

UN MODELO DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS PARA LA RESOLUCION DEL PROBLEMA DEL CONTACTO ELASTICO

FRANCISCO J. GALLEGO

y
JUAN J. ANZA

*Dpto. de Ingeniería Mecánica
Universidad de Zaragoza
Luciano Gracia s/n
50015 Zaragoza*

RESUMEN

Se aborda el problema del contacto elástico haciendo uso del método de los multiplicadores de Lagrange, dando lugar a un modelo de elementos finitos mixtos. Se introduce explícitamente una ley de fricción no-lineal e implícitamente un carácter no local para la misma. Para evitar oscilaciones de la variable tensión en las proximidades de puntos singulares, se considera la formulación de un funcional lagrangiano perturbado. Los algoritmos propuestos liberan posibles dependencias nodales de los cuerpos contactores, permitiendo la discretización independiente de ambos, y el contacto simultáneo en zonas distintas de geometría cualquiera. La implementación en el ordenador se ha limitado a los casos plano y axisimétrico.

SUMMARY

The static elastic contact problem is faced up through Lagrange multipliers, leading to a mixed finite element problem. A non linear friction law is introduced explicitly and the non local character of the friction phenomena is taken into account in an implicit way. In order to avoid stress oscillations near singular points a perturbed lagrangian functional is considered. The algorithms herein proposed do not impose nodal dependencies over the contacting surfaces, letting the independent discretization of both bodies. The method is able to model simultaneous contact over different regions of any geometrical shape. Computer code, examples and results here presented, are restricted to axisymmetrical and bidimensional cases.

INTRODUCCION

Los elevados índices de prestación exigidos en la actualidad a numerosos conjuntos mecánicos imponen fuertes requerimientos al diseño de sus elementos componentes. Esto es motivo para que aspectos del diseño en los que antes no era preciso profundizar deban ser contemplados con gran rigor en la actualidad. La deformación local de las zonas de contacto, y la mutua adecuación de las formas de las superficies donde éste

Recibido: Diciembre 1987

se establece, puede afectar de forma importante las relaciones cinemáticas establecidas entre dos o más sólidos, ligados por restricciones de contacto. Entre los numerosos casos de interés, pueden destacarse como característicos, el contacto entre los elementos de un rodamiento, entre elementos de unión o el contacto rueda-carril.

El análisis del contacto entre sólidos interesa en la actualidad bajo una perspectiva más amplia que la de los problemas mecánicos tradicionales del contacto estático. El estudio de los procesos de impacto requiere el conocimiento de la evolución temporal de las áreas de contacto y conduce a algoritmos más generales de contacto dinámico, desarrollados para el modelado del impacto. Estos algoritmos encierran mayor complejidad que los orientados específicamente al análisis del contacto estático, puesto que además de preservar la no penetración, deben considerar la movilidad de la interfase y los efectos másicos. Para ello, en los sucesivos pasos que discretizan la evolución en el tiempo, deben evaluarse los desplazamientos, velocidades y aceleraciones, manteniendo la cantidad de movimiento de la interfase de contacto.

El método de los elementos finitos ha proporcionado una importante herramienta de trabajo para abordar los problemas de la mecánica del continuo. El método se ha aplicado al problema del contacto a través de distintos algoritmos. Entre éstos cabe destacar los basados en procedimientos incrementales "prueba-error" tales como [Chan et al.¹, Wilson et al.²] en los que se determina el tamaño del incremento de carga tal que hace cambiar las condiciones de contorno del problema. Los que emplean elementos imaginarios de muy pequeño espesor, llamados elementos "frontera", que dispuestos sobre la posible zona de contacto modifican su rigidez de acuerdo a las relaciones cinemáticas alcanzadas sobre la zona de contacto [Desai et al.³, Ostachowicz⁴, Urzua et al.⁵]. Y métodos que minimizan un funcional con restricciones mediante multiplicadores de Lagrange o por introducción de términos de penalización [Bathe et al.⁶, Friedriksson⁷, Oden et al.⁸, Pian et al.⁹, Yagawa et al.¹⁰]. Tradicionalmente la fricción se ha introducido en la formulación del problema del contacto por aplicación de la ley de fricción de Coulomb, dando lugar a un funcional convexo no diferenciable. Oden y Pires¹¹ han desarrollado recientemente leyes de fricción de los tipos denominados "no local" y "no lineal" estableciendo la existencia y unicidad para la formulación variacional.

En el campo del contacto dinámico los algoritmos existentes no consideran los efectos de la fricción que son secundarios en los procesos generales de impacto. Son importantes los estudios bidimensionales [Wilkins¹²], encaminados al análisis de la penetración y perforación de proyectiles y los tridimensionales [Hallquist¹³], donde el contacto se impone nodo contra superficie, mediante el método de penalización y una técnica de doble paso que permite un tratamiento simétrico de ambas superficies de contacto. Recientemente Miquel y Bonet¹⁴ han presentado un procedimiento que permite la estimación adecuada de las rigideces ficticias del método de penalización con objeto de evitar las inestabilidades numéricas de los procesos explícitos de integración.

En este trabajo se presentan procedimientos para el estudio del contacto estático mediante técnicas de elementos finitos donde las restricciones de contacto se imponen mediante multiplicadores de Lagrange. Este método conduce a un número de ecuaciones superior al que se obtiene mediante el método de penalización, pero sin embargo es más sistemático y carece de los inconvenientes numéricos (modos no energéticos de

deformación) que conlleva la integración reducida propia del método de penalización. En línea con los trabajos más recientes [Hallquist¹³, Bathe⁶, Simo¹⁵] los algoritmos desarrollados carecen de las dependencias nodales que anteriormente no han permitido la libre discretización de las interfases de contacto, ni la posibilidad de representar directamente procesos evolutivos de acomodación. Frente al contacto nodo contra superficie, impuesto por Bathe⁶ mediante multiplicadores de Lagrange puntuales con significado físico de fuerzas, en este trabajo, los multiplicadores han sido formulados en forma continua, correspondiéndoles el significado físico de la tensión de contacto. Ello conduce al concepto de compatibilidad integral, obteniéndose de forma directa resultados similares a los obtenidos por Hallquist¹³ mediante el contacto nodo contra superficie y el tratamiento simétrico de la interfase mediante la técnica de doble paso.

La formulación del problema del contacto se ha realizado mediante un funcional lagrangiano perturbado, que ha permitido eliminar las oscilaciones de la variable tensión (multiplicadores) en las proximidades de puntos singulares, de forma similar a los resultados obtenidos por Simo¹⁵, mediante el método perturbado de penalización, aplicado para obtener una compatibilidad de nodo contra superficie de doble paso. En este marco definido por la imposición de la condición de no penetración mediante multiplicadores de Lagrange, se ha experimentado el comportamiento de leyes no-lineales de fricción consideradas explícitamente, a quienes se ha dotado en forma implícita de mecanismos de comportamiento no local. La implementación en el ordenador de la formulación descrita en este trabajo, se ha limitado a los casos plano y axisimétrico.

FORMULACION DEL PROBLEMA

Se presentan a continuación las formulaciones del problema del contacto elástico correspondientes a los casos con y sin fricción. Se ha optado por consolidar la formulación del problema sin fricción y realizar posteriormente un desarrollo paralelo para el problema con fricción. Las razones para este desarrollo están basadas en las importantes dificultades que en su planteamiento, tanto físico como matemático, presenta el problema con fricción frente al caso en ausencia de la misma.

CONTACTO ELASTICO SIN FRICCION

La formulación del contacto elástico se basa en las ecuaciones generales de la elasticidad y en las especiales condiciones de contorno sobre la superficie de contacto. Las condiciones cinemáticas para el caso de contacto de sólido elástico con superficie rígida se expresan a través de la denominada [Oden y Kikuchi⁸] "Condición de contacto linealizada":

$$\mathbf{u}_N + \mathbf{g}_N \leq 0 \quad \text{o} \quad u_N + g_N \leq 0 \quad (1)$$

$$\text{con} \quad \mathbf{g} = g \mathbf{i}_2 = (X_2^1 - \sum (X_1^1)) \mathbf{i}_2 \quad (2)$$

cuya representación gráfica bidimensional se muestra en la Figura 1, y donde:

$X_2 = \Sigma(X_1)$ es la ecuación de la superficie rígida de contacto.

X_i^1 y X_i^2 ($i = 1 - 2$) las coordenadas iniciales de las superficies elástica y rígida respectivamente.

\mathbf{N} es el vector normal a la superficie rígida, en el punto R .

S es un punto genérico de la superficie elástica. La dirección RS es paralela a la dirección X_2 .

g es la distancia SR , y \mathbf{u} el vector desplazamiento en el punto S .

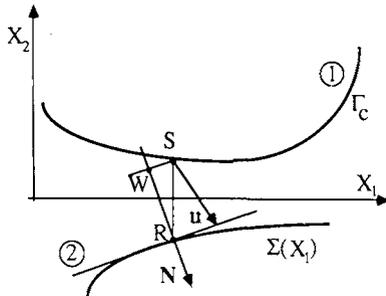


Figura 1. Geometría del contacto.

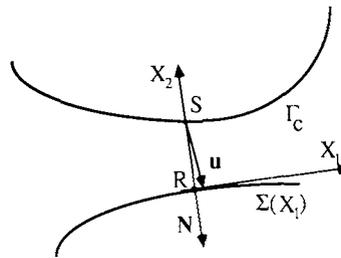


Figura 2. Ejes locales.

El desplazamiento \mathbf{u} debe ser tal que después de la deformación el punto S esté situado en o por encima del plano tangente a la superficie $\Sigma(X_1)$ por el punto R . Esta ecuación establece en forma aproximada la condición de "no penetración", con una precisión dependiente en cada punto S de la orientación del eje X_2 . Por esta razón es conveniente tomar los ejes locales (X_1, X_2) en forma tal que el problema aproximado tenga sentido, en particular podrían tomarse los correspondientes a la normal y tangente en cada punto a la superficie de contacto (Figura 2).

Las condiciones en tensión son:

- Condición de contacto unilateral

$$\begin{aligned} \sigma_N = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{N} \leq 0 & \quad \text{si existe contacto} \\ \sigma_N = 0 & \quad \text{si no existe contacto} \end{aligned} \quad (3)$$

- Superficie perfectamente lubricada. Ausencia de fricción:

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_N \mathbf{N} = 0 \quad (4)$$

En el caso de contacto entre dos sólidos elásticos, las condiciones se plantean formalmente en la misma manera, sin más que llamar:

$$\begin{aligned}
u_N &= u_N^1 - u_N^2 \\
g_N &= g_N^1 - g_N^2 = (\vartheta(X_1^1) - \sum (X_1^1)) \mathbf{i}_2 \mathbf{N}
\end{aligned} \tag{5}$$

donde $\vartheta(X_1)$ es la ecuación de la segunda superficie de contacto.

Problema de contorno

Puesto que las condiciones de contorno sobre la superficie de contacto se pueden expresar en forma equivalente para el contacto con sólido elástico o sobre base rígida, escribiremos la formulación para esta última.

Se trata de encontrar un campo de desplazamientos $u = \{u_i\}$ sobre el dominio elástico Ω que satisfaga:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{en } \Omega \tag{6}$$

$$u_i = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \tag{7}$$

$$\sigma_{ij}(u)n_j = t_i \quad \text{en } \Gamma_\sigma \tag{8}$$

y las condiciones de contacto unilateral

$$u_N + g_N \leq 0, \quad \sigma_N \leq 0, \quad \sigma_N(u_N + g_N) = 0, \quad \sigma_T = 0 \quad \text{en } \Gamma_c \tag{9}$$

Formulación variacional

Haremos uso en este apartado de algunas relaciones que al respecto se indican en Viaño¹⁶. Introduzcamos en primer lugar el espacio de Hilbert

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} = [v_i] \in [\mathbf{H}^1(\Omega)]^3 \mid v_i = 0 \quad \text{en } \Gamma_u, \quad 1 \leq i \leq 3\} \tag{10}$$

donde $\mathbf{H}^1(\Omega)$ es el espacio de Sobolev usual de funciones $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Supongamos además que las fuerzas de masa f_i y de superficie t_i son tales que

$$f_i \in \mathbf{L}_2(\Omega), \quad t_i \in \mathbf{L}_2(\Gamma_\sigma), \quad 1 \leq i \leq 3 \tag{11}$$

Finalmente supondremos que la función distancia g_N verifica

$$g_N \in \mathbf{L}_2(\Gamma_c) \tag{12}$$

Las restricciones (1) imponen el siguiente conjunto de desplazamientos admisibles

$$\mathbf{K} = \{v \in \mathbf{V} \mid v_N + g_N \leq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_c\} \tag{13}$$

\mathbf{K} es un conjunto convexo, cerrado y no vacío de \mathbf{V} . Duvaut-Lions¹⁷ mediante la aplicación de la fórmula de Green, prueban la equivalencia formal de (6 – 9) con la siguiente inecuación variacional

$$\begin{aligned}
 u &\in \mathbf{V} \\
 \mathbf{a}(u, v - u) &\geq \mathbf{G}(v - u), \quad \forall v \in \mathbf{K}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Donde $\mathbf{a}(v, v)$ es la forma bilineal habitual en elasticidad y $\mathbf{G}(v)$ el trabajo de las fuerzas externas. Glowinski¹⁸ prueba que en las hipótesis (12 - 13) el problema (14) admite una y sólo una solución que, siendo $\mathbf{a}(\bullet, \bullet)$ simétrica, coincide con el problema de minimización con restricciones siguiente

$$\mathbf{J}(u) = \min \mathbf{J}(v), \quad v \in \mathbf{K}
 \tag{15}$$

donde \mathbf{J} es el funcional de energía potencial

$$\mathbf{J}(v) = 1/2\mathbf{a}(v, v) - \mathbf{G}(v), \quad \forall v \in \mathbf{V}
 \tag{16}$$

Funcional lagrangiano

Podemos relajar las condiciones para el espacio de búsqueda de soluciones formulando mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, el funcional aumentado

$$\mathbf{L}_N(v, \tau_N) = \mathbf{J}(v) - (\tau_N, v_N + g_N), \quad v \in \mathbf{V}, \quad \tau_N \in \mathbf{M}
 \tag{17}$$

Con (\bullet, \bullet) producto interno en \mathbf{L}_2 . El multiplicador de Lagrange τ_N representa físicamente la tensión normal sobre la zona de contacto y por tanto ésta debe verificar la condición de contacto unilateral

$$\mathbf{M} = \{\tau_N \in \mathbf{L}_2(\Gamma_c) \mid \tau_N \leq 0 \text{ en } \Gamma_c\}
 \tag{18}$$

El punto estacionario (u, λ_N) del funcional lagrangiano se determina por la condición de mínimo del mismo respecto a las variables del problema, dando lugar al siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}(u, v) - (\lambda_N, v_N) &= \mathbf{G}(v) & \forall v \in \mathbf{V} \\
 (\tau_N, u_N) &\geq -(\tau_N, g_N) & \forall \tau_N \in \mathbf{M}
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Funcional lagrangiano perturbado

No siempre es posible garantizar la existencia de un punto de ensilladura para el funcional langrangiano (17). Las dificultades nacen de la posible falta de cumplimiento de la condición de coercividad negativa respecto del multiplicador [Oden y Carey¹⁹]. Para asegurar el cumplimiento de esta condición se introduce el funcional lagrangiano perturbado

$$\mathbf{L}_\varepsilon(v, \tau_N) = \mathbf{L}(v, \tau_N) - (1/2)\varepsilon \|\tau_N\|_{\mathbf{M}}^2 \quad (20)$$

Donde ε es un número positivo arbitrario. Se demuestra, que bajo ciertas condiciones (Condición de Babuska²⁰-Brezzi²¹) las soluciones perturbadas convergen a la solución original haciendo tender $\varepsilon \rightarrow 0$.

Las soluciones perturbadas se obtienen del siguiente problema variacional:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(u_\varepsilon, v) - (\lambda_{N_\varepsilon}, v_N) &= \mathbf{G}(v) \quad \forall v \in \mathbf{V} \\ (\tau_N, u_{N_\varepsilon}) - \varepsilon(\tau_N, \lambda_{N_\varepsilon}) &\geq -(\tau_N, g_N) \quad \forall \tau_N \in \mathbf{M} \end{aligned} \quad (21)$$

CONTACTO ELASTICO CON FRICCION

Ley de fricción

La ley de fricción de Coulomb, habitualmente empleada en los trabajos de contacto, puede ser representada en la forma mostrada por la Figura 3.

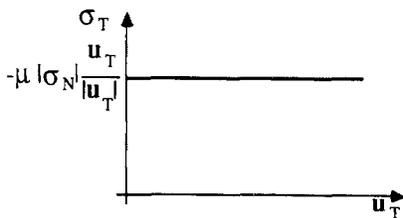


Figura 3. Ley de fricción de Coulomb.

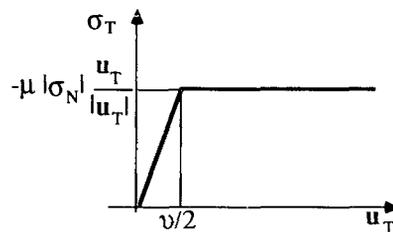


Figura 4. Ley de fricción no-lineal.

Siguiendo a Oden y Pires¹¹, se puede argumentar que la Ley de Coulomb no es una base de partida adecuada para los problemas de contacto en la teoría de la elasticidad, ni desde un punto de vista físico ni matemático. Estos autores proponen incorporar a la ley de fricción un término "no-local" de manera que un punto dado esté influenciado en su comportamiento de fricción por lo que ocurra en un entorno⁸ del mismo, a diferencia del planteamiento punto a punto establecido por la ley de Coulomb. En la formulación presentada en este trabajo no se considerará explícitamente este carácter no-local del mecanismo de la fricción. Las relaciones que expresan el comportamiento del mecanismo de fricción conducen siempre a ecuaciones constitutivas no lineales. La información experimental muestra que siempre existen, incluso en zonas de supuesta adherencia, pequeños desplazamientos tangenciales de los puntos de la superficie de contacto, debidos a las deformaciones elásticas y elastoplásticas de las "uniones" entre las rugosidades de dichas superficies. Cuando estas uniones se rompen se produce el deslizamiento entre ambas superficies. Las leyes de fricción que recogen esta conducta

de la unión, previa al deslizamiento, se denomina "no-lineales". En la Figura 4 se muestra gráficamente una ley de las más simples que pudieran proponerse.

La ley se escribe como:

$$\begin{aligned} |\sigma_T| < -\mu\sigma_N &\implies u_T = -\frac{v/2}{\mu|\sigma_N|}\sigma_T \\ |\sigma_T| = -\mu\sigma_N &\implies \text{existe un } \alpha \geq 0, \text{ tal que } u_T = -\alpha\sigma_T \end{aligned} \quad (22)$$

Donde μ es el coeficiente de fricción. Es evidente que para $v = 0$ se tiene la tradicional ley de Coulomb. En la formulación que se propone para el contacto con fricción, se considerará una ley de fricción de este tipo.

Formulación variacional

El problema de contorno se establece sin más que modificar en el problema planteado por (6 - 9) las condiciones de contorno para σ_T , introduciendo las propias de la ley de fricción empleada (22).

En el planteamiento del problema del contacto elástico con fricción se produce una situación fuertemente no-lineal. Por una parte la forma y tamaño de la superficie de contacto Γ_c es desconocida, por otra, la partición de esta superficie ha de realizarse en función de las tensiones normal y tangencial sobre la misma, ambas incógnitas de nuestro problema. Consideremos pues la formulación variacional del problema del contacto elástico con fricción en el marco de un proceso iterativo, y supongamos conocida la forma y tamaño de la superficie de contacto, y también la partición de la misma en dos zonas de adherencia y deslizamiento, realizada en base a las tensiones normal y tangencial que sobre la superficie de contacto se hubieran obtenido en iteraciones anteriores. El funcional lagrangiano para este problema se escribe

$$\mathbf{L}(v, \tau_N, \tau_T) = \mathbf{L}_N(v, \tau_N) - \mathbf{J}_F(v, \tau_T) \quad (23)$$

donde $\mathbf{J}_F(v, \tau_T)$ representa el trabajo virtual dado por las fuerzas de fricción:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_F(v, \tau_T) &= (\tau_T, v_T + \frac{v/2}{\mu|t_N|}\sigma_T) && \text{para } |\sigma_T| < -\mu t_N \\ \mathbf{J}_F(v, \tau_T) &= (-\mu|t_N|, v_T) && \text{para } |\sigma_T| = -\mu t_N \end{aligned} \quad (24)$$

El punto estacionario $(u, \lambda_N, \lambda_T)$ para este funcional se determinan de la condición de mínimo del mismo respecto de las variables del problema (v, τ_N, τ_T) , y donde las superficies de adherencia y deslizamiento se determinan por la condición:

$$\Gamma_{ca}, \text{ zona de adherencia donde se cumple} \quad |t_T| < -\mu t_N \quad (25)$$

$$\Gamma_{cd}, \text{ zona de deslizamiento donde se cumple} \quad |t_T| = -\mu t_N \quad (26)$$

y donde las tensiones tangencial y normal t_T y t_N están determinadas en iteraciones anteriores.

APROXIMACION CON ELEMENTOS FINITOS

La formulación en multiplicadores de Lagrange conduce a un modelo de elementos finitos mixtos. Realizando las aproximaciones habituales sobre los elementos finitos y definiendo además las siguientes relaciones para las variables de contacto:

$$\Delta \mathbf{u}_{Nh}^e = \mathbf{N}^{eT} \mathbf{H}^e \Delta \mathbf{u}^i \quad (27)$$

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}_{Nh}^e = \boldsymbol{\phi}^e \Delta \boldsymbol{\lambda}_N^i \quad (28)$$

supuesta formulación isoparamétrica: $\mathbf{g}_{Nh}^e = \mathbf{N}^{eT} \mathbf{H}^e \mathbf{g}^i$ (29)

$$\Delta \mathbf{u}_{Th}^e = \mathbf{T}^{eT} \mathbf{H}^e \Delta \mathbf{u}^i \quad (30)$$

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}_{Th}^e = \boldsymbol{\beta}^e \Delta \boldsymbol{\lambda}_T^i \quad (31)$$

(Donde: $\mathbf{N}^e, \mathbf{T}^e$, matrices de cosenos directores de la normal y tangente a la superficie de contacto; $\mathbf{H}^e, \boldsymbol{\phi}^e, \boldsymbol{\beta}^e$, matrices de funciones de forma para aproximar los desplazamientos, las tensiones normales y las tangenciales; $\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \boldsymbol{\lambda}_N^i, \Delta \boldsymbol{\lambda}_T^i$, vectores en forma incremental de desplazamientos, tensiones normales y tangenciales sobre los nodos de aproximación; \mathbf{g}^i , vector de distancias nodales.) Se obtienen las matrices y vectores propios del M.E.F. (\mathbf{K} , matriz de rigidez del o los sólidos elásticos; $\mathbf{R}_B, \mathbf{R}_T, \mathbf{P}_i$, vectores de fuerzas de volumen, de superficie y fuerzas internas de la iteración anterior) y además, como característico del problema del contacto aparecen [Gallego²²] las denominadas:

“Matriz de contacto” elemental en el estado (n):

$$\int_{\Gamma_c^e} \mathbf{H}^{eT} \mathbf{N}^e \boldsymbol{\phi}^e ds = \mathbf{K}_c^{e(n)} \quad (32)$$

“Matriz de fricción elemental en el estado (n):

$$\int_{\Gamma_c^e} \mathbf{H}^{eT} \mathbf{T}^e \boldsymbol{\beta}^e ds = \mathbf{K}_F^{e(n)} \quad (33)$$

“Matriz de Regularización” elemental en el estado (n):

$$v \int_{\Gamma_c^e} \boldsymbol{\beta}^{eT} \boldsymbol{\beta}^e / \mu |t_N^e + \Delta t_N^e| ds = \mathbf{K}_v^{e(n)} \quad (34)$$

El punto estacionario del funcional lagrangiano (23) se obtiene de la solución del siguiente sistema de ecuaciones, que escrito en forma incremental toma la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(n)} & -\mathbf{K}_c^{(n)} - \mathbf{K}_{Fa}^{(n)} \\ -\mathbf{K}_c^{(n)} - \mathbf{K}_{Fa}^{(n)} & \mathbf{K}_v^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^i \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_N^i + \Delta \boldsymbol{\lambda}_T^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} = \\ \leq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_B^{(n+1)} + \mathbf{R}_T^{(n+1)} \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_c^{(n)} \boldsymbol{\lambda}_N^{i(n)} + \mathbf{K}_{Fa}^{(n)} \boldsymbol{\lambda}_T^{i(n)} - \mathbf{K}_{Fd}^{(n)} \mu |t_N^i + \Delta t_N^i| \\ \mathbf{K}_c^{T(n)} (\mathbf{u}^i + \mathbf{g}^i) + \mathbf{K}_{Fa}^{T(n)} \mathbf{u}^{i(n)} + \mathbf{K}_b^{(n)} \boldsymbol{\lambda}_T^{i(n)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i^{(n)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{i(n+1)} &= \mathbf{u}^{i(n)} + \Delta \mathbf{u}^i \\ \boldsymbol{\lambda}_N^{i(n+1)} &= \boldsymbol{\lambda}_N^{i(n)} + \Delta \boldsymbol{\lambda}_N^i \\ \boldsymbol{\lambda}_T^{i(n+1)} &= \boldsymbol{\lambda}_T^{i(n)} + \Delta \boldsymbol{\lambda}_T^i \end{aligned} \quad (36)$$

donde los vectores y matrices que representan las restricciones del contacto con y sin fricción se han orlado de manera que se introduzcan en forma adecuada.

Sobre la aproximación en elementos finitos realizada, la influencia del término de perturbación se reduce a la introducción en la matriz de rigidez del sistema, para los g.d.l. en tensión, de un término adicional denominado "Submatriz de perturbación", que en términos de las integrales sobre la superficie de contacto se escribe:

$$\mathbf{K}_\varepsilon^{(n)} = \sum_{e=1}^{Mca} \mathbf{K}_\varepsilon^{e(n)} \quad , \quad \mathbf{K}_\varepsilon^{e(n)} = \varepsilon \int_{\Gamma_{ca}^e} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\beta})^T (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\beta}) ds \quad (37)$$

PROCESO DE SOLUCION

Para obtener soluciones al problema del contacto elástico es necesario resolver el sistema de ecuaciones en forma incremental (35). En este sistema aparecen desigualdades provocadas tanto por la falta de conocimiento de la superficie real de contacto como por la partición de ésta en subzonas de adherencia y deslizamiento. Estamos pues ante un problema no-lineal que precisa de un proceso iterativo que en sucesivos pasos "Prueba-Error" nos acerque a la solución correcta. El esquema iterativo propuesto se muestra en la Figura 5.

El esquema iterativo parte de unas condiciones de contorno iniciales que determinan un primer tamaño y partición de la superficie de contacto. La resolución del sistema de ecuaciones (35) obliga por una parte al cumplimiento de las condiciones de contorno para el contacto "normal" (Contacto sin fricción) a través de las restricciones cinemáticas impuestas por los λ_N , y por otra, al cumplimiento de las condiciones impuestas por ley de fricción aplicada. Sobre la superficie de adherencia, la ley de fricción no-lineal permite un pequeño desplazamiento tangencial de acuerdo con la relación tensión normal-tangencial existente en la iteración anterior y en función del parámetro de regularización ν empleado. Sobre la superficie de deslizamiento se introduce como carga exterior la correspondiente a una tensión tangencial cuyo valor es el producto del coeficiente de fricción por la tensión normal. La solución obtenida en cada iteración proporciona la base para determinar:

- El cumplimiento de las condiciones del contacto normal, que determina un nuevo tamaño de la superficie de contacto.

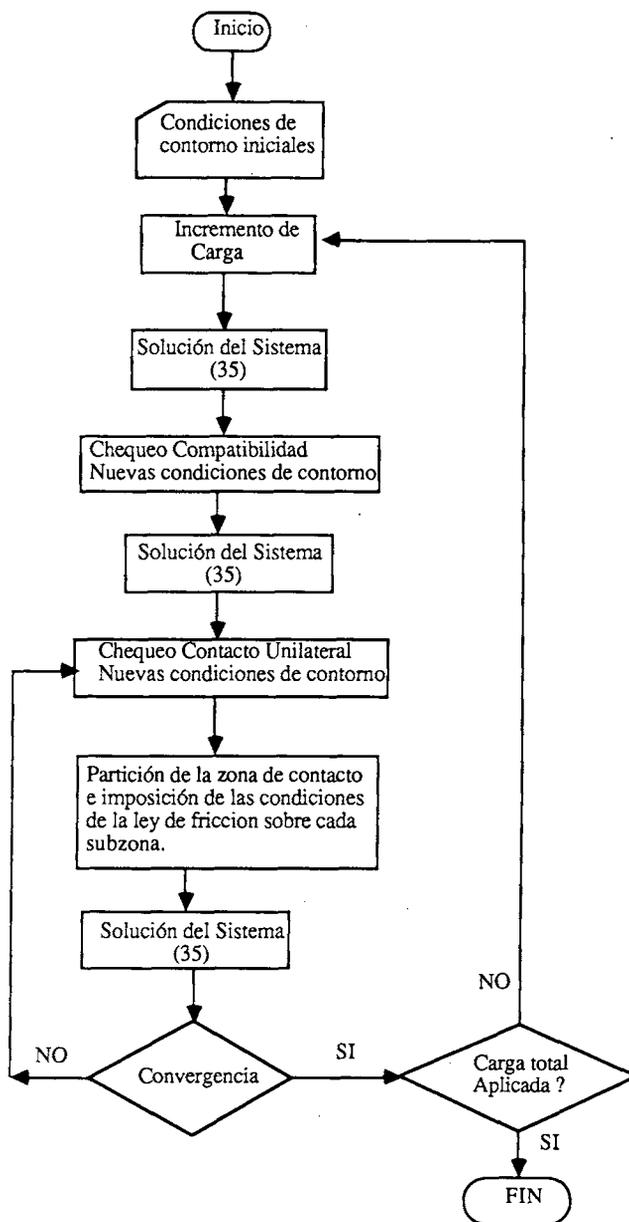


Figura 5. Esquema iterativo.

- Una nueva partición de la zona de contacto antes determinada, en zonas de adherencia y deslizamiento.

Este esquema iterativo, introducido en un proceso de carga incremental, tal como muestra la Figura 5, permite obtener la solución al problema del contacto para una secuencia de carga establecida en base a causas cualesquiera, externas al propio problema de contacto.

ELEMENTO DE CONTACTO

Las matrices elementales \mathbf{K}_C^e y \mathbf{K}_F^e definidas por (32) – (33), se obtienen integrando sobre un elemento definido sobre la superficie de contacto. La malla de elementos finitos proporciona en las superficies de contacto una simple y cómoda discretización para estos elementos. Se toman como valores nodales respecto de los que interpolar la variable desplazamiento, los correspondientes a los nodos sobre el contorno de cada elemento finito. Los valores nodales para interpolar la variable tensión (Multiplicador de Lagrange) se eligen, en número y posición, de acuerdo con la elección del tipo de funciones de interpolación que se decida emplear para aproximar el espacio de búsqueda de soluciones. En definitiva, esta discretización para representar la superficie de contacto real, supone la aceptación implícita, para la forma inicial de dicha superficie, de una de las dos superficies en contacto antes de la deformación. Puesto que se realiza un proceso iterativo en el que se tiene en cuenta el cambio de geometría en cada iteración al calcular las matrices $\mathbf{K}_C^{e(i)}$ y $\mathbf{K}_F^{e(i)}$, la integración final se realizará sobre la verdadera superficie de contacto, tanto en tamaño como en forma.

Las ideas vertidas en el epígrafe anterior sugieren definir en la superficie de contacto lo que denominaremos “**Elementos de Contacto**”, sobre los que se fundamenta todo el proceso de computación y para los que en paralelo con los “elementos finitos” habituales pueden establecerse sus características de aproximación.

La matriz de contacto elemental obtenida de la suma de \mathbf{K}_C^e y \mathbf{K}_F^e se escribe como

$$\mathbf{K}_{cF}^e = \mathbf{K}_C^e + \mathbf{K}_F^e = \int_{\Gamma_c^e} (\mathbf{H}_A^e, -\mathbf{H}_B^e)^T (\mathbf{N}, \mathbf{T})(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\beta}) ds \quad (38)$$

donde los subíndices A y B hacen distinción entre los cuerpos “contactor” y “contactado” respectivamente. Sobre el cuerpo contactor se define directamente el elemento de contacto, realizándose sobre el mismo la integración y estableciendo su geometría la dirección normal \mathbf{N}^e . Esta integral se realiza numéricamente, de manera que en los puntos de integración están implicadas las funciones \mathbf{u} y \mathbf{g} sobre el contactor, y en función de los ejes locales elegidos para imponer la condición de contacto linealizada se determinan los puntos que implican a las funciones \mathbf{u} y \mathbf{g} sobre el contactado, tal como se muestra en la Figura 6.

La matriz elemental tendrá una dimensión variable de acuerdo al número de puntos de integración, G , utilizados en su cálculo (Figura 7).

$$\mathbf{K}_{cFA,B}^e \approx \mathbf{K}_{cFA}^e - \mathbf{K}_{cFB1}^e - \dots - \mathbf{K}_{cFBG}^e \quad (39)$$

Las aportaciones a la integral, del elemento contactor y de los elementos implicados por los puntos de integración sobre el contactado, se introducen en la matriz de contacto elemental en forma de submatrices \mathbf{K}_{cFA}^e , \mathbf{K}_{cFBi}^e , ocupando distintas posiciones, de tal manera que en principio se supone que cada submatriz sobre el contactado corresponde a un elemento distinto. En el ensamblaje de la matriz elemental sobre la matriz de rigidez global, los términos con g.d.l. comunes se sumarán para obtener así la aportación total a los coeficientes de las ecuaciones de restricción de los elementos contactados.

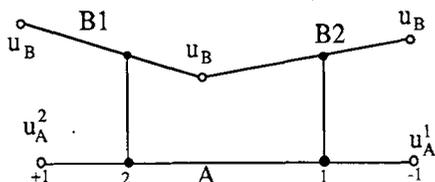


Figura 6. Puntos de integración.

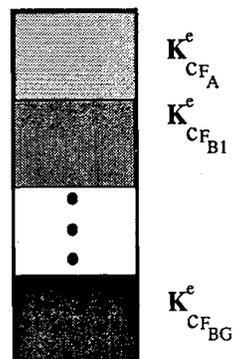


Figura 7. Matriz de contacto elemental.

El uso de diferentes funciones de interpolación para las variables tensión y desplazamientos da lugar a distintas matrices de contacto. De la necesaria conformidad entre las funciones que interpolan los desplazamientos sobre la malla de elementos finitos y los correspondientes elementos de contacto, se deduce que ambas han de ser del mismo orden. Puesto que las tensiones se obtienen de la derivada primera de los desplazamientos, una aproximación consistente para los mismos se realizará con funciones de interpolación de un orden menor que las utilizadas para éstos últimos. Asegurando el cumplimiento de estas directrices se han desarrollado tres aproximaciones distintas. La aproximación **L-C**, lineal para los desplazamientos y constante para las tensiones, la aproximación **Q-L**, cuadrática para los desplazamientos y lineal para las tensiones y la aproximación **3L**, en la que sobre cada dos elementos finitos bilineales se dispone un elemento de contacto con aproximación también lineal de las tensiones. La imposición de restricciones en sentido tangencial sólo se ha conseguido con elementos que rompían la "consistencia" de su aproximación, elementos con igual grado de aproximación para las tensiones que para los desplazamientos. Por su simplicidad, se desarrollaron en todos sus aspectos computacionales los elementos plano y axisimétrico con aproximación **L-L**, aproximación lineal para los desplazamientos y también lineal para las tensiones.

El código de ordenador implementado se ha organizado con el objetivo de mantener la generalidad de un programa de elementos finitos, donde sea posible combinar diversos comportamientos con las condiciones de contacto planteadas. La imposición de restricciones sobre la zona de contacto se realiza mediante nuevos "elementos", elementos de contacto, que se organizan, como es habitual en elementos finitos, con su propia conectividad, sus propiedades específicas, y se localizan a partir de la "librería" general de elementos del código de ordenador, previendo así las necesidades de crecimiento del programa.

Se define una matriz de conectividad para los elementos de contacto en la que se introducen, por entrada de datos, el tipo de elemento y la numeración de los nodos sobre los que en el elemento base se interpolan los desplazamientos y las tensiones. En el proceso de cálculo posterior y a partir de las distintas condiciones de contorno, se llena el resto de la matriz de conectividad con los números de los nodos de los elementos

finitos que sobre el cuerpo contactado corresponden a los puntos de integración sobre el contactor.

Esta matriz de conectividad nos permite ensamblar los términos de la matriz de contacto elemental en la matriz de rigidez global del problema a partir de los números de ecuaciones correspondientes a los g.d.l. de los distintos nodos. Lo que podríamos asimilar con las propiedades geométricas o del material de los elementos finitos habituales, se corresponde en esta organización con las coordenadas naturales que determinan sobre los elementos contactados los puntos de integración sobre el contactor (Figura 6). Estas coordenadas se recalculan en el proceso iterativo para cada modificación de las condiciones de contorno.

Esta concepción de las restricciones como elementos de contacto permite generar una estructura paralela y muy similar a la habitualmente realizada para los elementos finitos tradicionales proporcionando una muy cómoda y sistemática metodología de trabajo para la programación en el ordenador.

PARTICION DE LA SUPERFICIE DE CONTACTO

La partición de la superficie de contacto en dos subzonas de adherencia y deslizamiento requiere de la comprobación, para cada iteración, de las condiciones impuestas por la ley de fricción mediante las relaciones (25, 26). La ley de fricción establece una condición punto a punto, de manera que una primera opción para tomar las decisiones (25, 26) podría ser considerar en cada nodo de la zona de contacto esta relación, e introducir o liberar el g.d.l. de tensión tangencial según se cumpla la primera o la segunda relación. Otra opción consiste en asignar al elemento y no al nodo, la posibilidad de encontrarse en adherencia o en deslizamiento. Esto confiere además un carácter no-local, tal como el propuesto por Oden y Pires¹¹, si bien no de una forma explícita, al mecanismo de fricción implementado. Así se permite deslizar al elemento si el producto del coeficiente de rozamiento por la fuerza normal total que sobre el mismo se ejerce es mayor o igual que la fuerza total tangencial acumulada. Esta posibilidad ha sido apuntada por Bathe y Chaudhary⁶, donde también se imponen las restricciones de contacto a través de multiplicadores de Lagrange aunque no de forma integral. En el algoritmo propuesto se implementaron las dos opciones y se comprobó que esta última era la que proporcionaba mejor convergencia al algoritmo como también se reconoce en [Bathe y Chaudhary⁶].

RESULTADOS

Compatibilidad integral

En este apartado mostraremos el significado físico de la compatibilidad integral, desarrollada en este trabajo, comparando con los métodos más frecuentemente utilizados en la resolución del problema del contacto, en los que la compatibilidad se impone nodo contra nodo o nodo contra superficie. Los resultados obtenidos empleando el procedimiento integral se comparan con los expuestos por Simo et al.¹⁵, empleando un método de penalización tradicional en el que se impone la restricción nodo contra

superficie con dos técnicas diferentes de simple y doble paso. En la Figura 8a se muestra la geometría indeformada de un bloque elástico indentado por un punzón rígido. Sobre la zona de contacto se emplearon dos elementos de contacto del tipo L-C. Las Figuras 8b y 8c muestran los resultados obtenidos con el método de penalty, con simple y doble paso respectivamente. El perfil obtenido corresponde a una situación intermedia entre la penetración total que se alcanza con la técnica de simple paso, y la ausencia de penetración que se obtiene con la técnica de doble paso. Posteriores refinamientos de la malla se muestran en las Figuras 9 y 10. Se observa que los métodos de simple y doble paso se acercan a la solución integral a medida que aumenta el grado de refinamiento de malla.



Figura 8.

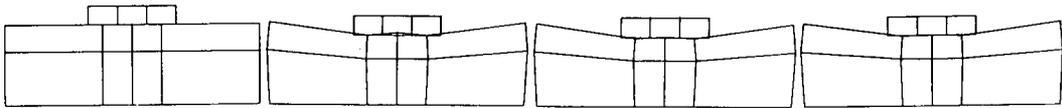


Figura 9.

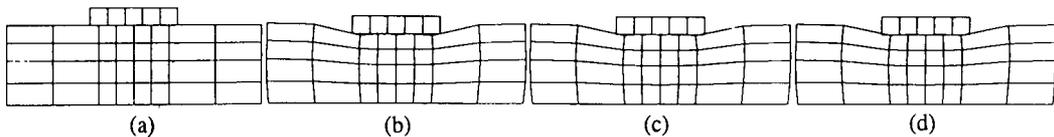


Figura 10.

Parámetro perturbador

Se considera a continuación un problema de contacto entre dos cuerpos elásticos con superficie de contacto conocida de antemano. El problema se representa en la Figura 11 y trata de la compresión de un dominio elástico rectangular sobre una cimentación también elástica y rectangular.

Una importante característica de este problema es la presencia de la singularidad propia de la esquina de contacto. Las presiones de contacto, obtenidas directamente de la resolución del sistema de ecuaciones, son muy sensibles a la aparición de este tipo de singularidades produciéndose oscilaciones en la tensión normal. La introducción de la submatriz de perturbación (37), relaja las condiciones de compatibilidad sobre la

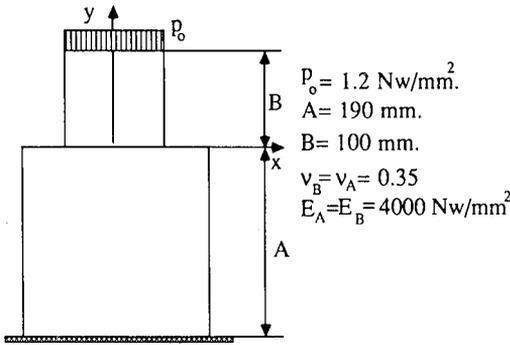


Figura 11. Definición del problema.

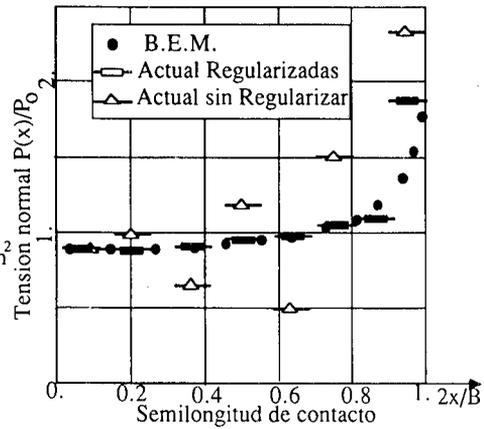


Figura 12. Tensiones normales.

superficie de contacto, dando lugar a un efecto regularizador de las presiones normales sobre la misma. Con parámetros de perturbación suficientemente pequeños se puede obtener una adecuada compatibilidad y evitar el perjuicio que para la variable tensión supone la existencia de importantes gradientes de la variable desplazamiento. En la Figura 12 se muestran las tensiones normales sobre la zona de contacto, oscilantes, sin parámetro perturbador, y regularizadas, con un parámetro de perturbación $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$, comparándose estas últimas con las obtenidas para el mismo problema con otro método [Garrido²³].

Superficie de contacto desconocida

Se considera a continuación un problema recogido en numerosas publicaciones de Oden y Kikuchi [Kikuchi²⁴, Oden et al.⁸, Oden²⁵] que trata de la indentación de una base elástica rectangular, infinitamente larga, por un cilindro totalmente rígido, también infinitamente largo, sobre el centro de la misma. Las características del material son $E=1000$, $\nu=0.3$. La situación se representa en la Figura 13. Sobre la posible zona de contacto se dispusieron elementos de contacto del tipo Q-L.

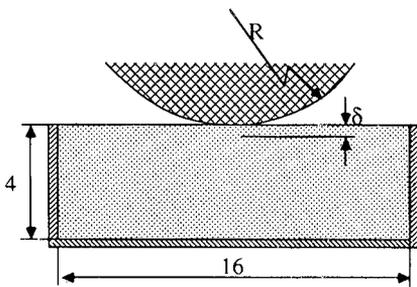


Figura 13. Definición del problema.

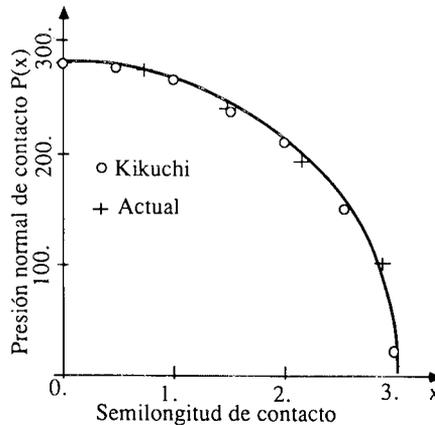


Figura 14. Tensiones normales.

La distribución de tensiones normales sobre la zona de contacto se muestra en la Figura 14 comparándose excelentemente con los resultados obtenidos por Kikuchi²⁴. En la Figura 15 se muestran la geometría inicial y deformada, apreciándose la buena compatibilidad obtenida sobre la zona de contacto.

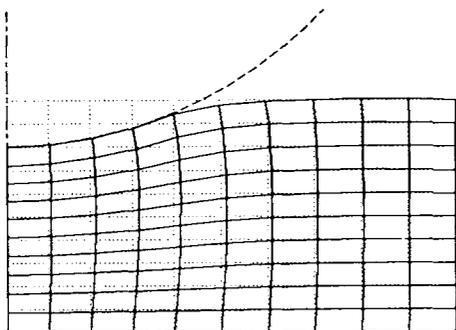


Figura 15. Mallas inicial y deformada.

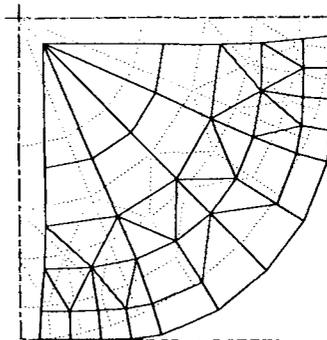


Figura 16. Mallas inicial y deformada.

Algoritmo multizona

El algoritmo y su implementación práctica en el ordenador conducen a una estructura de programación paralela a la de los elementos finitos tradicionales. Esta estructura aporta gran generalidad de cara a la resolución de muchos y variados problemas prácticos. En pos de esta generalidad se ha considerado en la programación del algoritmo la posibilidad de trabajar sobre uno o varios cuerpos y con una o varias zonas de contacto sobre cada uno de ellos. La formulación integral que se ha realizado del problema de contacto es evidente que abunda en la posibilidad de definir en forma cómoda tantas submatrices de rigidez como cuerpos interrelacionados por zonas de contacto estén presentes en el problema. Los elementos de contacto, como ejecutores en última instancia de las restricciones de contacto sobre las distintas zonas, se añaden de forma natural en la formulación integral en número igual al definido sobre las distintas zonas de contacto. Se contempla a continuación el caso de un cilindro elástico infinitamente largo y rígido. Por simplicidad se considera sólo un cuadrante sometido a una carga uniformemente repartida en dirección normal a cada una de las direcciones de los lados del ángulo recto. En la Figura 16 se muestran las geometrías inicial y deformada de la malla de elementos finitos utilizada. El empleo de una fuerte carga frente a la rigidez del material da lugar a importantes deslizamientos en cada una de las zonas de contacto, zonas perfectamente lubricadas, manteniéndose sin embargo perfectamente la compatibilidad de desplazamientos en la dirección normal. El proceso iterativo que describe el algoritmo y la reforma de la conectividad y de las coordenadas naturales que para cada iteración se efectúa sobre cada elemento de contacto, permiten el mantenimiento de la adecuada compatibilidad aún con estos grandes desplazamientos.

Contacto elástico con fricción

Se presenta a continuación un ejemplo con fricción en que el tamaño de la superficie de contacto es desconocida a priori. Este caso es el más complejo que pudiera producirse puesto que es necesario realizar iteraciones tanto para determinar el tamaño de la superficie real de contacto como la partición de las misma en zonas de adherencia y deslizamiento. El problema ha sido resuelto por Oden y Kikuchi⁸, para el caso de la indentación de un bloque elástico infinitamente largo por un cilindro totalmente rígido y también infinitamente largo. La situación se muestra en la Figura 17.

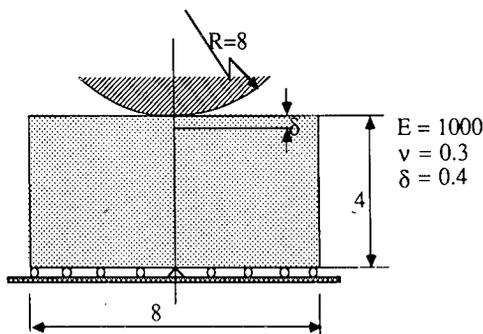


Figura 17. Definición del ejemplo.

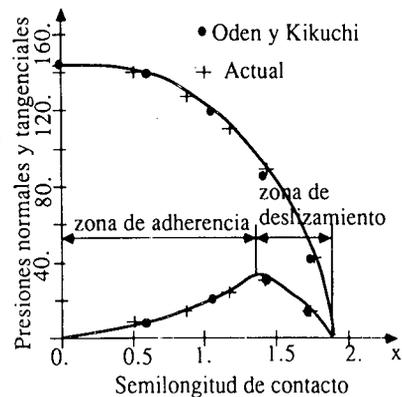


Figura 18. Tensiones normales y tangenciales.

Se ha resuelto el problema con una profundidad de indentación de 0.4 y un coeficiente de rozamiento $\mu = 0.3$. Como parámetro de regularización se consideró un valor de $\nu = 2.6E - 0.6$. La distribución de tensiones normales y tangenciales sobre la zona de contacto se muestra en la Figura 18 comparándose excelentemente con la obtenida por Oden y Kikuchi⁸. En la Figura se distingue la partición en dos zonas, una de adherencia y otra de deslizamiento.

Contacto rueda carril

La aplicación de los métodos propuestos en este trabajo, para la resolución del problema del contacto rueda-carril, es una buena oportunidad para comprobar la eficiencia de los mismos y su capacidad para tratar un problema tecnológico de interés, tanto por la obtención de relaciones cinemáticas para los g.d.l. sobre el eje montado (Figura 19), desplazamiento vertical (Z) frente al desplazamiento transversal (Y), como por la adecuada descripción del contacto de la pestaña con el carril, que bajo la consideración de comportamiento como sólido rígido conduce a unas relaciones con puntos angulosos y grandes pendientes, que perturban de forma irreal la solución del análisis dinámico completo del vehículo. Para representar con una modelización plana el problema del contacto rueda-carril, se determina, en forma analítica y mediante una serie de hipótesis simplificativas, un espesor para una sección transversal ficticia, que permite establecer la carga vertical que por unidad de longitud soportará el modelo

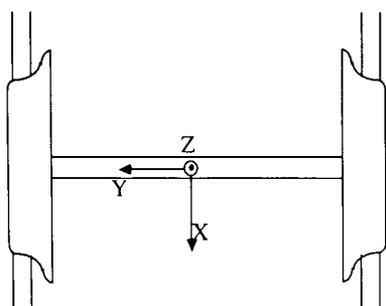


Figura 19. Eje montado.

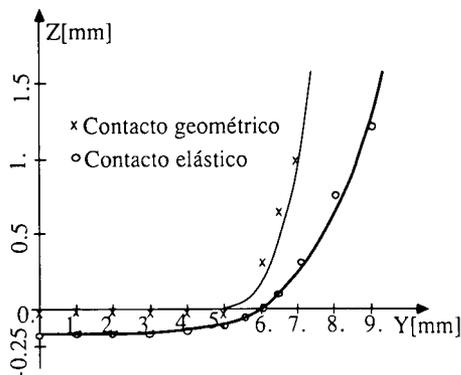


Figura 20. Relaciones cinemáticas Y - Z.

plano propuesto. Se consideran dos zonas de contacto, disponiendo sobre las mismas elementos de contacto del tipo Q-L.

Pequeñas faltas de conformidad entre las superficies contactantes debidas a la presencia en la aproximación geométrica efectuada de esquinas y puntos angulosos, junto con la elevada rigidez del material que conforma la zona de contacto, determinan picos de tensión normal que afectan de manera indeseable a la regularidad de la solución en tensiones. La introducción de un término de perturbación permite, relajando las condiciones de compatibilidad para estos puntos singulares, suavizar la solución en tensiones alcanzada. Se ha comprobado que la magnitud del parámetro de perturbación necesario decrece, como cabía esperar, con el aumento de la discretización del área de contacto.

En la Figura 20 se muestra la evolución de los desplazamientos verticales frente a los desplazamientos horizontales. La curva trazada sobre los puntos (x) expresa la relación cinemática establecida bajo la hipótesis de contacto rígido del eje montado con ambos carriles [García-Vadillo et al.²⁶]. La curva trazada sobre los puntos (o) expresa la misma relación, calculada con el algoritmo de contacto elástico propuesto. De la comparación de ambas curvas se deduce la superior calidad de la elástica frente a la rígida, como cabía esperar. Ello se refleja en la suave evolución de la primera frente a la segunda, sobre todo en el intervalo (5-7mm) que corresponde al inicio del contacto pestaña-carril.

CONCLUSIONES

Las condiciones de contorno sobre la superficie de contacto se introducen de manera integral. Esto mejora notablemente la compatibilidad cinemática frente a otros métodos, permitiendo el tratamiento de problemas en los que la falta de conformidad de las superficies de contacto indeformadas o los desplazamientos experimentados por las mismas, hacen difícil y en algunos casos imposible el uso de los métodos tradicionales en los que las condiciones se fuerzan directamente sobre los nodos.

La introducción de un término de perturbación permite regularizar la solución

en tensiones sobre la zona de contacto, en los problemas donde la presencia de singularidades harían esta solución oscilante para puntos cercanos a la misma.

Para forzar el cumplimiento de las condiciones de contorno en sentido tangencial se ha utilizado una aproximación que rompe la consistencia establecida en sentido normal. Ambas variables independientes, desplazamientos y tensiones, se aproximan por funciones de interpolación del mismo orden.

La ley de fricción de tipo "no-lineal", introduce un parámetro de regularización que permite un reajuste sobre la zona de adherencia para los puntos de ambos cuerpos obligados a permanecer sobre la misma. Este término, modulado por la relación entre las tensiones normal y tangencial sobre la zona de contacto, es crucial [Gallego²²] en la regularidad de las tensiones tangenciales y en la convergencia del proceso iterativo implementado para resolver la no-linealidad del problema con fricción.

El concepto de "elemento de contacto" se introduce como un ingrediente natural dentro de la formulación con elementos finitos. Este concepto es pieza fundamental tanto para la formulación del problema como para su implementación en el ordenador. El elemento de contacto permite su tratamiento aislado del resto del problema y abre un gran número de posibilidades respecto a la utilización de diferentes tipos de funciones de interpolación. La simple implementación práctica a que da lugar proporciona una herramienta de trabajo cómoda y fácil de generalizar, para la consideración de múltiples y variados problemas en los que el contacto se introduce como un componente más en cualquiera de las situaciones que se presentan en el estudio de la mecánica del sólido deformable.

APENDICE

Lista de símbolos

\mathbf{u}	vector desplazamientos.
u_N	componente normal de \mathbf{u}
\mathbf{N}	vector unitario normal a la superficie de contacto.
\mathbf{g}	vector distancias.
g_N	componente normal de \mathbf{g} .
$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$	vectores unitarios en dirección de los ejes coordenados.
X_1, X_2	sistema local de coordenadas.
X_1^i, X_2^i	coordenadas del cuerpo i .
$\Sigma(X_1^1)$	función que representa la superficie rígida.
$\vartheta(X_1^1)$	función que representa la superficie elástica.
$\boldsymbol{\sigma}$	vector tensión.
σ_N	componente normal de $\boldsymbol{\sigma}$.
$\boldsymbol{\sigma}_T$	vector tensión tangencial.
$\boldsymbol{\epsilon}$	tensor lineal de deformaciones.
\mathbf{C}	matriz de relaciones tensión-deformación.
Ω	dominio del cuerpo elástico.
Γ_c	contorno de contacto.
Γ_σ	contorno con tensiones prescritas.

- (u, Y_N) punto estacionario del funcional langrangiano.
 \mathbf{f} vector de fuerzas de volumen.
 \mathbf{t} vector de fuerzas de superficies prescritas.
 \mathbf{N}^e matriz elemental de cosenos directores de la normal a la superficie de contacto.
 \mathbf{H}^e matriz de funciones de forma locales para aproximación de los desplazamientos.
 ϕ^e matriz de funciones de forma locales para la aproximación de las tensiones normales.
 $\Delta \mathbf{u}^i$ vector de desplazamientos nodales incrementales.
 $\Delta \lambda_N^i$ vector de tensiones normales, nodales e incrementales.
 $\mathbf{K}^{(n)}$ matriz de rigidez global en el estado (n) .
 $\mathbf{R}_B^{(n+1)}$ vector global de fuerzas de volumen en el estado $(n + 1)$.
 $\mathbf{R}_T^{(n+1)}$ vector global de fuerzas de superficie en el estado $(n + 1)$.
 $\mathbf{P}_i^{(n)}$ vector global de fuerzas internas en el estado (n) .

REFERENCIAS

1. S.H. Chan y I.S. Tuba, "A Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies-Part I: Theory and Validation", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. **13**, no. 7, pp. 615-625, Julio (1971).
2. E.A. Wilson y B. Parsons, "Finite Element Analysis of Elastic Contact Problems Using Differential Displacements", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. **2d**, pp. 387-395, (1975).
3. C.S. Desai, M.M. Zaman, H.J. Lightner y H.J. Siriwardane, "Thin Element for Interfaces and Joints", *Int. J. Anal. Num. Meth. in Goemch.*, (1985).
4. W. Ostachowicz, "Mixed Finite Element Method for contact Problems", *Computers & Structures*, Vol. **18**, no. 5, pp. 937-945, (1984).
5. J.L. Urzua, O.A. Pecknol, "Analysis of Frictional Contact Problems Using an Interface Element", *Proc. Symp. on Appl. of Computer Methods in Eng.*, Aug. 23-26, Los Angeles, C.A., (1977).
6. K.J. Bathe y A. Chaudary, "A Solution Method for Planar and Axisymmetric Contact Problems", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. **21**, pp. 65-88, (1985).
7. B. Fredriksson, "Finite Element Solution of Surface Nonlinearities in Structural Mechanics with Special Emphasis to Contact and Fracture Mechanics Problems", *Computers & Structures*, Vol. **6**, pp. 281-290, (1976).
8. J.T. Oden y N. Kikuchi, "Finite Elements Special Problems in Solid Mechanics", Vol. **V**, Cap. IV, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1984).
9. T.H.H. Pian y K. Kubomura, "Formulation of Contact Problems by Assumed Stress Hybrid Elements", *Non linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics* (W. Wunderlich et al., Eds.), Springer-Verlag, (1981).
10. G. Yagawa y H. Hirayawa, "A Finite Element Method for contact Problems Related to Fracture Mechanics", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. **20**, pp. 2175-2195, (1984).
11. J.T. Oden y E.B. Pires, Nonlocal and Nonlinear Friction Laws and Variational Principles for Contact Problems in Elasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **50/70**, (1983).
12. J.O. Hallquist, G.L. Goudreau and D.J. Benson, "Sliding interfaces with contact-impact in large scale Lagrangian computations", *Computer Methods in Applied Mechanics and*

- Engineering*, Vol. 51, pp. 107-137, North-Holland, (1985).
13. M.L. Wilkins, "Computer Simulation of Penetration Phenomena", *Ballistic Materials and Penetration Mechanics*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, (1980).
 14. J. Miquel y J. Bonet, "Estudio de estructuras sometidas a esfuerzos de impacto en régimen elastoplástico y con grandes deformaciones por el método de los elementos finitos", *Rev. Int. de Mét. Num. para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 3, no. 2, pp. 173-203, (1987).
 15. C. Simo, P. Wrigers and L. Taylor, "A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 51, pp. 107-137, North-Holland, (1985).
 16. J.M. Viaño Rey, "Análisis de un Método Numérico con Elementos Finitos para Problemas de Contacto Unilateral sin Rozamiento en Elasticidad", *Rev. Int. de Mét. Num. para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 1, no. 4, pp. 79-93, (1985).
 17. G. Duvaut y J.L. Lions, "*Inequalities in Mechanics and Physics*", Springer-Verlag, Berlin, (1976).
 18. R. Glowinski, "*Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*", Springer-Verlag, New York, (1984).
 19. J.T. Oden y G.F. Carey, "*Finite Elements: A Second Course*", Vol. II, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1983).
 20. I. Babuska y A.K. Aziz, "*The mathematical foundations of the Finite Element Method*", Ed. A.K. Aziz, Academic Press, New York, (1972).
 21. F. Brezzi, "On the existence, Uniqueness and Approximation of Saddle Point Problems Arising from Lagrange Multipliers", *RAIRO Ser. Rouge Anal Number.*, R-2, pp. 129-151, (1974).
 22. F.J. Gallego, "Estudio del Contacto entre Sólidos. Aplicación a la Modelización del Contacto Rueda-Carril de Vehículos Ferroviarios", *Tesis Doctoral*, E.T.S.I.I., Zaragoza, (1987).
 23. J.A. Garrido, "El Problema del Contacto en Elasticidad Mediante Ecuaciones Integrales", *Tesis Doctoral*, E.T.S.I.I., Las Palmas, (1986).
 24. N. Kikuchi, "A Smoothing Technique for Reduced Integration Penalty Methods in Contact Problems", *Int. Numer. Methods Eng.*, Vol. 18, pp. 343-350, (1982).
 25. J.T. Oden, "Exterior Penalty Methods for Contact Problems in Elasticity", *Nonlinear Finite Elements Analysis in Structural Mechanics*, Springer-Verlag, New York, (1981).
 26. E. García Vadillo y J.G. Gimenez, "Influencia del ángulo de lazo sobre los parámetros geométricos de contacto rueda-carril", 8º *Congreso Internacional de Ejes montados*, Madrid, Abril (1985).