

CFD PRESENTA COMPRESIBLE + INCOMPRESIBLE UN MATRIMONIO POR CONVENIENCIA

NORBERTO NIGRO
MARIO STORTI
y
SERGIO IDELSOHN

*GTM-INTEC-CONICET, Güemes 3450
3000 Santa Fe - Argentina
Tel.: + 54-42-559175 Fax: + 54-42-550944
E-mail: nnigro@venus.unl.edu.ar*

RESUMEN

Este trabajo presenta por un lado una breve síntesis de algunas importantes contribuciones dirigida a la unificación de códigos computacionales para flujos tanto compresible como incompresible y por otro un eficiente preconditionador local para todo el rango de números de Mach y Reynolds implementado sobre un esquema iterativo tipo GMRES con una estrategia que evita el ensamblaje de matrices llamada *matrix-free* usando como discretización espacial una formulación en elementos finitos. El principal objetivo de esta investigación es lograr un tratamiento unificado de flujo de fluidos tanto compresible como incompresible, viscoso o invíscido apto para simulaciones a gran escala y capaz de ser utilizado sobre plataformas de hardware paralelas.

CFD PRESENTS: COMPRESSIBLE + INCOMPRESSIBLE, A CONVENIENT MARRIAGE

SUMMARY

This paper presents a brief review of important contributions towards the unification of compressible and incompressible flow solvers and an efficient local preconditioner for all Mach and Reynolds numbers implemented with a matrix-free GMRES iterative scheme and a finite element method. The main goal of this research is the unified treatment of fluid flow at all speeds for large scale simulation capable of being implemented over parallel platforms.

Recibido: Febreo 1997

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente las ecuaciones de gobierno para flujo de fluidos incompresible contienen a la presión como una de las variables incógnitas del problema. Estos métodos son comúnmente denominados *pressure based methods*. Ellos fueron usados con éxito durante mucho tiempo y consisten en resolver la ecuación de continuidad y las ecuaciones de momento en forma desacoplada. De esta forma estos métodos están por su naturaleza precondicionados ya que las incógnitas se resuelven de a una por vez sin los inconvenientes asociados con las grandes diferencias de velocidades entre las ondas sónicas y aquellas que se mueven con el fluido. Estos métodos han mostrado también buena *performance* para flujo casi incompresible. Algunos de los códigos más populares y muy referenciados en la literatura que usan esta técnica son el SIMPLE¹, MAC² y el PISO³. No obstante, estas buenas características se pierden cuando el dominio cuenta con regiones en su interior donde el patrón fluidodinámico cambia a otros regímenes, como por ejemplo subsónico, transónico o supersónico. El método basado en presiones usa como variables dependientes a las llamadas variables viscosas, definidas más adelante (2).

Por otro lado, los esquemas para flujo compresible emplean a la densidad como una de las variables primarias y reciben el nombre de *density based methods*. Estos esquemas trabajan muy bien desde un régimen subsónico ($M \simeq 0,3$) hasta hipersónico, pero no pueden ser aplicados al caso incompresible o flujo con muy bajo número de Mach, ya que la variación de densidad resulta ser muy pequeña y el acoplamiento entre la presión y la densidad es muy débil. Otra de las razones del deterioro de la *performance* a medida que el número de Mach tiende a cero está asociado con la gran relación entre las escalas de tiempo de las ondas acústicas respecto a las correspondientes a los fenómenos de convección e difusión. Los métodos basados en densidad se implementan generalmente en conjunto con esquemas de marcha temporal para alcanzar soluciones tanto transitorias como estacionarias, usando métodos explícitos o implícitos para resolver un sistema de ecuaciones completamente acoplado. Este acoplamiento es la causa del mencionado deterioro de la velocidad de convergencia, especialmente cuando las ondas sónicas y del fluido viajan a muy distintas velocidades. Esta clase de esquema empeora aún más cuando el número de Reynolds de la malla se aproxima a cero. Estos métodos usan por lo general variables conservativas que serán presentadas en la siguiente sección (2).

Por lo tanto, la propuesta de una simple combinación de resolvedores para flujo compresible e incompresible no representa una solución para el tratamiento unificado de flujo a todas las velocidades. Históricamente se desarrollaron dos grandes líneas de investigación en pos de brindar una solución a este problema. La primera y más antigua ha tratado de obtener un modelo para flujo incompresible a partir de uno compresible mediante una expansión de las variables respecto al número de Mach. Esta idea es válida para problemas donde el dominio entero está sometido a patrones fluidodinámicos incompresibles o cercanamente incompresibles. Nosotros caracterizamos a estos como métodos particulares, ya que dan respuesta parcialmente al problema mejorando la condición del problema en las zonas donde el número de Mach es muy bajo. Uno de los primeros intentos en este sentido fue la propuesta de Chorin⁴ quien dio origen al método *artificial compressibility*, muy referenciado en las últimas

décadas. Como hemos dicho el inconveniente de este método es la imposibilidad de extenderlo al tratamiento de flujo de fluidos a muy diferentes regímenes de velocidad a lo largo del dominio. La segunda línea de investigación explorada fue aquella que nosotros llamamos la de los métodos generales, del cual métodos como el de paso fraccional o los de matriz de masa preconditionantes son algunos de sus más fieles representantes.

Los métodos de paso fraccional consisten de descomponer el operador en varios operadores más simples, desacoplando el sistema de ecuaciones y resolviendo en cada paso algunas de las variables. Esta estrategia surge como muy natural si uno trata de mezclar los métodos basados en densidad con aquellos basados en presión. Esta clase de métodos han mostrado dar buenos resultados aunque es nuestra opinión la descomposición del operador no es obvia y la especificación de las condiciones de contorno en cada uno de las etapas del procedimiento no es inmediata^{5,6,7}.

Los métodos del tipo de matriz de masa preconditionantes se basan en modificar la matriz de masa de forma de mejorar el número de condición del problema sin alterar el significado físico de las variables a resolver. Esta metodología mantiene la esencia de los métodos basados en densidad resolviendo el problema en forma acoplada con un preconditionador actuando localmente y acorde a los parámetros del flujo. El hecho que la matriz de masa se altere, no impide la resolución de problemas no estacionarios. En esta situación se definen dos lazos, uno externo temporal y uno interno pseudo temporal. En el primero no se altera la matriz de masa, mientras que el segundo contiene el preconditionador. Algunas de las más importantes contribuciones que podemos citar son las de Turkel⁸, Viviand y Peyret⁹ y Viviand¹⁰. En 1985 Choi y Merkle¹¹, en 1990 Feng y Merkle¹² y en 1991 van Leer, Lee y Roe¹³ han propuesto diferentes esquemas basados en densidad para las ecuaciones de Euler que son de alguna forma equivalentes al método de la compresibilidad artificial para bajos números de Mach y además mantienen sus buenas propiedades a medida que el número de Mach crece.

Simultáneamente y en forma completamente independiente con este desarrollo Storti, Nigro e Idelsohn¹⁴ han obtenido resultados equivalentes con una matriz de masa preconditionante obtenida como extensión de un trabajo preliminar realizado por Storti, Baumann e Idelsohn en 1992¹⁵ para las ecuaciones de Euler en régimen transónico. Aplicaciones de esta clase de preconditionadores al caso de flujo viscoso fueron realizadas con resultados muy buenos siempre que el número de Reynolds de la grilla no fuera muy pequeño. El deterioro de la velocidad de convergencia con el número de Reynolds resulta ser secundario frente a la influencia que tiene sobre ella el número de Mach, según lo confirman los experimentos numéricos realizados. De todas maneras en el caso de flujo con capas límites muy delgadas o flujos turbulentos la corrección viscosa resulta ser muy importante sobre la *performance* del preconditionador. Esta contribución fue hecha por Venkateswaran, Weiss, Merkle y Choi en 1992¹⁶, Choi y Merkle en 1993¹⁷ y Shuen, Chen y Choi en 1993¹⁸. Ellos encontraron una forma elegante de lograr un cambio de variables que de alguna forma es equivalente a transformar un método basado en densidad en otro basado en presión y viceversa. Ellos lo aplicaron sobre métodos explícitos e implícitos usando direcciones alternadas (ADI). Posteriormente Buelow, Venkateswaran y Merkle¹⁹ trabajaron sobre

la influencia de la relación de aspecto sobre la velocidad de convergencia y encontraron un preconditionamiento óptimo para mallas altamente refinadas, como aquellas que aparecen en flujo turbulento.

Los mencionados autores han usado este preconditionador en una formulación en volúmenes finitos usando un esquema de integración temporal ADI aplicado a un problema bidimensional de propulsión por reacción química de un combustible utilizando las ecuaciones de Navier-Stokes.

Por otro lado desde que Saad en 1986²⁰ extendió los métodos basados en subespacios de Krylov al caso no simétrico e indefinidos a través del método GMRES, cada día más investigadores en el mundo han adoptado a este como resolvidor, especialmente cuando los recursos computacionales son superados por la complejidad del problema. Más aún, la versión denominada *matrix-free* que evita el ensamblaje de matrices²¹ resulta ser una de las mejores soluciones del momento para su adaptación al cómputo paralelo. Esta clase de métodos iterativos requieren en forma imperiosa de buenos preconditionadores para obtener una *performance* razonable, caso contrario su convergencia resulta muy deteriorada. Este es uno de los temas candentes del área y la comunidad científica está esperando de grandes avances para poder abordar los grandes desafíos del próximo siglo.

La contribución de este trabajo está orientada a mostrar algunos resultados promisorios obtenidos mediante la adaptación del preconditionador de Choi y Merkle¹⁷ a una formulación tridimensional mediante elementos finitos, utilizando espacios funcionales de igual orden para todas las variables, estabilizada mediante SUPG en conjunto con un resolvidor iterativo GMRES utilizando una estrategia del tipo *matrix-free*.

Más aún, aquí se presenta esta metodología como altamente recomendable para el caso de computación paralela por las características locales del preconditionador.

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo compresible modificada por la introducción del preconditionador sobre el término temporal se puede escribir como^{16,17,22}

$$\Gamma_v \frac{\partial \mathbf{Q}_v}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{Q} = \mathbf{K} \nabla^2 \mathbf{Q} + \mathbf{F} \quad (1)$$

El preconditionador Γ_v introducido en el término temporal se presenta posteriormente. Hay dos variables involucradas en la definición, las variables viscosas \mathbf{Q}_v y las conservativas \mathbf{Q} , definidas como

$$\mathbf{Q} = \{\rho; \rho u; \rho v; \rho w; \rho e\}^T; \quad \mathbf{Q}_v = \{p; u; v; w; T\}^T \quad (2)$$

Las variables viscosas son necesarias para obtener un buen número de condición en el límite viscoso. Algunos detalles relacionados con esto se presentan más adelante.

FORMULACIÓN VARIACIONAL

La formulación variacional del problema definido en (1) asociada al método SUPG usando variables conservativas se escribe como

Encontrar $\mathbf{Q}^h \in S^h$ tal que $\forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{V}^h$ (ref. 22)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{W}^h \cdot \left(\Gamma \frac{\partial \mathbf{Q}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_i^h \frac{\partial \mathbf{Q}^h}{\partial x_i} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x_i} \cdot \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{Q}^h}{\partial x_j} d\Omega + \\ & + \sum_{e=1}^{\text{numel}} \int_{\Omega^e} (\tau')^T (\mathbf{A}_k^h)^T \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x_k} \cdot \left\{ \Gamma \frac{\partial \mathbf{Q}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_i^h \frac{\partial \mathbf{Q}^h}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{Q}^h}{\partial x_j} \right) - \mathbf{F} \right\} d\Omega + \quad (3) \\ & + \sum_{e=1}^{\text{numel}} \int_{\Omega^e} (\delta'_{\text{shc}} \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}^h}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \mathbf{W}^h \mathbf{F} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{W}^h \mathbf{h} d\partial\Omega \end{aligned}$$

con $\Gamma = \Gamma_v \frac{\partial \mathbf{Q}_v}{\partial \mathbf{Q}}$.

DEFINICIÓN DEL PRECONDICIONADOR

El preconditionador introducido en (1) se define como

$$\Gamma_v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta M^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u}{\beta M^2} & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v}{\beta M^2} & 0 & \rho & 0 & 0 \\ \frac{w}{\beta M^2} & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \frac{(e+p)}{\rho \beta M^2} - \delta & \rho u & \rho v & \rho w & \frac{\gamma \rho R}{\gamma - 1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Detalles de la forma en que fue deducido se incluyen en el paper de Choi y Merkle¹⁷. Esta clase de preconditionador ha mostrado tener convergencia uniforme para todo número de Mach y Reynolds a través de varios experimentos numéricos. La introducción de las variables viscosas le confiere cierta similitud con los métodos basados en presiones con el preconditionador manteniendo las escalas acústicas y viscosas lo más similares que sea posible en tamaño cuando la difusión domina. Por otro lado, cuando la advección domina es mejor cambiar a un método basado en densidad donde el rol del preconditionador es igualar las velocidades de la partícula con la sónica. El parámetro β a través de su definición permite unificar la formulación y conferirle al método una flexibilidad para acomodarse a todas las situaciones. Siguiendo la definición de Choi *et al.*¹⁷, tenemos lo siguiente

$$\beta M_r^2 = \epsilon c^2 \quad \text{con} \quad \epsilon = \max(\epsilon_{\text{inv}}, \epsilon_{\text{vis}})$$

$$\begin{cases} \epsilon_{\text{inv}} = M_r^2 \\ \epsilon_{\text{vis}} = \max_j \left[\frac{\alpha_j(\alpha_j - 1)}{(\alpha_j - 1 + c^2/u_j^2)} \right] \end{cases} \quad M_r = \begin{cases} M_{\min} & M < M_{\min} \\ M & M_{\min} < M < 1 \\ 1 & M > 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\alpha_j = \frac{CFL}{\sigma Re_{\Delta x_j}} \quad j = x, y, z$$

M_r es un número de Mach de referencia que se usa para evitar singularidades cuando la velocidad local es nula. En este trabajo hemos usado $M_{\min} = 10^{-6}$. σ representa el número de Fourier y $Re_{\Delta x_j}$ es el número de Reynolds del elemento con Δx_j su longitud característica. δ es una constante arbitraria que juega el rol de un coeficiente para la derivada temporal de la presión.

DETALLES DE LA IMPLEMENTACIÓN

El preconditionador afecta la definición de la matriz de tiempos intrínsecos, las condiciones absorbentes y el esquema temporal. A continuación presentamos una breve descripción de estas alteraciones.

Matriz de escala de tiempos intrínsecos

Como puede verse en (3), la conjunción del método SUPG con el sistema preconditionado da origen a un par de parámetros τ' y δ'_{shc} que son diferentes a los correspondientes parámetros del sistema no preconditionado. En este trabajo nosotros presentamos una aproximación analítica para el cómputo de esta matriz de tiempos característicos evitando el uso de costosas rutinas de cálculo de autovalores y autovectores. Sin entrar en detalle acerca del álgebra²² arribamos a la siguiente expresión para esta matriz

$$\tilde{\tau} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{Q}_v} \tilde{\tau}_v \Gamma_v^{-1}, \quad \tilde{\tau}_v = \|\tilde{\mathbf{B}}_v\|^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{v_i} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \tilde{\mathbf{A}}_{v_j} \quad \text{con} \quad \tilde{\mathbf{A}}_v = \Gamma_v^{-1} \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{Q}_v} \quad (6)$$

La extensión al caso de las ecuaciones de Navier-Stokes se completa mediante la corrección de $\tilde{\tau}$ por efectos viscosos²².

Condiciones de contorno absorbentes

El operador absorbente asociado a las condiciones de contorno se define mediante la solución de un problema de autovalores sobre el jacobiano advectivo proyectado en la dirección de la normal exterior. Si observamos (1), vemos que para ello se requiere que la descomposición se lleve a cabo sobre el jacobiano modificado por el preconditionador en lugar del original. De esta forma es factible usar la misma estructura de cálculo para τ que para las condiciones absorbentes.

Matrix-free GMRES

Todo lo visto hasta aquí es válido para la generalidad de los resolvedores. La modificación de la matriz de masa y sus influencias sobre la estabilización y las condiciones absorbentes nada tienen que ver con la elección del esquema de paso temporal usado. Una implementación explícita es directa salvo cuestiones relacionadas con la estabilidad del esquema temporal. En esta sección detallamos la aplicación del preconditionador a un resolvidor implícito tipo GMRES. Como es sabido, el algoritmo GMRES necesita de un preconditionador para que pueda lograrse una aceptable velocidad de convergencia. Es muy usual en mecánica de fluidos usar o un preconditionador diagonal o uno diagonal en bloques. Estos preconditionadores funcionan como una especie de escaleo entre los grados de libertad del sistema. En nuestro caso y para evitar confusiones nosotros hemos usado un preconditionador en bloques aplicado sobre el sistema previamente preconditionado por la matriz Γ . Evitando entrar en detalles, ya que está fuera de los objetivos de este trabajo, podemos sintetizar el método diciendo que se basa en la creación de una base ortogonal en el espacio de Krylov mediante un proceso de Arnoldi en donde se plantea la minimización del residuo a través de la solución de un sistema lineal.

RESULTADOS NUMÉRICOS

El objetivo de este trabajo es mostrar la efectividad del preconditionamiento presentado en (1) para resolver una gran variedad de problemas de mecánica de fluidos involucrando cualquier combinación de juego de parámetros representado por los números de Mach y Reynolds usando una formulación SUPG con elementos finitos y una versión *matrix-free*²¹ del resolvidor implícito GMRES. A continuación presentamos una serie de ejemplos numéricos que sirven para validar los argumentos teóricos expuestos. Los casos a mostrar son: 1) flujo a través de un perfil NACA 0012, 2) flujo alrededor de un cilindro circular, 3) flujo alrededor de una esfera. La grilla empleada para el caso del perfil NACA 0012 consiste en una malla tipo C con 39 nodos sobre el perfil, 20 nodos en la estela y 31 nodos en la dirección normal. El ángulo de ataque es nulo y el tamaño de la cuerda del perfil se extiende a dos unidades, mientras que los contornos computacionales se hallan a 28 unidades. Para el caso invíscido las condiciones de contorno fueron: 1) condiciones deslizantes (*slip*) sobre el perfil, 2) condición de Kutta en el borde de fuga, 3) condiciones absorbentes en el borde exterior. En el caso viscoso las dos primeras condiciones cambian por una condición de no deslizamiento y flujo térmico nulo sobre el perfil.

En el caso del cilindro circular la malla cubre el dominio completo pero repartida en dos zonas, la primera consiste de un cuadrado centrado en el cilindro y una malla tipo O con 80 nodos alrededor del cilindro y 20 nodos en la dirección radial, mientras que la segunda zona se ubica aguas abajo del cilindro y está formada por una malla tipo H de 20 x 20 nodos. El diámetro del cilindro es unitario y la entrada se ubica a nueve unidades del centro del cilindro mientras que la salida se halla a 27 unidades del mismo centro.

Las condiciones de contorno usadas fueron de no deslizamiento con flujo térmico nulo sobre el perfil, todas las variables impuestas a la entrada y tracción nula con flujo térmico nulo a la salida.

Para la esfera hemos usado una malla de 19.942 nodos con 15.840 elementos distribuidos en un dominio computacional formado por una caja definida por $-3 \leq x \leq 10$, $-3 \leq y \leq 3$, $-3 \leq z \leq 3$ con una esfera de diámetro unitario. Las condiciones de contorno fueron similares al caso del cilindro.

El costo computacional asociado con todas las operaciones que involucran al preconditionador se estima que ronda un 30 % del costo inicial. Las figuras relacionadas a la velocidad de convergencia que a continuación se presentan se organizan de la siguiente forma: sobre la izquierda se grafica el incremento de la variable de estado ΔQ en función de las iteraciones, mientras que a la derecha se hace lo propio con el residuo $\|R\|$. Comenzamos mostrando los resultados de flujo invíscido alrededor del perfil NACA 0012 para un número de Mach de 0,001. La Figura 1 muestra no solamente una buena convergencia, sino también un buen condicionamiento del problema ya que todas las ecuaciones convergen con la misma tasa de convergencia (pendiente). Es importante resaltar que el problema físico tiene características que viajan con velocidades muy dispares, por ejemplo las ondas acústicas viajan aproximadamente 1000 veces más rápido que las ondas de entropía y las de vorticidad.

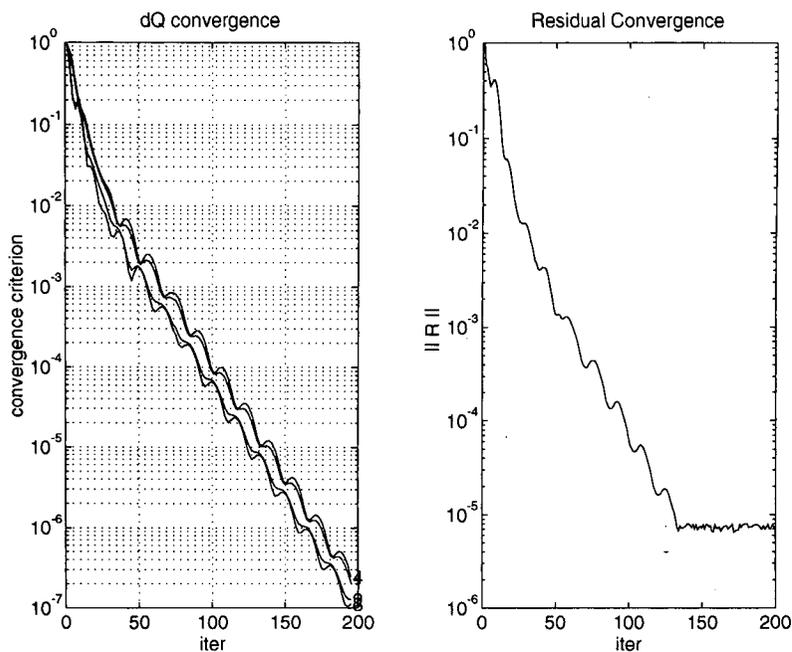


Figura 1. NACA0012 - Euler - $Ma = 0,001$ - convergencia

NOTA:

Los gráficos correspondientes al caso no preconditionado no se muestran ya que la solución numérica es espacialmente inestable. Este es otro de los factores que favorecen al preconditionamiento, el de no ser sólo un remedio para acelerar la convergencia sino que en algunos casos es hasta necesario para solucionar las inestabilidades asociadas con la incompresibilidad.

La Figura 2 muestra los coeficientes de presión a la izquierda y el coeficiente de presión total a la derecha para la solución preconditionada. A pesar de utilizar una malla gruesa se obtienen valores del coeficiente de presión total cercanos a la unidad, que es la solución exacta del caso inviscido. A continuación presentamos resultados sobre el mismo perfil pero para el caso viscoso. Hemos usado un $Ma = 0,001$ y un $Re = 200$.

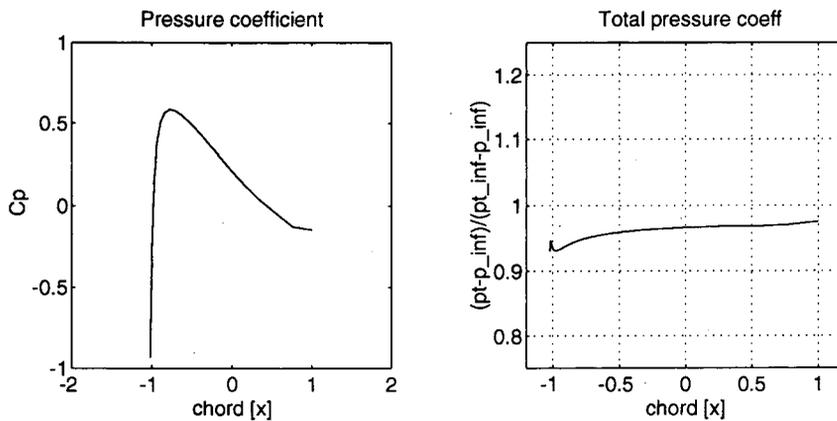


Figura 2. NACA0012 – Euler – $Ma = 0,001$ – solución

La Figura 3 muestra que las buenas propiedades de convergencia del caso inviscido no se pierden cuando aparecen efectos viscosos. Más aún la solución sigue siendo numéricamente estable en contraste con la solución no preconditionada que presenta numerosas oscilaciones.

La Figura 4 muestra un resumen con algunos de los resultados en velocidad de convergencia cuando se fue variando el número de Reynolds frente al obtenido con el caso inviscido. Se observa un factor de aproximadamente dos entre el caso inviscido y el viscoso y una muy pareja *performance* del método para todos los números de Reynolds utilizados.

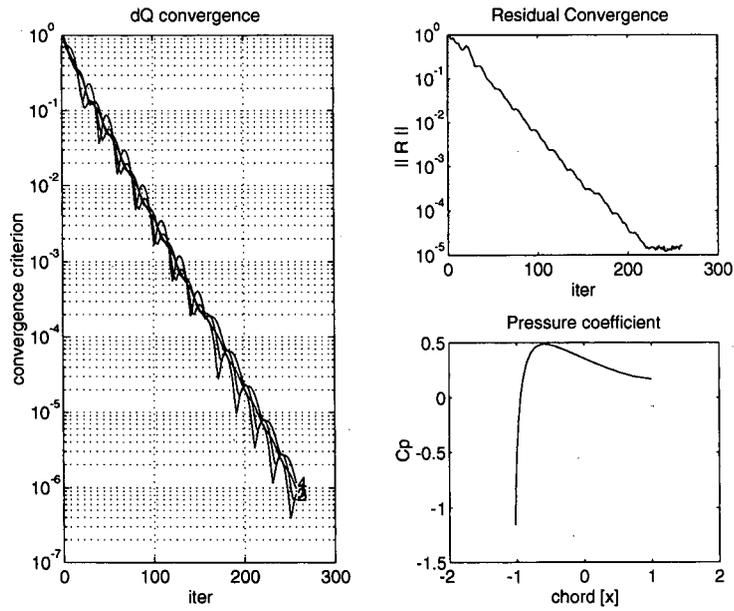


Figura 3. NACA0012 – NavierStokes – $Ma = 0,001$, $Re = 200$ – convergencia y solución

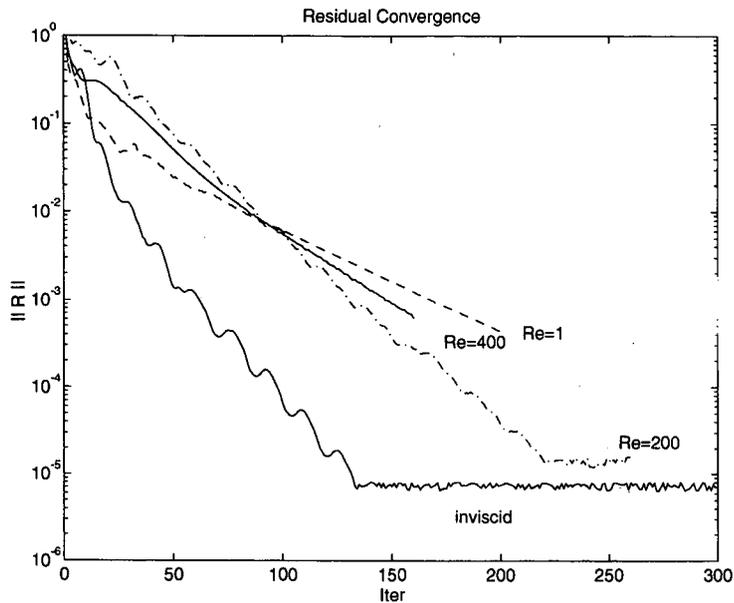


Figura 4. NACA0012 – $Ma = 0,001$ – convergencia

Las Figuras 5 y 6 muestran los resultados en el caso del cilindro circular para $Ma = 0,001$ y $Re = 20,1$ respectivamente. Las conclusiones son similares a las anteriores salvo en el caso del Reynolds más bajo donde la primera ecuación se satura casi inmediatamente. No obstante, observando el residuo vemos que éste continúa descendiendo en forma monótona.

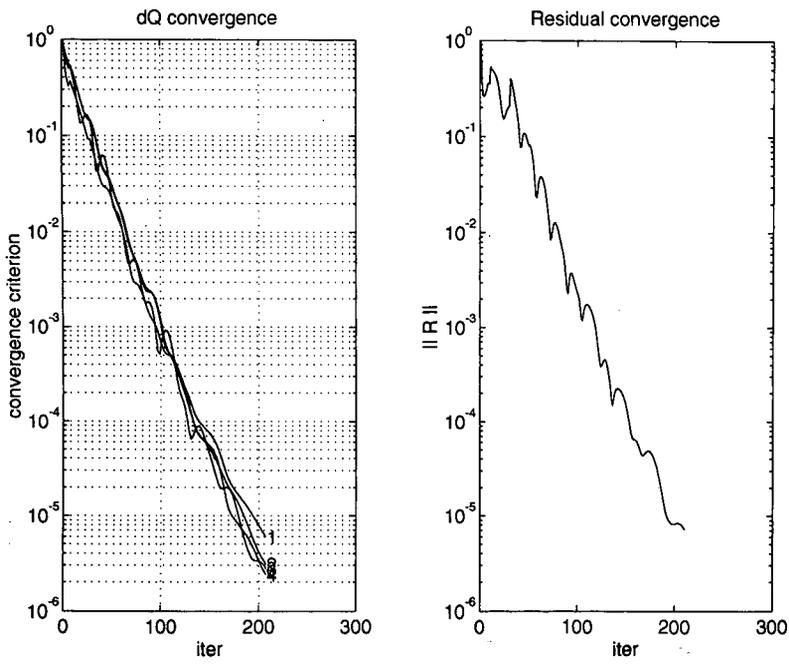


Figura 5. Cilindro - $Ma = 0,001$, $Re = 20$ - convergencia

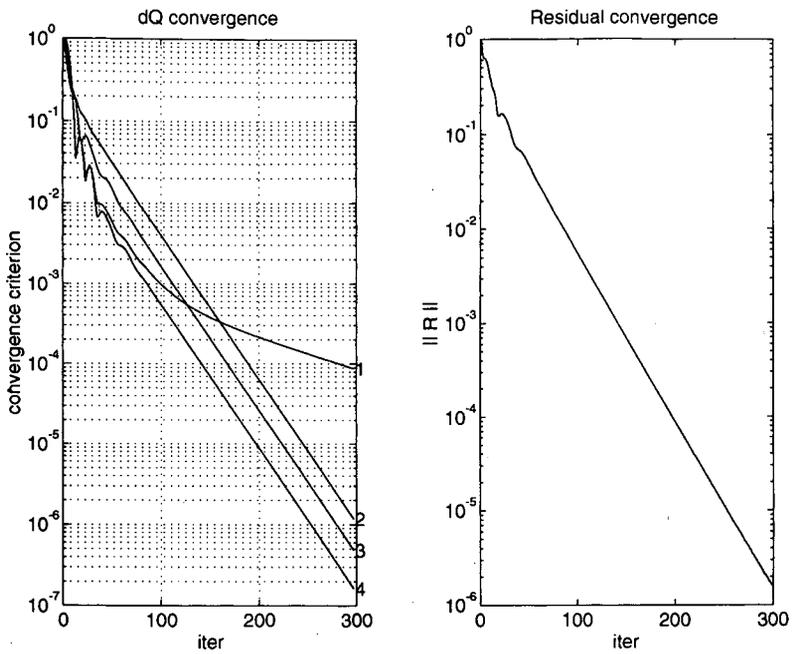


Figura 6. Cilindro - $Ma = 0,001$, $Re = 1$ - convergencia

El último ejemplo se trata de un caso tridimensional representado por flujo alrededor de una esfera. Este ejemplo tiene solución analítica en el caso de Stokes y algunas aproximaciones asintóticas en el caso de Reynolds bajos o altos. También existe una correlación entre el número de Reynolds y la extensión o tamaño del bolsón de recirculación aguas abajo de la esfera. La Figura 7 muestra la historia de la convergencia para el caso con $Ma = 0,002$ y $Re = 10$, notándose el mismo comportamiento que los casos anteriores, mientras que la Figura 8 muestra las líneas de corriente para este mismo ejemplo. El residuo se reduce 6 órdenes de magnitud en 100 iteraciones de GMRES con una velocidad constante. Después de 100 iteraciones los errores de redondeo dominan y la convergencia de la solución se estanca. Para este valor del número de Reynolds no existe recirculación en la zona posterior de la esfera siendo este patrón confirmado por los resultados mostrados en la Figura 8. El último ejemplo consiste de la misma esfera pero a un Reynolds de 100. La convergencia no se presenta por razones de espacio pero su comportamiento no difiere básicamente de los anteriores. La Figura 9 muestra las líneas de corriente para el plano $z = 0$ y la zona de recirculación aguas abajo de la esfera tiene una extensión de aproximadamente 3 veces el radio de la esfera contado desde el centro de la misma. Esta observación coincide con los experimentos de laboratorio de Taneda y los cálculos computacionales via métodos de expansiones de Jenson²³.

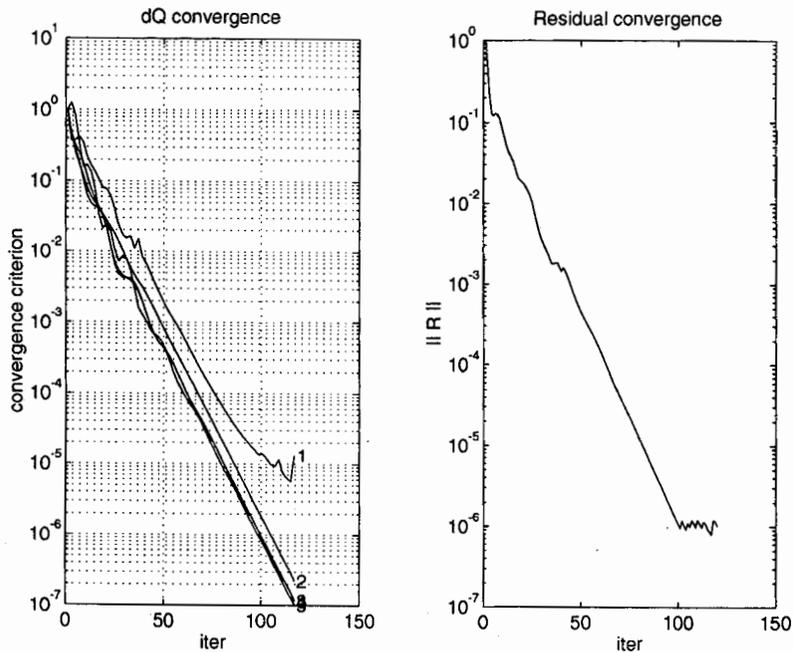


Figura 7. Esfera - $Ma = 0,002$, $Re = 10$ - convergencia

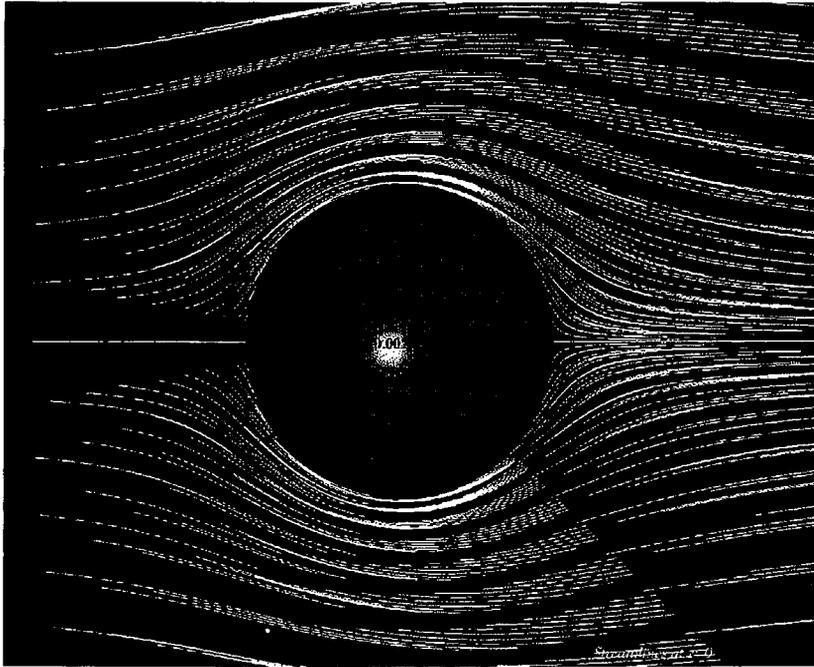


Figura 8. Esfera - $Ma = 0,002$, $Re = 10$ - líneas de corriente



Figura 9. Esfera - $Ma = 0,002$, $Re = 100$ - líneas de corriente

REFERENCIAS

1. S. Patankar, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences", Mc Graw-Hill Book Company, (1980).
2. F. Harlow y J. Welch, "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow with Free Surfaces", *Physics of Fluids*, Vol. **8**, 12, pp. 2182-2185, (1965).
3. R. Issa, "Solution of the Implicit Discretized Fluid Flow Equations by Operator-Splitting", *Journal of Computational Physics*, Vol. **62**, pp. 40-65, (1986).
4. A. Chorin, "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems", *Journal of Computational Physics*, Vol. **2**, pp. 12-26, (1967).
5. O. Zienkiewicz, J. Szmelter y J. Peraire, "Compressible and Incompressible Flow: An Algorithm for All Seasons", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **78**, pp. 105-121, (1990).
6. O. Zienkiewicz y J. Wu, "A General Explicit or Semi-Explicit Algorithm for Compressible or Incompressible Flows", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **35**, pp. 457-479, (1992).
7. O. Zienkiewicz y R. Codina, "A General Algorithm for Compressible and Incompressible Flow. Part I: The Split, Characteristic Based Scheme", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, a publicar.
8. E. Turkel, "Preconditioned Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations", *Journal of Computational Physics*, Vol. **72**, pp. 277-298, (1987).
9. R. Peyret y H. Viviand, "Recent Advances in the Aerospace Sciences", C. Casci (Ed.), Plenum, New York, (1985).
10. H. Viviand, "Pseudo-Unsteady Systems for Steady Inviscid Calculations", *Numerical Methods for the Euler Equations of Fluid Dynamics*, SIAM, pp. 334-368, (1985).
11. C. Merkle y Y. Choi, "Computation of Low Speed Compressible Flows with Time-Marching Procedures", *Int. J. Num. Meth. in Engng*, Vol. **25**, pp. 293-311, (1985).
12. J. Feng y C. Merkle, AIAA Paper 90-0016 (1990).
13. B. van Leer, W. Lee y P. Roe, "Characteristic Time-Stepping or Local Preconditioning of the Euler Equations", AIAA Paper 91-1552-CP, (1991).
14. M. Storti, N. Nigro y S. Idelsohn, "Steady State Incompressible Flows Using Explicit Schemes with an Optimal Local Preconditioning", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **124**, pp. 231-252, (1995).
15. M. Storti, C. Baumann y S. Idelsohn, "A Preconditioning Mass Matrix to Accelerate the Convergence to the Steady Euler Solutions Using Explicit Schemes", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **34**, pp. 519-541, (1992).
16. S. Venkateswaran, J. Weiss, C. Merkle y Y. Choi "Propulsion-Related Flowfields Using the Preconditioned Navier-Stokes Equations" AIAA Paper 92-3437, (1992).
17. Y. Choi y C. Merkle, "The Application of Preconditioning in Viscous Flows", *Journal of Computational Physics*, Vol. **105**, pp. 207-223, (1993).
18. J. Shuen, K. Chen y Y. Choi, "A Coupled Implicit Method for Chemical Non-Equilibrium Flows at All Speeds", *Journal of Computational Physics*, Vol. **106**, pp. 306-318, (1993).

19. P. Buelow, S. Venkateswaran y C. Merkle, "Effect of Grid Aspect Ratio on Convergence", *AIAA Journal*, Vol. **32**, 12, pp. 2401-2408, (1994).
20. Y. Saad y M. Schultz, "GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Non-Symmetric Linear Systems", *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol. **7**, pp. 856-869, (1986).
21. S. Aliabadi, "Parallel Finite Element Computations in Aerospace Applications", Ph.D. Thesis, Department of Aerospace Engineering and Mechanics, University of Minnesota, (1994).
22. N. Nigro, M. Storti, S. Idelsohn y T. Tezduyar, "Physics Based GMRES Preconditioner for Compressible and Incompressible Navier-Stokes Equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (1996).
23. M. van Dyke, "*Perturbation Methods in Fluid Mechanics*", The Parabolic Press, Stanford, California, (1975).