Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 14,2, 181–202(1998)

UN ESQUEMA SEMIDISCRETO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL SISTEMA "BUENO" DE BOUSSINESQ

HONORATO DÍEZ FERNÁNDEZ

Departamento de Matemáticas y Computación
Escuela Universitaria Politécnica
Universidad de Burgos, 09006 Burgos, España
Tel.: + 34-947-258 928, Fax: + 34-947-258 910
E-mail: hdiez@ubu.es

RESUMEN

El sistema "bueno" de Boussinesq es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales con estructura hamiltoniana. Al discretizarlo es de interés no perder tal estructura y en este artículo proponemos un método numérico de elementos finitos Petrov-Galerkin que de origen a un sistema hamiltoniano discreto. Analizamos el error y presentamos resultados numéricos.

A SEMIDISCRETE FINITE ELEMENT SCHEME FOR THE "GOOD" BOUSSINESQ SYSTEM

SUMMARY

The "good" Boussinesq system is a system of partial differential equations with a hamiltonian structure. When carrying out its discretization it is of interes to preserve this structure and in this paper we suggent a finite-element Petrov-Galerkin method that gives rise to a dicrete Hamiltonian problem. We analyze the error and present numerical results.

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este artículo es dar un método numérico que preserva la naturaleza hamiltoniana del siguiente sistema continuo. El problema a estudiar es el sistema "bueno" de Boussinesq 1-periódico (SBBP)

$$u_t = w_x, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \le t \le T \tag{1}$$

$$w_t = -u_{xxx} + u_x + u_x^2, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \le t \le T \tag{2}$$

$$u(x,t) = u(x+1,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \le t \le T \tag{3}$$

$$w(x,t) = w(x+1,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \le t \le T \tag{4}$$

$$u(x,0) = u^0(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{4}$$

$$w(x,0) = w^0(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{5}$$

Recibido: Marzo 1997

 ISSN 0213–1315

con las condiciones iniciales u^0 y w^0 1-periódicas y suficientemente suaves para que haya solución única.

Tanto el sistema como la ecuación equivalente (EBB) han sido objeto de estudios recientes donde se analizan sus propiedades analíticas[7]. Desde el punto de vista numérico, se resuelve por diferencias finitas el problema 1-periódico para la EBB en[8] y se compara con métodos pseudoespectrales[5]. En[4] se da un algoritmo explícito para el SBBP con hamiltoniano discreto y aproximación espectral, que al avanzar en tiempo conserva la estructura de Poisson, pero no la energía. Nuestra aportación consiste en tomar en cuenta la naturaleza hamiltoniana del sistema, desarrollando métodos numéricos que preservan dicha naturaleza.

En el apartado siguiente analizamos la naturaleza simpléctica[9] del problema continuo. La discretización espacial, junto con la formulación hamiltoniana discreta originada por el método Petrov-Galerkin, presentamos a continuación. Posteriormente nos dedicamos a la estimación del error. Al final ofrecemos brevemente los experimentos numéricos.

EL PROBLEMA CONTINUO

A partir de aquí, los espacios de Sovolev $H_p^m(I)$, $I = [0,1]$ estarán formados por las extensiones periódicas de $H^m(I)$; lo mismo para $L_p^2(I)$.

Se demuestra[7] que si $(w_0, u_0) \in L_p^2(I) \times H_p^1(I)$, entonces el SBBP tiene para t suficientemente pequeño una solución generalizada $(w(t), u(t))$ que depende de forma continua de t y de las condiciones iniciales.

Si $u(x,t)$ y $w(x,t)$ son soluciones de (1)-(6), las siguientes integrales son constantes en el tiempo

$$\begin{aligned} I(w(t)) &= \int_0^1 w(x,t)\,dx \\ I(u(t)) &= \int_0^1 u(x,t)\,dx \\ M(u(t),w(t)) &= \int_0^1 u(x,t)w(x,t)dx \\ \mathcal{H}(w(t),u(t)) &= \int_0^1 \left(\frac{u^2}{2} + \frac{w^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + \frac{u^3}{3}\right) dx \end{aligned} \tag{7}$$

Para probarlo basta derivar, bajo el signo integral e integrar por partes, utilizando (1)-(6).

El sistema (1)-(6) puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} w_t \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_x \\ \partial_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ -u_{xx} + u + u^2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Su forma abreviada en términos de la derivada variacional del hamiltoniano $\mathcal{H}$ es

$$z_t = m\,\delta\,\mathcal{H}(z)$$

donde

$$z = [w, u]^t, \quad m = \begin{bmatrix} 0 & \partial_x \\ \partial_x & 0 \end{bmatrix}$$

La derivada variacional de un funcional $\mathcal{H}$, que representamos por δ, viene dada en el sentido del gradiente como sigue: si $\mathcal{P} = L_p^2(I) \times H_p^1(I)$, definimos la derivada de $\mathcal{H}$ en z, siguiendo la dirección de v como

$$\delta\mathcal{H}[z; v] = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathcal{H}(z + \epsilon v) - \mathcal{H}(z)}{\epsilon}, \qquad z, v \in \mathcal{P} \tag{9}$$

decimos que g es el gradiente de $\mathcal{H}$ en z, si $g \in L_p^2(I) \times L_p^2(I)$, y

$$\delta\mathcal{H}[z; v] = (g, v), \quad \forall v \in \mathcal{P} \tag{10}$$

donde $(\, , \,)$ representa el producto escalar usual en $L_p^2(I) \times L_p^2(I)$. La función g se simboliza por $\delta\mathcal{H}[z]$ ó $\nabla\mathcal{H}[z]$.

Cuando el funcional $\mathcal{H}$ viene dado por la integral de una densidad $\mathcal{D}(z)$ (como en (7), donde

$$\mathcal{D}(z) = \frac{u^2}{2} + \frac{w^2}{2} + \frac{(u_x)^2}{2} + \frac{u^3}{3}$$

es la densidad de energía), entonces

$$\delta\mathcal{H}[z] = \left[\frac{\delta\mathcal{D}(z)}{\delta w}, \frac{\delta\mathcal{D}(z)}{\delta u}\right]^t, \quad \forall z \in \mathcal{P}$$

donde

$$\frac{\delta\mathcal{D}(z)}{\delta w} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1^k)\left(\frac{d}{dx}\right)^k \frac{\partial\mathcal{D}(z)}{\partial w_{kx}}, \quad w_{kx} = \frac{\partial^k w}{\partial x^k}$$

Con esta nueva notación (8) toma la forma

$$w_t = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\mathcal{H}(z)}{\delta u} \tag{11}$$

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\mathcal{H}(z)}{\delta w} \tag{12}$$

donde $\delta\mathcal{H}(z)/\delta u$ y $\delta\mathcal{H}(z)/\delta w$ son las componentes de $\delta\mathcal{H}[z]$, y es de notar la simetría con respecto a las funciones u y w.

Sea F un funcional continuo definido en el espacio de fases de (1)-(6), entonces por (9)

$$\frac{dF(z)}{dt} = \delta F[z; z_t]$$

Ahora bien por (10), y las ecuaciones del movimiento (11) y (12), tenemos que si $z(t)$ es solución

$$\frac{dF(z)}{dt} = \int_0^1 \delta F(z)\, z_t dx = \int_0^1 \delta F(z)\, m\, \delta\mathcal{H}(z) dx = (\nabla F\,,\, m\, \nabla\mathcal{H}) \qquad (13)$$

Esta relación es análoga a la fórmula[10,(12.2)]

$$\frac{dF(z)}{dt} = (\nabla F\,,\, J^{-1}\, \nabla\mathcal{H})$$

que da la variación de una función F a lo largo de una solución $z(t)$ de un sistema hamiltoniano con un número finito de grados de libertad

$$\dot{z} = J^{-1}\, \nabla\mathcal{H}, \quad J^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

Es bien conocido que el caso finito dimensional $(\nabla F\,,\, J^{-1}\, \nabla\mathcal{H})$ da el corchete de Poisson de F y h. Para nuestro caso infinito dimensional conviene introducir para cada par de funcionales F y G otro nuevo funcional, corchete de Poisson de F y G , definido por

$$\{F, G\} = \int_0^1 \delta\, F\, m\, \delta G dx \qquad (14)$$

Se verifican, para a, b constantes reales y H, T, S funcionales, las siguientes propiedades:

(i) *Antisimetría*

$$\{T, S\} = -\{S, T\}$$

(ii) *Bilinealidad*

$$\{H, aT + bS\} = a\{H, T\} + b\{H, S\}$$

(iii) *Identidad de Jacobi*

$$\{\{T, S\}, H\} + \{\{S, H\}, T\} + \{\{H, T\}, S\} = 0$$

(iv) *Regla de Leibnitz*

$$\{T, S.H\} = \{T, S\}.H + S.\{T, H\}$$

El corchete (14) en las componentes w y u de z viene dado por

$$\{F, G\}(z) = \int_0^1 \left[\frac{\delta F(z)}{\delta w}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta G(z)}{\delta u} + \frac{\delta F(z)}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta G(z)}{\delta w}\right] dx \qquad (15)$$

Con esta notación (13) se reescribe

$$\frac{dF(z)}{dt} = \{F, \mathcal{H}\}$$

Se demuestra que debido a la forma (8) ó (11)-(12) el flujo del SBBP conserva el corchete de Poisson, y por tanto es una aplicación de Poisson.

Nosotros trataremos que nuestros métodos numéricos tengan una estructura análoga a (11)-(12) para que conserven también una estructura de Poisson.

DISCRETIZACIÓN ESPACIAL

En este apartado estudiamos la discretización espacial de la estructura continua introducida anteriormente. Esta discretización genera una aproximación finita dependiente de un parémetro h. En primer lugar presentamos algunos materiales preliminares.

Consideramos particiones $\{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$ y pondremos $h_j = x_j - x_{j-1}$, $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$. Denotaremos por h el diámetro de la partición y supondremos que nuestras particiones se escogen en una familia cuasiuniforme, esto es que existe una constante positiva c tal que $h \geq h_j > ch$ para cada partición de la familia y cada j.

Para cada entero $r \geq 2$ definimos los espacios

$$V_h = \{v \in H_p^1; v/I_j \in P_r(I_j), j = 1, 2, \ldots, n\} \tag{16}$$

$$H_h = \{v \in H_p^2; v/I_j \in P_{r+1}(I_j), j = 1, 2, \ldots, n\} \tag{17}$$

donde $P_r(I_j)$ representa el conjunto de polinomios en I_j de grado $< r$. Se tiene que dim $V_h =$ dim $H_h = (r-1)n$. En V_h cada polinomio tiene r parámetros libres en cada intervalo, pero está sometido a n condiciones de continuidad. Aunque en H_h hay un grado más de libertad en cada intervalo, se elimina con la condición de continuidad de la derivada. Denotaremos por V_h^0 y H_h^0 los subespacios de V_h y H_h formados por funciones f de media $f^0 = (f, 1)$ nula.

Sea φ una aplicación lineal de $H^s(I)$ en R, dada por

$$\varphi(v) = (v, \varphi)$$

definimos

$$\| \varphi \|_{-s} = \sup_{\|v\|_s = 1} |\varphi(v)|, \quad v \in H^s \tag{18}$$

De la definición (18) se obtiene la desigualdad

$$(v, \varphi) \leq \| v \|_s \| \varphi \|_{-s}, \quad \forall \varphi \in H^{-s}, \quad v \in H^s \tag{19}$$

De la inyección continua de H^1 en L^∞, se puede escribir

$$\| v\varphi \|_1 \leq c\| v \|_1 \| \varphi \|_1, \quad \forall v, \varphi \in H^1 \tag{20}$$

De (19) y (20) se obtiene

$$\| v\varphi \|_{-1} \leq c\| v \|_{-1} \| \varphi \|_1, \quad \forall \varphi \in H^1, v \in H^{-1} \tag{21}$$

Por ser las particiones cuasiuniformes, tenemos la desigualdad inversa

$$\| v \|_1 \leq ch^{-1} \| v \| \quad \forall v \in V_h \tag{22}$$

que se deduce fácilmente por un argumento de homogeneidad.

Los espacios V_h y H_h tienen las siguientes propiedades de aproximación[11,12] para cada $\varphi \in H^m$

$$\inf_{\mu \in V_h} \sum_{j=0}^{1} h^j \, \|\varphi - \mu\|_j \leq c \; h^m \, \|\varphi\|_m, \quad 1 \leq m \leq r \tag{23}$$

$$\inf_{\mu \in H_h} \sum_{j=0}^{2} h^j \, \|\varphi - \mu\|_j \leq c \; h^m \, \|\varphi\|_m, \quad 2 \leq m \leq r+1 \tag{24}$$

De la propiedad de aproximación en V_h y la desigualdad inversa (22), se obtiene para u en H^1

$$\| Pu \|_1 \leq c\| u \|_1, \quad \forall u \in H^1 \tag{25}$$

siendo P la proyección ortogonal de L^2 en V_h. La desigualdad (25) se conoce como la estabilidad de la proyección P en H^1 (ref.[2]). Tal estabilidad vale también para proyecciones sobre subespacios con mas regularidad como H_h (ref.[1]).

Si $(u(.,t), w(.,t))$ es una solución del sistema SBBP con u en H^1_p, introducimos su proyección elíptica o Ritz $P_1 u$ en V_h definida por[11,6]

$$\begin{aligned} ((P_1 u)_x, v_x) &= (u_x, v_x), \quad \forall v \in V_h \\ (P_1 u, 1) &= (u, 1) \end{aligned}$$

Se verifican las siguientes acotaciones

$$\| P_1 u - u \|_p \leq ch^{r-p} \, \|u\|_s \quad u \in H^s, \, -(r-2) \leq p \leq 1, \, 1 \leq s \leq r \tag{26}$$

$$\left\| \frac{d^k}{dt^k}(P_1 u - u) \right\|_p \leq C(u) h^{r-p}, \quad -(r-2) \leq p \leq 1, \; k \geq 0 \tag{27}$$

$$\| P_1 u - u \|_{L_\infty(I)} \leq C(u) h^r \tag{28}$$

Definimos el operador integral G como la aplicación lineal $G : H_p^m \to H_p^{m+1}$, determinada de forma única por

$$(Gf)_x = f - f^0, \quad (Gf)^0 = f^0, \qquad \forall f \in H_p^m \tag{29}$$

donde $f^0 = (f, 1)$ es la media de f en el intervalo I. De hecho, el operador G tiene la siguiente forma explícita

$$(Gf)(x) = \int_0^x f(s)ds - f^0 x + \frac{3}{2}f^0 - \int_0^1 \int_0^u f(s)ds\,du \tag{30}$$

De la definición de G se deducen las propiedades

$$\begin{aligned}(Gf_1, f_2) &= -(f_1, Gf_2) + 2f_1^0 f_2^0 \\ (Gf, f) &= (f^0)^2\end{aligned} \tag{31}$$

Por (31) si f_1 ó f_2 tienen media cero, entonces G es antisimétrico, es decir, se verifica $(Gf_1, f_2) = -(f_1, Gf_2)$.

Lema 1

Si $m \geq 1$, el operador G está bien definido y origina una biyección entre H_p^m y H_p^{m+1}.

Demostración

(i) La periodicidad $G(f)(x+1) = G(f)(x)$ se deduce de (30) por la periodicidad de f y las propiedades de la integral.

(ii) La pertenencia de $G(f)$ a H_p^{m+1} se obtiene de las desigualdades

$$|f^0| \leq |f|^0 \leq \| f \| \tag{32}$$

$$\| G(f) \| \leq \frac{9}{2} \| f \| \tag{33}$$

deducidas de forma usual de (30).

(iii) Si $G(f) = G(g)$, sus derivadas y sus medias también son iguales, y entonces $f = g$, con lo que G es inyectiva. Además G es sobre, porque si $F \in H_p^{m+1}$, se tiene $F = G(\frac{d}{dx}F + F^0)$, pues F y $G(\frac{d}{dx}F + F^0)$ tienen la misma derivada y la misma media.

El método Petrov-Galerkin

Utilizamos para aproximar las soluciones del SBBP el método *Petrov-Galerkin* (PG) asociado al par de espacios V_h y H_h. Este método consiste en encontrar para cada $t \in R^+$ un par de funciones $u^h(t)$ y $w^h(t)$ pertenecientes a V_h cumpliendo

$$(u_t^h, \varphi) = -(w^h, \varphi_x), \quad \forall \varphi \in H_h \tag{34}$$
$$(w_t^h, \varphi) = -(u_x^h, \varphi_{xx}) - (u^h, \varphi_x) - ((u^h)^2, \varphi_x), \quad \forall \varphi \in H_h \tag{35}$$

tomando como valores iniciales las funciones $u^h(x,0)$ y $w^h(x,0)$ pertenecientes a V_h obtenidas por aproximación de los valores iniciales u^0 y w^0 del SBBP. Observemos que con $\varphi = 1$, (34)-(35) implican que u_t^h y w_t^h tienen media nula. Para funciones $u(x,t)$ denotamos por $u(t) = u(.,t)$ la función de x que se obtiene para t fijo.

Proposición 1 (de conservación del hamiltoniano discreto)

Las soluciones u^h y w^h del problema semidiscreto (34)-(35) satisfacen las leyes de conservación

$$\begin{aligned} &\int_0^1 u^h(x,t) = C, \quad \forall t > 0 \\ &\int_0^1 w^h(x,t) = C, \quad \forall t > 0 \\ &\mathcal{H}(u^h, w^h) = \int_0^1 \left(\frac{(u^h)^2}{2} + \frac{(w^h)^2}{2} + \frac{(u_x^h)^2}{2} + \frac{(u^h)^3}{3} \right) dx = C, \quad \forall t > 0 \end{aligned} \tag{36}$$

Demostración

Como $\varphi = 1 \in H_h$, haciendo $\varphi = 1$ en (34), tenemos $(u_t^h, 1) = (w^h, 0) = 0$.
Haciendo lo mismo con $\varphi = 1$ en (35), tenemos $(w_t^h, 1) = 0$.
Para la conservación del hamiltoniano damos tres pasos:

1. Hacemos $\varphi = G w_t^h$ en (34) obteniendo

$$(u_t^h, G w_t^h) = -(w^h, w_t^h) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w^h, w^h)$$

2. Hacemos $\varphi = G u_t^h$ en (35) obteniendo

$$(w_t^h, G u_t^h) = -(u_x^h, u_{tx}^h) - (u^h, u_t^h) - ((u^h)^2, u_t^h)$$

3. Sustituimos $(w_t^h, G u_t^h)$ por $-(u_t^h, G w_t^h) = (w^h, w_t^h)$, que se obtiene de la antisimetría de G para las funciones de media cero.
De los tres pasos anteriores resulta

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(u^h, w^h) = -(w^h, w_t^h) - (u_x^h, u_{tx}^h) - (u^h, u_t^h) - ((u^h)^2, u_t^h) = 0$$

Formulación hamiltoniana

Con el fin de obtener una reformulación del sistema semidiscreto (34)-(35), en términos del *hamiltoniano* $\mathcal{H}$, empezamos reformulando el método con funciones de contraste (test) en V_h.

Como los espacios V_h y H_h tienen la misma dimensión y G es inyectivo, se tiene $GV_h = H_h$, luego haciendo $\varphi = G(v)$ en (34)-(35) y aplicando las propiedades de G, obtenemos

$$(Gu_t^h, v) = (w^h, v - v^0), \quad \forall v \in V_h \tag{37}$$
$$(Gw_t^h, v) = (u_x^h, v_x) + (u^h, v - v^0) + ((u^h)^2, v - v^0), \ \forall v \in V_h \tag{38}$$

Para cada $u^h \in V_h$ definimos su derivada segunda discreta $d_{xx}^h u^h$ como la única función de V_h que verifica

$$(d_{xx}^h u^h, v) = -(u_x^h, v_x), \quad \forall v \in V_h \tag{39}$$

La existencia y unicidad de $d_{xx}^h u^h$ para u^h dada se sigue de razonamientos bien conocidos. La aplicación lineal definida en V_h por $\varphi(v) = -(u_x^h, v_x)$ viene dada por dualidad por una función de L^2, cuya componente en V_h es $d_{xx}^h u^h$. Eligiendo $v = 1$ en (39), vemos que $d_{xx}^h u^h$ tiene media cero.

Teniendo en cuenta (39), el sistema (37)-(38) se reformula en V_h^0 como

$$(Gu_t^h - w^h, \theta) = 0, \quad \forall \theta \in V_h^0 \tag{40}$$
$$(Gw_t^h + d_{xx}^h u^h - u^h - (u^h)^2, \theta) = 0, \quad \forall \theta \in V_h^0 \tag{41}$$

Si tomamos $\theta = P_0(Gu_t^h - w^h)$ en (40) y $\theta = P_0(Gw_t^h + d_{xx}^h u^h - P_0 u^h - P_0(u^h)^2)$ en (41), se obtiene que la norma dos de estas proyecciones es igual a cero, lo que conduce a las igualdades

$$P_0 G u_t^h = P_0 w^h \tag{42}$$
$$P_0 G w_t^h = -d_{xx}^h u^h + P_0 u^h + P_0 (u^h)^2 \tag{43}$$

A partir de (42)-(43) pretendemos dar una forma discreta similar a la continua (8). Para ello, y dado que u_t^h, w_t^h están en V_h^0, debemos ser capaces de invertir el operador G_h en V_h^0 definido por restricción de $P_0 G$. Como G aplica V_h^0 en H_h^0 biyectivamente, G_h es invertible , si y sólo si

$$P_0 H_h^0 = V_h^0 \tag{44}$$

cuando esta condición se satisface, G_h tiene un inverso G_h^{-1}. Entonces denotando por $J_h = G_h^{-1} P_0$, tendremos

$$u_t^h = J_h\, w^h \tag{45}$$
$$w_t^h = J_h(-d_{xx}^h u^h - u^h - (u^h)^2) \tag{46}$$

o su equivalente matricial

$$\begin{bmatrix} w_t^h \\ u_t^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & J_h \\ J_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^h \\ -d_{xx}^h u^h + u^h + (u^h)^2 \end{bmatrix} \tag{47}$$

Así hemos llegado a un análogo a (8) donde los operadores ∂_x y ∂_{xx} se han sustituido por J_h y d_{xx}^h respectivamente.

Para completar la analogía con la formulación continua debemos ver que J_h es antisimétrico y que

$$\begin{bmatrix} w^h \\ -d_{xx}^h u^h + u^h + (u^h)^2 \end{bmatrix}$$

es la derivada variacional del hamiltoniano discreto.

Los operadores G_h y su inverso G_h^{-1} son antisimétricos en V_h^0 por las igualdades

$$(G_h f, g) = (P_0 G f, g) = (G f, g) = -(f, G g) = -(f, P_0 G g) = -(f, G_h g) \tag{48}$$

De (48) se sigue la antisimetría de J_h en V_h por las igualdades

$$(J_h f, g) = (G_h^{-1} P_0 f, P_0 g) = -(P_0 f, G_h^{-1} P_0 g) = -(f, J_h g)$$

Si sustituimos $\delta, \mathcal{P}$ por $\delta^h, \mathcal{P}^h$ en (9), entonces existe una única $g^h \in \mathcal{P}^h$, tal que

$$\delta^h \mathcal{H}[z^h; v] = (g^h, v), \quad \forall v \in \mathcal{P}^h$$

donde $\mathcal{P}^h = V_h \times V_h$. La función g^h (gradiente discreto de $\mathcal{H}$ en z^h) se simboliza por $\delta^h \mathcal{H}[z^h]$ ó $\nabla^h \mathcal{H}[z^h]$ y viene dada en términos de

$$\mathcal{D}(z^h) = \frac{(u^h)^2}{2} + \frac{(w^h)^2}{2} + \frac{(u_x^h)^2}{2} + \frac{(u^h)^3}{3}$$

por

$$\delta^h \mathcal{H}[z^h] = \left[\frac{\delta \mathcal{D}(z^h)}{\delta w^h}, \frac{\delta \mathcal{D}(z^h)}{\delta u^h} \right]^t, \quad \forall z^h \in \mathcal{P}^h$$

donde $\frac{du_x^h}{dx} = d_{xx}^h$.

ESTIMACIÓN DEL ERROR

El siguiente resultado original de este trabajo nos servirá de modelo para estudiar las soluciones discretas.

Teorema 1

Supongamos que $(u_1(t), w_1(t))$ y $(u_2(t), w_2(t))$ son dos parejas de soluciones teóricas del sistema SBBP cumpliendo las hipótesis $w_1(t), w_2(t) \in L_p^2(I)$, $u_1(t), u_2(t) \in H_p^1(I)$, $u_1(t) + u_2(t)$ y $(u_1(t) + u_2(t))_t$ están uniformemente acotadas en norma infinito para $0 \leq t \leq T$. Entonces, si

$$S(t) = \|(w_1(t) - w_2(t))\|^2 + \|(u_1(t) - u_2(t))\|_1^2$$

se verifica

$$S(t) \leq CS(0) \tag{49}$$

Demostración

Las funciones $(u_1(t), w_1(t))$ y $(u_2(t), w_2(t))$ cumplen el sistema

$$\begin{aligned} (u_1 - u_2)_t &= (w_1 - w_2)_x \\ (w_1 - w_2)_t &= -(u_1 - u_2)_{xxx} + (u_1 - u_2)_x + (u_1^2 - u_2^2)_x \end{aligned}$$

Para φ en H_p^2, planteamos la forma débil

$$((u_1 - u_2)_t, \varphi) = -(w_1 - w_2, \varphi_x) \tag{50}$$

$$((w_1 - w_2)_t, \varphi) = -((u_1 - u_2)_x, \varphi_{xx}) - (u_1 - u_2, \varphi_x) - (u_1^2 - u_2^2, \varphi_x) \tag{51}$$

Haciendo $\varphi = G(w_1 - w_2)_t$ en (50) y utilizando las propiedades de G, como $(w_1 - w_2)_t$ tiene media cero, se obtiene

$$((u_1 - u_2)_t, G(w_1 - w_2)_t) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}((w_1 - w_2), (w_1 - w_2)) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(w_1 - w_2)\|^2 \tag{52}$$

Con $\varphi = G(u_1 - u_2)_t$ en (51) se obtiene

$$\begin{aligned} &((u_1 - u_2)_t, G(w_1 - w_2)_t) = ((u_1 - u_2)_x, (u_1 - u_2)_{tx}) + ((u_1 - u_2), (u_1 - u_2)_t) + \\ &+ ((u_1^2 - u_2^2), (u_1 - u_2)_t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|(u_1 - u_2)_x\|^2 + \|(u_1 - u_2)\|^2) + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_1 + u_2, (u_1 - u_2)^2) - \frac{1}{2}((u_1 + u_2)_t, (u_1 - u_2)^2) \end{aligned} \tag{53}$$

Igualando los primeros miembros de (52) y (53), llegamos a la ecuación

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\|(u_1-u_2)_x\|^2+\|(u_1-u_2)\|^2+\|(w_1-w_2)\|^2)=\\ =\frac{d}{dt}(u_1+u_2,(u_1-u_2)^2)-((u_1+u_2)_t,(u_1-u_2)^2)\end{aligned} \tag{54}$$

Para simplificar las fórmulas, definimos

$$\begin{aligned}P(t)&=(\,u_1(t)+u_2(t),(u_1(t)-u_2(t))^2\,)\\ \Pi(t)&=(\,(u_1(t)+u_2(t))_t,(u_1(t)-u_2(t))^2\,)\end{aligned}$$

Integrando con respecto a t en (54), se obtiene

$$S(t)-S(0)=P(t)-P(0)-\int_0^t\Pi(s)ds \tag{55}$$

Si $(u_1+u_2)(t)$ y $(u_1+u_2)_t(t)$ están uniformemente acotadas por C para $0<t<T$, entonces

$$|P(t)|\le C\|(u_1-u_2)\|^2\le CS(t) \tag{56}$$

$$|\Pi(t)|\le C\|(u_1-u_2)\|^2\le CS(t) \tag{57}$$

Para llegar a la cota final necesitamos acotar $\|(u_1-u_2)\|_1^2$ adecuadamente, para ello hacemos $\varphi=(u_1-u_2)$ en (50) obteniendo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|(u_1-u_2)\|^2)=(w_1-w_2,(u_1-u_2)_x) \tag{58}$$

Integrando con respecto a t en (58) y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos la cota

$$\begin{aligned}(\|(u_1-u_2)\|^2)(t)&\le(\|(u_1-u_2)\|^2)(0)+\int_0^t(\|(w_1-w_2)\|^2+\|(u_1-u_2)_x\|^2)(s)ds\\ &\le S(0)+\int_0^t S(s)ds\end{aligned} \tag{59}$$

que sustituida en (55) en combinación con (56)-(57) junto al lema de Gronwall, nos da la desigualdad

$$S(t)\le 2C(1+T\exp TC)S(0) \tag{60}$$

Finalizando la demostración.

Ahora sean $(u(t),w(t))$ las soluciones de SBBP y $(u^h(t),w^h(t))$ las soluciones de PG.

Si P_1 es el operador elíptico (26), denotamos por

$$\theta_u(t) = P_1 u(t) - u^h(t), \quad \rho_u(t) = u(t) - P_1 u(t)$$

y análogamente para w. Con esta notación los errores

$$e_u(t) = u(t) - u^h(t), \quad e_w(t) = w(t) - w^h(t)$$

se escriben como

$$e_u(t) = \theta_u(t) + \rho_u(t), \quad e_w(t) = \theta_w(t) + \rho_w(t) \tag{61}$$

En los dos lemas siguientes expresamos algunas propiedades a tener en cuenta.

Lema 2

(Operadores que conmutan con $\frac{\partial}{\partial t}$). Los operadores P, P_1 y G introducidos en (25) (26) y (29), respectivamente, conmutan con $\frac{\partial}{\partial t}$, es decir, verifican las igualdades

$$Pu_t = (Pu)_t, \quad P_1 u_t = (P_1 u)_t, \quad (Gu)_t = G(u_t)$$

Demostración

Suponemos que el subespacio B, donde se proyecta es V_h ó H_h. Por la definición de P se obtiene $(Pu_t - (Pu)_t, v) = 0$, para $v \in B$. Tomando $v = Pu_t - (Pu)_t$, entonces $\|Pu_t - (Pu)_t\| = 0$, y por la continuidad de $Pu_t - (Pu)_t$ se obtiene $Pu_t = (Pu)_t$.

Por un procedimiento similar $\|(P_1(u_t) - (P_1 u)_t)_x\| = 0$, y por lo tanto $P_1(u_t) - (P_1 u)_t$ es constante, pero esta constante es la media de $P_1(u_t) - (P_1 u)_t$, que es cero porque

$$((P_1 u)_t, 1) = (u_t, 1) = (P_1(u_t), 1)$$

como se deduce derivando con respecto a t la igualdad$(P_1 u - u, 1) = 0$.

Para demostrar $(Gu)_t = G(u_t)$ partimos de (30) y conmutamos la integral con la derivada respecto a t.

Lema 3

(Funciones de media cero). *Las funciones* $(u_t, u_t^h, (\theta_u)_t, \rho_u)$ *y* $(w_t, w_t^h, (\theta_w)_t, \rho_w)$ *tienen media cero.*

Demostración

Para las funciones u_t, w_t basta hacer $\varphi = 1$ en (64)-(65) y para u_t^h, w_t^h en (66)-(67). Por otra parte, $(\rho_u, 1) = (u - P_1 u, 1) = 0$ y $((\theta_u)_t, 1) = ((P_1 u)_t - u_t^h, 1) = (P_1(u_t) - u_t^h, 1) = (P_1(u_t), 1) - (u_t^h, 1) = 0$.

A lo largo de este apartado supondremos que se cumple la condición de no singularidad (44).

Teorema 2

Denotemos por $(u(t), w(t))$ y $(u^h(t), w^h(t))$ las soluciones de (1)-(6) y (34)-(35), respectivamente, cumpliendo las hipótesis:

(i) Las soluciones teóricas $u(t), w(t)$ son únicas para $0 \leq t \leq T$ y suficientemente regulares.

(ii) Las condiciones iniciales $u^h(0), w^h(0)$ verifican

$$\|u^h(0) - P_1 u(0)\|_1 \leq ch^r, \quad \|w^h(0) - P_1 w(0)\| \leq ch^r$$

Entonces para h suficientemente pequeño la soluciones semidiscretas $u^h(t), w^h(t)$, son únicas y verifican

$$\|w(t) - w^h(t)\| + \|u(t) - u^h(t)\|_1 \leq ch^r, \quad 0 \leq t \leq T \tag{62}$$

$$\|u(t) - u^h(t)\|_\infty \leq ch^r, \quad 0 \leq t \leq T \tag{63}$$

donde c representa una constante.

Demostración

Las funciones $u(t)$ y $w(t)$ cumplen la forma débil

$$((u)_t, \varphi) = -(w, \varphi_x), \quad \forall \varphi \in H_h \tag{64}$$

$$((w)_t, \varphi) = -((u)_x, \varphi_{xx}) - (u, \varphi_x) - (u^2, \varphi_x), \quad \forall \varphi \in H_h \tag{65}$$

y las funciones $u^h(t)$ y $w^h(t)$ son las soluciones del sistema

$$((u^h)_t, \varphi) = -(w^h, \varphi_x), \quad \forall \varphi \in H_h \tag{66}$$

$$((w^h)_t, \varphi) = -(u^h_x, \varphi_{xx}) - (u^h, \varphi_x) - ((u^h)^2, \varphi_x), \quad \forall \varphi \in H_h \tag{67}$$

Si restamos miembro a miembro las ecuaciones ((66)-(67)) de ((64)-(65)), respectivamente, obtenemos que los errores cumplen la ecuación

$$((e_u)_t, \varphi) = -(e_w, \varphi_x), \quad \forall \varphi \in H_h \tag{68}$$

$$((e_w)_t, \varphi) = -((e_u)_x, \varphi_{xx}) - (e_u, \varphi_x) - ((u)^2 - (u^h)^2, \varphi_x), \quad \forall \varphi \in H_h \tag{69}$$

Descomponiendo el error según la notación introducida en (61), el sistema (68)-(69) se convierte en

$$((\theta_u(t) + \rho_u(t))_t, \varphi) = -(\theta_w(t) + \rho_w(t), \varphi_x), \quad \forall \varphi \in H_h \tag{70}$$

$$\begin{aligned}((\theta_w(t) + \rho_w(t))_t, \varphi) = &-((\theta_u(t) + \rho_u(t))_x, \varphi_{xx}) - (\theta_u(t) + \rho_u(t), \varphi_x) - \\ &- ((u(t))^2 - (u^h)^2, \varphi_x), \quad \forall \varphi \in H_h\end{aligned} \tag{71}$$

Haciendo $\varphi = G((\theta_w)_t)$, en (70)

$$-((\theta_u)_t), G((\theta_w)_t) = ((\rho_u)_t, (G(\theta_w)_t)) + (\rho_w, (\theta_w)_t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\theta_w)\|^2 \tag{72}$$

Haciendo $\varphi = G((\theta_u)_t)$ en (71), por ser G antisimétrico y $(\theta_u)_t$ tener media cero, se obtiene

$$\begin{aligned} &-(G(\theta_w)_t), (\theta_u)_t) = -((\rho_w)_t, (G(\theta_u)_t)) - ((\rho_u)_x, ((\theta_u)_t)_x) - (\rho_u, (\theta_u)_t) - \\ &-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|(\theta_u)_x\|^2 + \|\theta_u\|^2) - (u^2 - (u^h)^2, (\theta_u)_t) \end{aligned} \tag{73}$$

Para la acotación final vamos a proceder en dos pasos. Primero prescindimos del término $(u^2 - (u^h)^2, (\theta_u)_t)$ en la ecuación (73) y procedemos a la acotación de la parte restante que es la lineal; en el segundo paso acotaremos la parte eliminada.

Estimación sin los términos no lineales

Igualando los segundos miembros de (72d) y (73), si tenemos en cuenta que $((\rho_u)_x, ((\theta_u)_t)_x) = 0$, llegamos a la igualdad

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\theta_w\|^2 + \|\theta_u\|^2 + \|(\theta_u)_x\|^2) = ((\rho_w)_t, G(\theta_u)_t) + ((\rho_u)_t, G(\theta_w)_t) + \\ &+ (\rho_w, (\theta_w)_t) + (\rho_u, (\theta_u)_t) = \frac{d}{dt}(((\rho_w)_t, G(\theta_u))) - ((\rho_w)_{tt}, G(\theta_u)) + \\ &+ \frac{d}{dt}(((\rho_u)_t, G(\theta_w))) - ((\rho_u)_{tt}, G(\theta_w)) + \frac{d}{dt}((\rho_w, \theta_w)) - ((\rho_w)_t, \theta_w) + \\ &+ \frac{d}{dt}((\rho_u, \theta_u)) - ((\rho_u)_t, \theta_u) \end{aligned} \tag{74}$$

Para simplificar las fórmulas definimos

$$\begin{aligned} S^h(t) &= \|\theta_w(t)\|^2 + \|\theta_u(t)\|_1^2 \\ P^h(t) &= ((\rho_w)_t, G(\theta_u)) + ((\rho_u)_t, G(\theta_w)) + (\rho_w, \theta_w) + (\rho_u, \theta_u), \\ \Pi^h(t) &= ((\rho_w)_{tt}, G(\theta_u)) + ((\rho_u)_{tt}, G(\theta_w)) + ((\rho_w)_t, \theta_w) + ((\rho_u)_t, \theta_u) \end{aligned}$$

Integrando con respecto a t en (74), se obtiene

$$S^h(t) - S^h(0) = -2(P^h(t) - P^h(0) + \int_0^t \Pi^h(s)ds) \tag{75}$$

En la estimación de $|(P^h(t)|$ y $|\Pi^h(t)|$, debemos acotar cada uno de los cuatro productos escalares que los componen. Dada la semejanza entre ellos hacemos el proceso en un solo caso. Por (19)

$$|(\rho_u, \theta_u)| \leq \|\rho_u\|_{-1} \|\theta_u\|_1 \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\|\rho_u\|_{-1} \sqrt{\epsilon}\|\theta_u\|_1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\epsilon}\|\rho_u\|_{-1}^2 + \epsilon\|\theta_u\|_1^2\right) \tag{76}$$

Por la cota (27) para el proyector elíptico P_1 finalizamos la acotación (76) como

$$(|(\rho_u, \theta_u)|)(t) \leq Ch^{2r} + \epsilon S^h(t)$$

de donde se deduce

$$|P^h(t)| \leq C(h^{2r} + \epsilon S^h(t)) \tag{77}$$
$$|\Pi^h(t)| \leq C(h^{2r} + \epsilon S^h(t)) \tag{78}$$

Sustituyendo en (75), en combinación con (76)-(77), tenemos la desigualdad

$$S^h(t) \leq C(S^h(0) + h^{2r} + \epsilon S^h(t)) + \int_0^t h^{2r} + \epsilon S^h(t))ds \tag{79}$$

y aplicando el lema de Gronwall, se obtiene la cota buscada

$$S^h(t) \leq C(S^h(0) + h^{2r}) \tag{80}$$

Estimación con los términos no lineales

En esta sección acotamos el término $(u^2 - (u^h)^2, (\theta_u)_t)$, que dejamos pendiente en la ecuación (73). Para ello utilizamos las igualdades

$$\begin{aligned} u - u^h &= \rho_u + \theta_u \\ u &= \rho_u + P_1 u \\ u + u^h &= u + P_1 u - \theta_u \\ &= \rho_u + 2P_1 u - \theta_u \\ u^2 - (u^h)^2 &= (u + u^h)\rho_u + (u + u^h)\theta_u \\ &= (u + P_1 u - \theta_u)\rho_u \\ &+ (\rho_u + 2P_1 u - \theta_u)\theta_u \\ &= (u + P_1 u)\rho_u \\ &+ (2P_1 u - \theta_u)\theta_u \end{aligned} \tag{81}$$

Multiplicando escalarmente en (81) por $(\theta_u)_t$, tenemos

$$\begin{aligned}(u^2-(u^h)^2,(\theta_u)_t) &= ((u+P_1u)\rho_u,(\theta_u)_t)\\ &+((2P_1u-\theta_u)\theta_u,(\theta_u)_t)\\ &=((u+P_1u)\rho_u,(\theta_u)_t)\\ &+(P_1u,2\theta_u(\theta_u)_t)-(1,(\theta_u)^2(\theta_u)_t)\\ &=\frac{d}{dt}((u+P_1u)\rho_u,\theta_u)\\ &-((u+P_1u)_t\rho_u,\theta_u)\\ &-((u+P_1u)(\rho_u)_t,\theta_u)\\ &+\frac{d}{dt}(P_1u,\theta_u^2)-(P_1u_t,\theta_u^2)\\ &-\frac{1}{3}\frac{d}{dt}(1,(\theta_u)^3)\end{aligned} \tag{82}$$

Por las propiedades de regularidad de u y la acotación (27) de la proyección P_1, tenemos

$$\|P_1u\|_1 \le \|P_1u-u\|_1+\|u\|_1 \le Ch^{r-1}+\|u\|_1 \tag{83}$$
$$\|P_1u_t\|_1 \le \|P_1u_t-u_t\|_1+\|u_t\|_1 \le Ch^{r-1}+\|u_t\|_1 \tag{84}$$

por lo tanto $\|P_1u\|_1$ y $\|P_1u_t\|_1$ están uniformemente acotadas para $0<h<h_0$ en $0<t<T$.

Para nuestro análisis suponemos cierta la cota

$$\|\theta_u\| \le 1, \quad 0<t<T \tag{85}$$

lo que no supone ninguna restricción. Pues (85) es cierta para $t=0$ y h suficientemente pequeño, y si llamamos $t(h)$ al superior de los s tales que (85) se cumple para $0<s\le t(h)$ y retomamos (85) al final de la demostración, entonces se cumple para $t(h)+\epsilon$ con $\epsilon>0$, por lo que $t(h)=T$.

La eliminación de $(u^2-(u^h)^2,(\theta_u)_t)$ en (73) hace que

$$\int_0^t (u^2-(u^h)^2,(\theta_u)_t)(s)ds \tag{86}$$

no aparezca en el segundo miembro de (74), por lo tanto una cota de esta integral se deberá añadir al segundo miembro de (79).

Para acotar (86) integramos entre 0 y t en (82), obteniendo

$$\begin{aligned}\int_0^t (u^2-(u^h)^2,(\theta_u)_t)(s)ds = &((u+P_1u)\rho_u,\theta_u)\\ &-\int_0^t ((u+P_1u)_t\rho_u,\theta_u)(s)ds\\ &-\int_0^t ((u+P_1u)(\rho_u)_t,\theta_u)(s)ds\\ &+(P_1u,\theta_u^2)-\int_0^t (P_1u_t,\theta_u^2)(s)ds\\ &-\frac{1}{3}(1,(\theta_u)^3)\ +\ R(0)\end{aligned} \tag{87}$$

donde $R(0)$ es un residuo dependiente de la condición inicial y acotado por $S^h(0)$. Seguidamente acotamos los términos

$$((u+P_1u)\rho_u,\theta_u),\quad (P_1u,\theta_u^2),\quad (1,(\theta_u)^3)$$

con el resto se procede de forma similar.

Para $((u+P_1u)\rho_u,\theta_u)$ utilizando (21) y (19), tenemos

$$\begin{aligned}|((u+P_1u)\rho_u,\theta_u)| &\le \|(u+P_1u)\rho_u\|_{-1}\,\|\theta_u\|_1\\ &\le \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\|(u+P_1u)\rho_u\|_{-1}\sqrt{\epsilon}\|\theta_u\|_1\\ &\le \frac{1}{\epsilon}\|(u+P_1u)\rho_u\|_{-1}^2+\epsilon\|\theta_u\|_1^2\\ &\le \frac{1}{\epsilon}C\|u\|_1^2\|\rho_u\|_{-1}^2+\epsilon\|\theta_u\|_1^2\end{aligned} \tag{88}$$

Para (P_1u,θ_u^2) utilizamos la acotación uniforme de P_1, y la inyección continua de H^1 en L^∞, obteniendo

$$|(P_1u,\theta_u^2)|\le C\|\theta_u\|^2$$

Finalmente acotamos $(1,(\theta_u)^3)$ utilizando que $\|\theta_u\|_\infty\le 1$, así tenemos

$$|(1,(\theta_u)^3)|\le \|\theta_u\|^2$$

Ahora vemos la necesidad de acotar adecuadamente $\|\theta_u\|^2$, lo que haremos a continuación. Haciendo $\varphi = P\theta_u$, en (70) donde P es la proyección ortogonal en el subespacio H_h, se obtiene

$$-(P(\theta_u)_t,P\theta_u)=((\rho_u)_t,P\theta_u)\ +\ (\rho_w,P(\theta_u)_x)+(\theta_w,P(\theta_u)_x)$$

Siguiendo un proceso similar a (76) y (88), obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|P\theta_u\|^2 &\leq \frac{1}{\epsilon}\|(\rho_u)_t\|_{-1}^2 + \epsilon\|P\theta_u\|_1^2 \\
&+ \frac{1}{\epsilon}\|(\rho_w)\|_{-1}^2 + \epsilon\|P(\theta_u)_x\|^2 \\
&+ \|\theta_w\|^2 + \|P(\theta_u)_x\|^2 \\
&\leq C(\|(\rho_u)_t\|_{-1}^2 + \|\rho_w\|_{-1}^2 + \|\theta_u\|_1^2 + \|\theta_w\|^2)
\end{aligned}
\tag{89}
$$

Integrando entre 0 y t, tenemos

$$
\|P\theta_u\|_1^2 \leq C\int_0^t (\|(\rho_u)_t\|_{-1}^2 + \|\rho_w\|^2 + \|\theta_u\|_1^2 + \|\theta_w\|^2)(s)ds
$$

y por la ortogonalidad de P

$$
\begin{aligned}
\|\theta_u\|^2 &= \|P\theta_u\|^2 + \|\theta_u - P\theta_u\|^2 \\
&\leq \|P\theta_u\|^2 + Ch^2\|\theta_u\|_1^2 \\
&\leq C(h^2\|\theta_u\|_1^2 + \int_0^t (\|(\rho_u)_t\|_{-1}^2 + \|\rho_w\|^2 + \|\theta_u\|_1^2 + \|\theta_w\|^2)(s)ds) \\
&\leq C(h^2 S^h(t) + \int_0^t h^{2r} + S^h(s)ds)
\end{aligned}
\tag{90}
$$

Para finalizar la demostración basta con llevar este resultado a la cota de la parte no lineal (87) y a su vez la cota que se obtiene añadírsela al segundo miembro de la acotación obtenida en la lineal (79). Así obtenemos la desigualdad

$$
S^h(t) \leq C(S^h(0) + h^{2r} + (\epsilon + h^2)S^h(t)) + \int_0^t h^{2r} + (\epsilon + 1)S^h(s))ds \tag{91}
$$

de donde para h y ϵ suficientemente pequeños sale

$$
S^h(t) \leq C(S^h(0) + h^{2r} + \int_0^t S^h(s)ds) \tag{92}
$$

y el teorema queda demostrado aplicando el lema de Gronwall.

EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Los siguientes experimentos numéricos[3] ilustran las propiedades de convergencia discutidas en la sección anterior. Si $r = 2$ las funciones semidiscretas de V_h son lineales a trozos y las funciones tests de H_h son cuadráticas a trozos. Tomamos el dominio espacial $-30 \leq x \leq 30$, donde imponemos la condición de periodicidad y damos particiones uniformes de paso h. Para $r = 2$, particiones uniformes y un número impar de intervalos, la condición de inyectividad de P_0 (44) es siempre cierta, cuando el número de intervalos es par, la no inyectividad de P_0 hace que la matriz de masa que multiplica a las derivadas con respecto a t, sea singular. Las soluciones teóricas vienen dadas por

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\left(x - \frac{\sqrt{6}}{3}t\right)\right)}, \quad w(x,t) = -\frac{\sqrt{6}}{3}u(x,t)$$

La variable temporal la discretizamos con paso k utilizando la regla implícita del punto medio cuya naturaleza simpléctica[10] es bien conocida. Representamos por $\mathbf{U}^n$ y $\mathbf{W}^n$ los vectores de valores nodales en el nivel de tiempo nk que aproximan respectivamente a $u(x,nk)$ y $w(x,nk)$, originándose un sistema de ecuaciones no lineales en la forma $f(\mathbf{U}^n,\ \mathbf{W}^n) = 0$, que resolveremos por el método iterativo del Newton. Los iterantes que surgen al aplicar el método iterativo se obtienen de la solución del sistema lineal

$$\mathbf{f}'(\mathbf{V}^l)(\mathbf{V}^{l+1} - \mathbf{V}^l) = -\mathbf{f}(\mathbf{V}^l), \quad l = 0, 1, \ldots$$

El vector $(\mathbf{U}^{n+1},\ \mathbf{W}^{n+1})$ se obtiene tomando como iterante inicial $\mathbf{V}^0 = (\mathbf{U}^n,\ \mathbf{W}^n)$. Como criterio de parada de la iteración interna utilizaremos que la norma dos de la diferencia entre dos iterantes consecutivos $\mathbf{V}^{l+1} - \mathbf{V}^l$ sea menor que el valor de la tolerancia dada. Entonces asignaremos a $(\mathbf{U}^{n+1},\ \mathbf{W}^{n+1})$, el valor de $\mathbf{V}^{l+1}$. Los cálculos numéricos se inician con los vectores $\mathbf{U}^0$ y $\mathbf{W}^0$, dados por $\mathbf{U}_j^0 = u(x_j, 0)$ y $\mathbf{W}_j^0 = w(x_j, 0)$.

El método se ha implementado en una máquina SUN SPARC station 2 y por sencillez se ha usado la conocida aplicación MATLAB. Se aprecia que los problemas lineales que resolvemos no presentan problemas de acondicionamiento. En una implementación anterior, sin usar MATLAB, habíamos tratado de sacar ventaja a la estructura de la matriz del sistema resolviendo sistemas variados resultantes de suprimir filas y columnas. Sin embargo tal implementación alternativa hubo de ser abandonada por el mal acondicionamiento de los sistemas lineales resultantes.

Para la primera tabla $\mathcal{H}$ representa el hamiltoniano semidiscreto. Para la segunda tabla damos el error en norma dos de $u - \mathbf{U}$ donde $\mathbf{U}$ es el vector de valores nodales en $t = 2$.

h	Error en $\mathcal{H}(k=0)$
4	0,12
2	0,029
1	0,0077
1/2	0,0019
1/4	0,00048

$\|u - U\|$				
$h\backslash k$	1/2	1/4	1/8	1/16
2	0,020	0,021	0,021	0,022
1	0,0029	0,0041	0,0045	0,0046
1/2	0,0015	0,00073	0,0010	0,0011
1/4	0,0020	0,00037	0,00018	0,00026

Para un valor de h fijo, vemos que por sucesivos refinamientos del paso en tiempo no conseguimos reducir el error. Ello se debe a que la integración temporal es virtualmente exacta. Si para valores de k dónde la integración en tiempo es exacta dividimos h por 2, vemos cómo el error se divide por 4, lo que demuestra que el método es de orden dos en espacio. Si observamos los valores de la diagonal, vemos como el error se divide por 4 al dividir h y k por dos, lo que muestra que el método es de orden dos en espacio y en tiempo.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento al profesor Sanz Serna por las continuas sugerencias recibidas.

REFERÊNCIAS

1. C. de Boor, "On a Max-Norm Bound for the Least-Squares Spline Approximant", "*Approximation and Function Spaces*", Z. Ciesielski (Ed.), pp. 163–175, Amsterdam, North Holland, (1981).
2. M. Crouzeix y V. Thomée, "The Stability in L_p and W_p^1 of the L_2 Projection onto Finite Element Functions Spaces", *Math. Comput.* ,, Vol. **48**, pp. 521–532, (1987).
3. H. Díez Fernández, "Un método numérico hamiltoniano de elmentos finitos para el sistema 'Bueno' de Boussinesq", Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid, Valladolid, (1995).
4. J. de Frutos, T. Ortega y J.M. Sanz-Serna, "A Hamiltonian, Explicit Algorithm with Spectral Accuracy for the 'Good' Boussinesq System", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. **80**, pp. 417–423, (1990).
5. J. de Frutos, T. Ortega y J.M. Sanz-Serna, "Pseudospectral Method for the 'Good' Boussinesq equation", *Math. Comput.*, Vol. **57**, pp. 109–122, (1991).
6. C. Johnson, "*Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*", 3ª edición, Un. Pr. Cambridge, (1990).
7. V.S. Manoranjan, T. Ortega y J.M. Sanz-Serna, "Soliton and Anti-Soliton Interaction in the 'Good' Boussinesq equation", *J. Math. Phys.*, Vol. **29**, pp. 1964–1968, (1988).
8. T. Ortega y J.M. Sanz-Serna, "Nonlinear Stability and Convergence of Finite-Difference Methods for the 'Good' Boussinesq Equation", *Numer. Math.*, Vol. **311**, pp. 1–15, (1990).
9. J.M. Sanz Serna, "Symplectic Integrators for Hamiltonian Problem: an Overview", *Acta Numerica*, Vol. **1**, pp. 243–286, (1992).

10. J.M. Sanz Serna y M.P. Calvo, "*Numerical Hamiltonian Problems*", Chapman & Hall, London, (1994).
11. V. Thomée, "Galerkin Finite Element Method for Parabolic Problems", *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. **1054**, Springer, New York, (1984).
12. R. Winther, "A Conservative Finite Element Method for the Korteweg-de Vries Equation", *Math. Comput.* Vol. **56**, pp. 23–43, (1980).