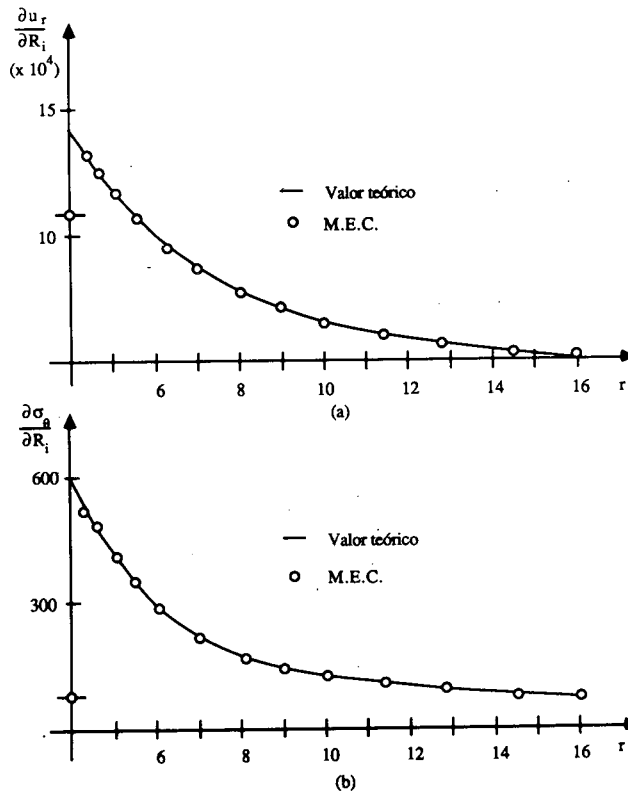


Figura 3. Derivadas de  $u_r$  y  $\sigma_\theta$  con respecto al radio interior.

Se ha discretizado un cuarto del cilindro (Figura 2), mediante una malla de 56 nodos, 14 de ellos situados a lo largo del radio de la sección.

Los resultados obtenidos pueden observarse en las Figuras 3a y 3b. Como se desprende de los mismos, la aproximación de las derivadas de las variables de estado mediante el procedimiento utilizado es completamente satisfactoria.

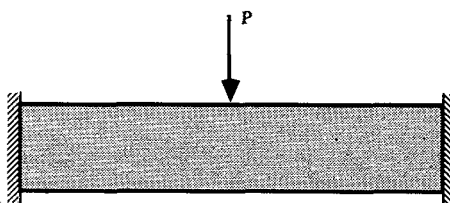


Figura 4. Viga biempotrada sometida a carga puntual.

El siguiente ejemplo corresponde a una viga biempotrada sometida a una carga puntual en el centro de la misma (Figura 4). Se han considerado como variables de diseño únicamente las coordenadas "y" de los nodos de la cara inferior, tomándose como restricción la conservación del área inicial. La relación inicial canto/luz es de 1 a 5, habiéndose simulado la carga puntual mediante una equivalente distribuida en un veinticincoavo de la luz.

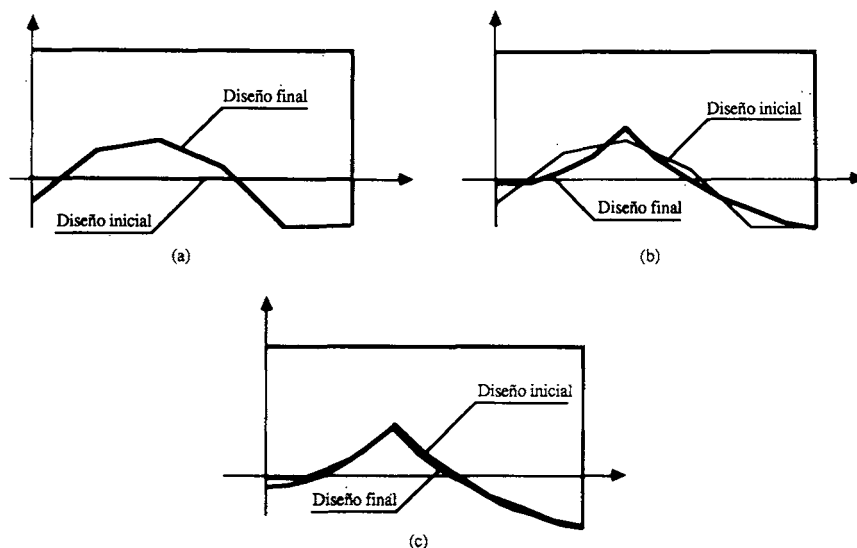


Figura 5. Sucesivos diseños para viga biempotrada.

Se ha partido inicialmente de un contorno móvil constituido por cinco elementos para la mitad de la viga, aprovechando la simetría, como puede verse en la Figura 5a. Tras cuatro iteraciones, se alcanza el diseño óptimo para esa discretización, dividiendo a

continuación cada elemento del contorno móvil en dos. Tras tres iteraciones se alcanza el óptimo para la nueva discretización (Figura 5b), volviendo a dividir cada elemento en dos, y continuando el proceso hasta alcanzar el óptimo para la última discretización (Figura 5c). Con este procedimiento se consigue que el número de iteraciones a efectuar con mallas finas (que requieren un mayor esfuerzo de cálculo) se reduzca, pues se parte de un diseño más próximo al óptimo que el inicial.

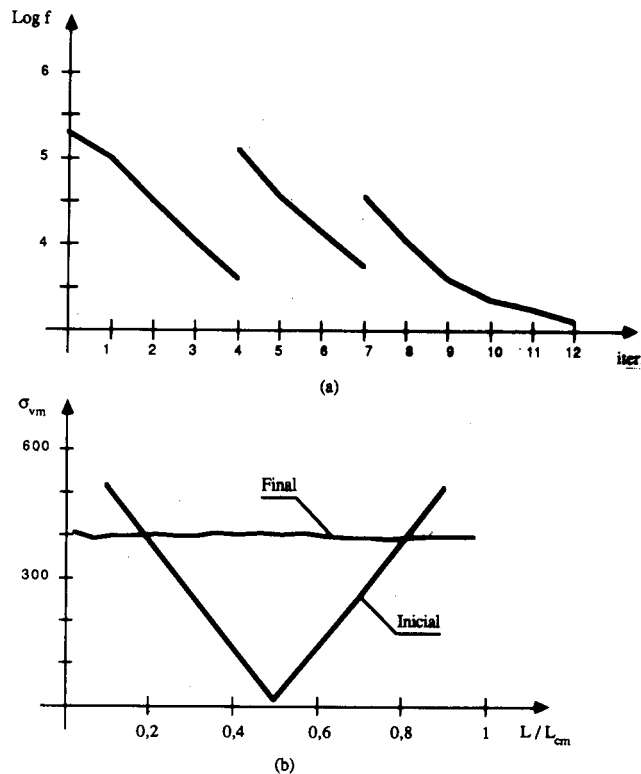


Figura 6. Resultados obtenidos para viga biempotrada.

Las distribuciones de tensiones en el contorno móvil en los diseños inicial y final pueden observarse en la Figura 6b, mientras que la evolución de la función objetivo se muestra en la Figura 6a.

A continuación se presenta el caso de un anillo sometido a la acción de dos cargas puntuales y opuestas actuando a lo largo de un diámetro (Figura 7a). Se mantiene fijo el contorno exterior, optimizando el contorno interior, de manera que se mantenga constante el área. Se ha discretizado una cuarta parte del anillo, mediante una malla de 36 elementos en el exterior y 18 en el interior.

En la Figura 8b puede observarse la distribución de tensiones a lo largo del contorno móvil en el diseño inicial. El diseño final obtenido tras 16 iteraciones se muestra en la Figura 7b, mientras que las tensiones correspondientes a dicho diseño aparecen reflejadas en la Figura 8b. Finalmente, la evolución de la función objetivo puede observarse en la Figura 8a.

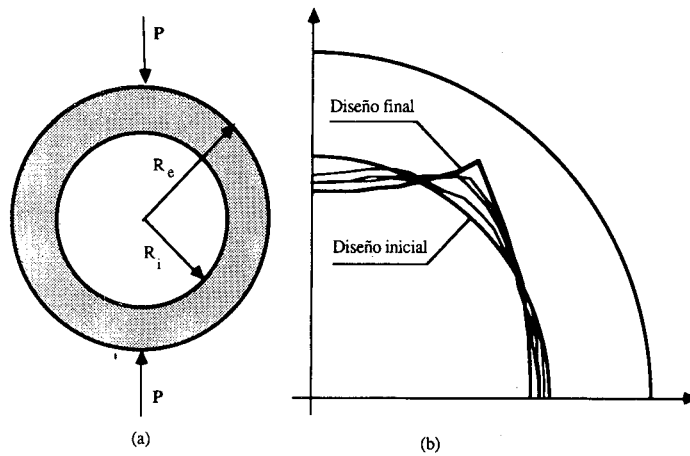


Figura 7. Anillo sometido a compresión diametral.

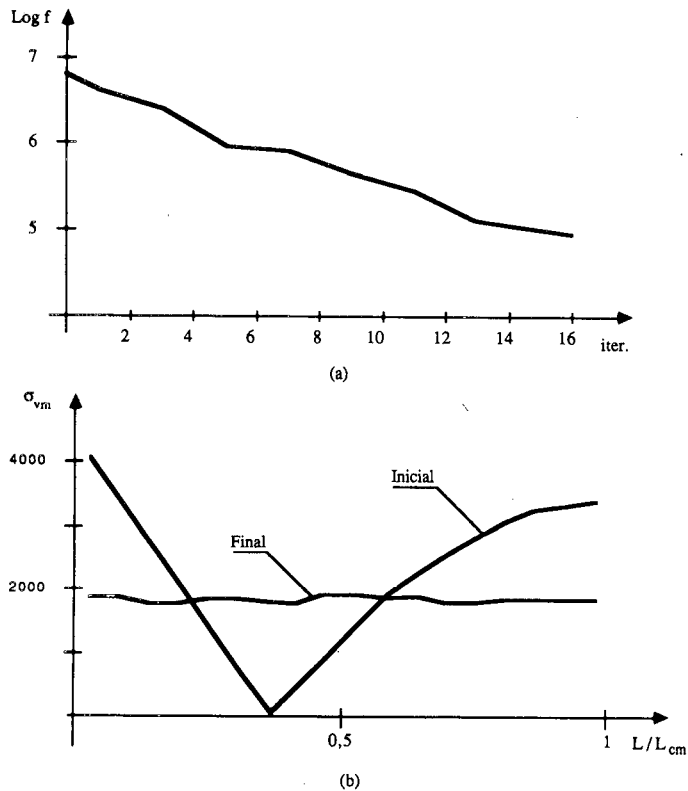


Figura 8. Resultados obtenidos para el anillo.

El siguiente ejemplo es una biela sometida a un estado de carga de compresión (Figura 9a). Se trata en este caso de obtener la forma del contorno móvil tal que la tensión sobre él sea lo más próxima posible a  $500 \text{ Kp/cm}^2$ .

Se han tomado como variables de diseño las coordenadas "y" de los nodos del

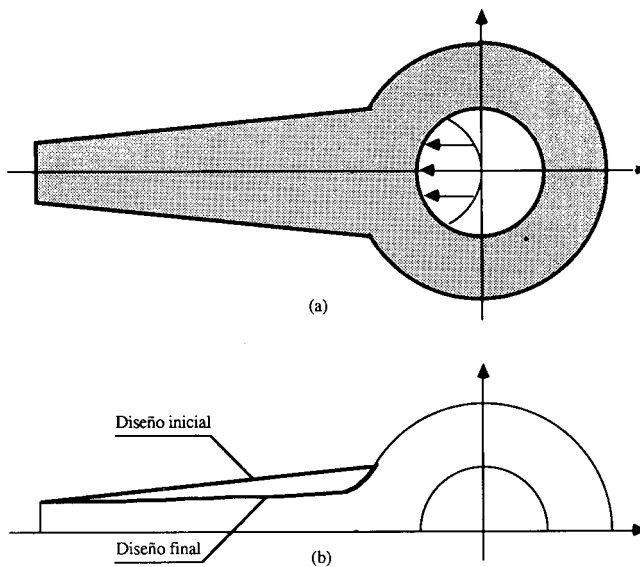


Figura 9. Biela sometida a compresión.

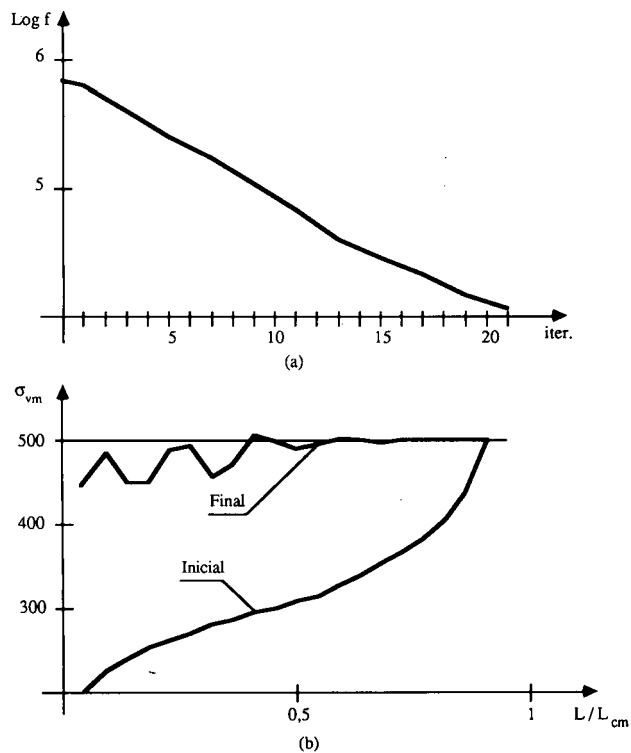


Figura 10. Resultados obtenidos para la biela.

contorno móvil. En la Figura 9b se muestra el diseño final obtenido para dicho contorno tras 21 iteraciones.

Las distribuciones de tensiones para los diseños inicial y final vienen reflejadas en la Figura 10b. En la Figura 10a puede observarse la evolución de la función objetivo.

El siguiente ejemplo corresponde a una placa de material ortótropo sometida a una tracción biaxial de igual valor en ambos ejes, con un agujero interior (Figura 11). Se ha discretizado una cuarta parte de la placa, mediante una malla de 24 elementos, 12 en el exterior y 12 en el interior. La dimensión del agujero frente al total de la placa es de 1/20.

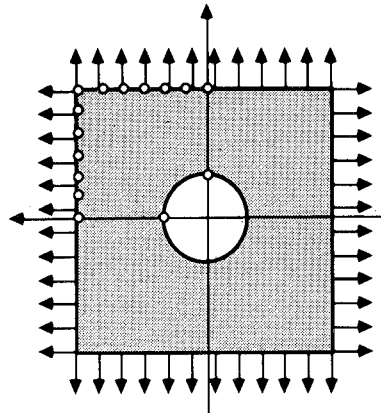


Figura 11. Placa ortótropa sometida a tracción biaxial.

Las características del material son:

$$E_1 = 120000 \text{ kp/cm}^2 \quad E_2 = 60000 \text{ kp/cm}^2$$

$$\nu_{12} = 0.0036 \quad \nu_{21} = 0.072$$

$$G_{12} = 7000 \text{ kp/cm}^2$$

Se trata de optimizar la forma del agujero para conseguir una distribución uniforme de tensiones, manteniendo el área constante. El resultado obtenido se muestra en la Figura 12. El diseño óptimo se alcanza después de once iteraciones.

La distribución de tensiones en el diseño final puede observarse en la Figura 13.

## CONCLUSIONES

Se ha presentado la formulación del problema de optimización de formas en Elasticidad bidimensional para medios homogéneos, tanto para materiales isótropos como ortótropos, habiéndose probado la validez de dicha formulación a la luz de los ejemplos presentados.

La elección del método de los elementos de contorno como método numérico para la obtención de los valores de las variables de estado involucradas en la formulación permite manejar un volumen de información relativamente pequeño, y concerniente



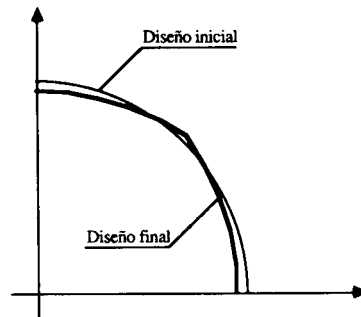


Figura 12. Diseño final de agujero en placa ortótropa.

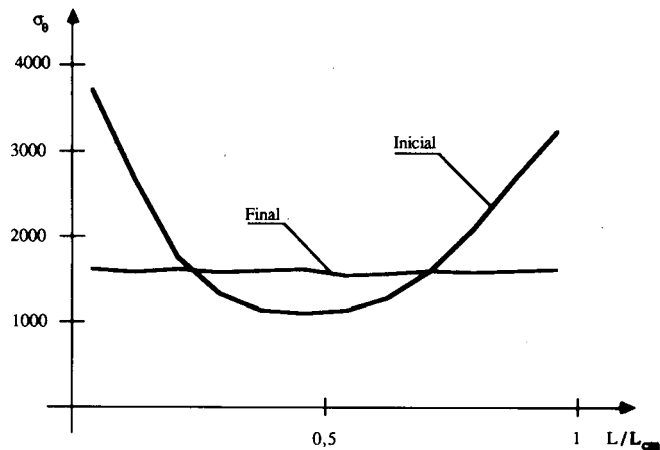


Figura 13. Resultados obtenidos para placa ortótropa.

exclusivamente al contorno, que en definitiva es el que define la geometría. Además, la precisión conseguida en el cálculo de los gradientes es elevada y la redefinición de malla entre iteraciones, en el caso en que sea necesario, sencilla y poco costosa.

La elección de las coordenadas de los nodos de la malla de elementos de contorno como variables de diseño, permite obtener una completa generalidad, tanto para la geometría inicial como para las sucesivas geometrías que van apareciendo a lo largo del proceso de optimización, haciendo posible modelizar formas reales utilizando mallas tan finas como sea preciso.

Se ha elegido un método de optimización que ha probado su eficacia en los casos expuestos, si bien una ligera relajación de los parámetros de error hace disminuir considerablemente el número de iteraciones necesarias, debido a la baja velocidad de convergencia en las proximidades del óptimo. A pesar de ello, el hecho de que casi en la totalidad de los casos se mantenga el punto de diseño en el interior de la banda de restricción, hace posible la detención del proceso en cualquier momento, con la seguridad de un diseño válido.

La estructura de la formulación presentada, hace realmente simple la modificación de la función objetivo y de la restricción, siempre y cuando sus expresiones dependan

exclusivamente de las variables de diseño o de estado, es decir, de valores en el contorno, con lo cual es posible abordar diferentes problemas reales de optimización de formas.

## REFERENCIAS

1. P.K. Banerjee y R. Butterfield, "*Boundary Elements Methods in Engineering Science*", McGraw Hill, (1981).
2. V. Braibant y C. Fleury, "Shape Optimal Design Using  $\beta$ -Splines", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 44, pp. 247-267, (1984).
3. C.A. Brebbia, "*The Boundary Element Method for Engineers*", Pentech Press, London, Halstead Press, New York, (1978).
4. T. Burczynski y T. Adamczyk, "The Boundary Element Method for Shape Design Synthesis of Elastic Structures", *Seventh International Conference on Boundary Element Method*, (Ed. C.A. Brebbia), Springer-Verlag, pp. 12.93-12.106, (1985).
5. K.K. Choi y E.J. Haug, "Shape Design Sensitivity Analysis of Elastic Structures", *Jour. Struc. Mech.*, Vol. 11, no. 2, pp. 231-269, (1983).
6. Y.W. Chun y E.J. Haug, "Two Dimensional Shape Optimal Design", *Int. Jour. Num. Meth. in Eng.*, Vol. 13, no. 5, pp. 311-336, (1978).
7. K. Dems y Z. Mroz, "Variational Approach by Means of Adjoint Systems to Structural Optimization and Sensitivity Analysis - II Structural Shape Variation", *Int. Jour. Solid and Struct.*, Vol. 20, no. 6, pp. 527-552, (1984).
8. K. Dems y Z. Mroz, "Variational Approach to First and Second Order Sensitivity Analysis of Elastic Structures", *Int. Jour. Meth. in Eng.*, Vol. 21, pp. 637-661, (1985).
9. A.J. Durelli, "Optimización de Formas Estructurales", *Series del Instituto de Ingeniería, UNAM*, no. 437, (1981).
10. D. Eizadian y M. Trompette, "Shape Optimization of Bidimensional Structures by the Boundary Element Method", *Conference on CAD/CAM, Robotics and Automation in Design*, Tucson, Arizona, (1985).
11. L. Gracia, "Optimización de Formas en Elasticidad Bidimensional mediante el Método de los Elementos de Contorno", *Tesis Doctoral*, Univ. de Zaragoza, (1988).
12. F. Hartmann, "Elastostatics", *Progress in Boundary Element Methods*, Vol. 1, pp. 84-167, (ed. C.A. Brebbia), Halsted Press, (1981).
13. E.J. Haug y J.S. Aurora, "*Applied Optimal Design*", John Wiley and Sons, (1979).
14. E.J. Haug, K.K. Choi y V. Komkov, "*Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*", Academic Press, New York, (1985).
15. J.H. Kane, "Shape Optimization Utilizing a Boundary Formulation", *Proc. 2nd Boundary Element Technology Conference*, pp. 781-803, (Ed. J.J. Connor and C.A. Brebbia), MIT, Massachusetts, (1986).
16. N. Kikuchi y J.E. Taylor, "Optimal Modification of Shape for Two Dimensional Elastic Bodies", *Jour. Struc. Mech.*, Vol. 11, no. 1, pp. 11-135, (1983).
17. S.G. Lekhnitskii, "*Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*", Mir Publishers, Moscú, (1981).
18. C.A. Mota y K.K. Choi, "Boundary Elements in Shape Optimal Design of Structures", *Computer Aided Optimal Design*, (Ed. C.A. Mota), Vol. 2, pp. 145-185, Tróia, Portugal, (1986).
19. C.A. Mota, H.C. Rodríguez y K.K. Choi, "Shape Optimal Design of Elastic Structural Components Using Boundary Elements", *Tenth International Congress on the Applications of Mathematics in Engineering Science*, Vol. 5, pp. 80-82, (1984).

20. F. Paris, "El Método de los Elementos de Contorno en la Teoría del Potencial y la Elasticidad", *Tesis Doctoral*, Univ. Politécnica de Madrid, (1979).
21. B. Rousslet y E.G. Haug, "Design Sensitivity Analysis of Shape Variations", *Optimization of Distributed Parameter Structures*, pp. 1397-1442, (eds. E.J. Haug and J. Cea), Sijthoff and Noordhoff, Alpen aan den Rijn, Holanda, (1981).
22. S.P. Timoshenko, "*History of Materials*", Dover Publications, New York, (1983).
23. R. Yang, K.K. Choi y E.G. Haug, "Finite Element Computation of Structural Design Sensitivity Analysis", *Report CCAD no. 84-3*, University of Iowa, (1984).
24. Y.M. Yoo, E.G. Haug y K.K. Choi, "Shape Optimal Design of Multiple Loaded Structural Components", *Optimization Methods in Structural Design*, pp. 250-255, (Eds. H. Eschenauer and N. Olhoff), (1983).
25. O.C. Zienkiewicz, "*The Finite Element Method in Engineering Science*", Mc Graw Hill, (1979).
26. O.C. Zienkiewicz y J. S. Campbell, "Shape Optimization and Sequential Linear Programming", *Optimum Structural Design*, pp. 109-126, (Ed. R.H. Gallagher and O.C. Zienkiewicz), Wiley, New York, (1973).
27. A. Zochowski y K. Mizukami, "A Comparison of BEM and FEM in Minimum Weight Design", *Boundary Elements*, pp. 901-911, (Ed. C.A. Brebbia), Springer-Verlag, (1983).
28. A. Zochowski y K. Mizukami, "Minimum-Weight Design with Displacements Constraints in 2-D Elasticity", *Computer and Structures*, Vol. 17, no. 8, pp. 365-369, (1983).