Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 4, 1, 41–59(1988)

ESTUDIO DE EXISTENCIA DE SOLUCIONES POR ELEMENTOS FINITOS DE UN PROBLEMA DEL TIPO DE CAPA LIMITE

JOSE R. TORO

Ingeniería Mecánica
Universidad de los Andes
Apartado Aéreo 4976
Bogotá, Colombia

RESUMEN

Se estudia la existencia de soluciones a las ecuaciones algebraicas asociadas a la discretización de un problema modelo similar a las ecuaciones de capa límite. El problema modelo retiene la forma de las no linealidades de la capa límite pero ignora la ecuación de continuidad. De este análisis se siguen criterios que permiten determinar la influencia de parámetros como viscosidad, norma de la velocidad, e incremento en la dirección de avance sobre la existencia de las soluciones algebraicas. Además se estudia la convergencia de la sucesión de soluciones algebraicas a la solución del sistema de ecuaciones ordinarias producto del modelo de elementos finitos de la ecuación parcial en estudio.

SUMMARY

The existence of solutions to the algebraic equations associate to the finite element approximation of a model problem similar to the boundary layer equations are considered. The model problem retains the form of the nonlinearities present in BLE, but ignores the Continuity Equation. Several criteria which allow to determine the influence of parameters such as viscocity, norm of the velocity or discretizacion step in the streamline direction, on the existence of solutions are studied. The convergence of the sequence of algebraic solutions to the solutions of the ordinary differential equations generated by the FEM model are studied also.

INTRODUCCION

Las ecuaciones diferenciales asociadas al problema de Capa límite laminar o turbulenta se pueden resolver mediante una técnica mixta de elementos finitos y diferencias finitas, típica de la forma como se tratan problemas parabólicos: La dependencia de la coordenada transversal a la capa límite se discretiza mediante elementos finitos, y la dependencia de la dirección de avance de la capa límite se discretiza mediante diferencias finitas. Normalmente se realiza primero la formulación débil del problema llevando a una discretización de la dirección transversal. El resultado es una reducción del sistema de *ecuaciones parciales* a un sistema de *ecuaciones*

Recibido: Septiembre 1987

 ISSN 0213–1315

diferenciales ordinarias. Este sistema se vuelve a discretizar en diferencias finitas eliminando las derivadas en la dirección de avance, lo cual conduce a un sistema de *ecuaciones algebraicas no lineales*. Ejemplos de este proceso para capas límites hidrodinámicas laminares y turbulentas se pueden hallar en[1,2] y para capas límites térmicas en[3].

En el presente trabajo se enfrenta el problema de existencia de soluciones al problema algebraico no lineal, así como la convergencia de las soluciones algebraicas al sistema de ecuaciones ordinarias. Este sería el primer paso necesario en un "proceso de continuación para demostrar la convergencia de soluciones numéricas, como las expuestas en[1] o[2], a la solución del sistema de ecuaciones parciales de Capa Límite.

En este artículo hemos escogido un problema modelo similar al de capa límite: nuestro problema modelo retiene la forma de la *no linealidad* presente en las ecuaciones de capa límite, sin embargo *no* considera la restricción impuesta por la *ecuación de continuidad.*

ECUACIONES DE CAPA LIMITE Y PROBLEMA MODELO

Las ecuaciones de Prandtl para capa límite hidrodinámica y sus respectivas condiciones de frontera son[6]:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_\infty\frac{du_\infty}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1b}$$

Con (y) la dirección transversal a la capa límite y (x) la dirección de avance.
ν la viscosidad cinemática y $U_\infty(x)$ la velocidad fuera de la capa límite.

Condiciones de borde

$$u(x,0) = v(x,0) = 0 \tag{2a}$$

$$u(x,d) = U_\infty(x) \tag{2b}$$

Las funciones de velocidad u y v deben ser conocidas para $x = 0$ y pueden interpretarse como condiciones iniciales del sistema parabólico.

$$u(0,y) = Uo(y) \tag{3a}$$

$$v(0,y) = Vo(y) \tag{3b}$$

El problema modelo con el que se trabaja en este artículo considera que la función $v(x,y)$ es conocida de antemano y por tanto se desecha la ecuación de continuidad, quedando un sistema con una única incógnita $u(x,y)$.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{4}$$

con v y U_∞ funciones conocidas.
Las condiciones de borde sobre $u(x,y)$ son idénticas a (2) y (3).

El principal problema con las ecuaciones (1) y (4) está en la no linealidad, que en este caso aparece en el término que contiene la derivada de avance del sistema parabólico, lo cual introduce singularidades en aquellas regiones distintas de la pared en las cuales $u \to 0$. Este es en sí el origen del problema de "separación o desprendimiento" en los fenómenos de capa límite.

SISTEMA DISCRETIZADO EN LA DIRECCION TRANSVERSAL (Y)

Siguiendo un procedimiento típico de generación de un problema débil asociado a (4) y después tomando la "proyección" de este problema sobre un subespacio de dimensión finita llegamos al sistema de ecuaciones ordinarias para la variable $u(x)$.

Este procedimiento puede consultarse para el caso de la capa límite en[1], por ejemplo.

El resultado de este proceso arroja el siguiente sistema de ecuaciones ordinarias:

$$B_1(\mathrm{u}, \dot{\mathrm{u}}) + B_2(\mathrm{v}, \mathrm{u}) + u_\infty L_1(\dot{\mathrm{u}}) + \dot{\mathrm{u}}_\infty L_1(\mathrm{u}) +$$

$$+ u_\infty L_3(\mathrm{v}) + \nu L_2(\mathrm{u}) + u_\infty \dot{u}_\infty \mathrm{C}_1 - u_\infty \dot{u}_\infty \mathrm{C}_3 = 0 \tag{5}$$

Donde $\mathrm{u}(x) \in R^{N-2}$ y $\mathrm{v}(x) \in R^{N-2}$. Las funciones de velocidad $u(x,y)$ y $v(x,y)$ se pueden obtener a partir de $\mathrm{u}(x)$ y $\mathrm{v}(x)$ usando las funciones de base $\{ w_i(y) \}$.

$$u(x,y) = \sum_{i=2}^{N-1} \mathrm{u}_i(x).w_i(y) + U_\infty.w_N(y) \tag{6a}$$

$$v(x,y) = \sum_{i=2}^{N} \mathrm{v}_i(x).w_i(y) \tag{6b}$$

Las funciones $\{ w_i(y) \}$ pertenecen al espacio de Sobolev $H'(0,d)$ y por tanto su envolvente lineal representa un espacio de aproximación del problema y lo denotamos V^N. En el resto del trabajo tomaremos como caso particular para $w_i(y)$ las bases de Lagrange, de primer orden, es decir polinomios a trozos de primer orden: Si el intervalo $[0,d]$ se discretiza en $N-1$ segmentos $[a_k, a_{k+1}]$ la función $w_i(y)$ queda completamente definida por:

- $w_i(a_j) = \delta_{ij}$.
- En cada intervalo $[a_k, a_{k+1}]$, $w_i(y)$ es una línea recta.

Las formas que aparecen en (5) tienen el siguiente significado:

$$
\begin{array}{llll}
B1: & R^{N-2} \text{ x } R^{N-2} \longrightarrow R^{N-2} & B1_{ijk} & = \int_0^d w_i\ w_j\ w_k\ dy \\
B2: & R^{N-1} \text{ x } R^{N-2} \longrightarrow R^{N-2} & B2_{ijk} & = \int_0^d w_i\ w_j\ w'_k\ dy \\
L1: & R^{N-2} \longrightarrow R^{N-2} & L1_{ij} & = \int_0^d w_N\ w_i\ w_j\ dy \\
L2: & R^{N-2} \longrightarrow R^{N-2} & L2_{ij} & = \int_0^d w'_i\ w'_j\ dy \\
L3: & R^{N-1} \longrightarrow R^{N-2} & L3_{ij} & = \int_0^d w'_N\ w_i\ w_j\ dy \\
C1 \in R^{N-2} & & C1_i & = \int_0^d w_i\ w_N\ w_N\ dy \\
C2 \in R^{N-2} & & C2_i & = \int_0^d w'_i\ w'_N\ dy \\
C3 \in R^{N-2} & & C3_i & = \int_0^d w_i
\end{array}
$$

(La acción de las formas bilineales se calcula como $[B(\mathbf{u},\mathbf{v})]_i = B_{ijk}\ \mathbf{u}_j\ \mathbf{u}_k$).

B_1 y B_2 son funciones bilineales continuas, L_1, L_2 y L_3 son funciones lineales continuas.

Para efectos de una notación más compacta usaremos los siguientes nombres:

$$B(\mathbf{a},\mathbf{b}) = B1(\mathbf{a},\mathbf{b}) \qquad ;$$

$$M(\mathbf{a}) = B2(\mathbf{v},\mathbf{a}) + \dot{U}_\infty\ L1(\mathbf{a}) \qquad ;$$

$$\mathbf{C} = U_\infty\ L3(\mathbf{v}) + U_\infty\ \dot{U}_\infty\ \mathbf{C1} + \nu\ U_\infty\ \mathbf{C2} - U_\infty\ \dot{U}_\infty\ \mathbf{C3} \qquad ;$$

$L1$ y $L2$ retienen sus definiciones originales.

En esta notación el problema a resolver es pues:

"Hallar $u(x) \in R^{N-2}$, con x en algún intervalo $[0, X]$ tal que

$$B(\mathbf{u},\dot{\mathbf{u}}) + U_\infty\ L1(\dot{\mathbf{u}}) + \nu\ L2(\mathbf{u}) + M(\mathbf{u}) + \mathbf{C} = 0 \tag{7}$$

$$\text{y} \qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{uo}."$$

DISCRETIZACION EN LA DIRECCION DE AVANCE (x)

El problema (7) se propone resolverlo discretizando la derivada $u(x)$ en forma muy simple como:

$$\dot{\mathbf{u}}(n\ \triangle x) = [\mathbf{u}((n+1)\ \triangle x) - \mathbf{u}(n\ \triangle x)]\ /\ \triangle x \tag{8}$$

En general llamaremos $u(n)$ a la aproximación del vector $u(n\ \triangle x)$. Substituyendo (8) en (7) obtenemos un sistema algebraico para el vector $u(n+1)$ si $u(n)$ es conocido.

En este trabajo usaremos preferiblemente la siguiente variable como incógnita de (8):

$$\mathbf{q} = [\mathbf{u}(n+1) - \mathbf{u}(n)] \, / \, \triangle x \tag{9}$$

Y $\mathbf{u}(n+1)$ lo hallamos como

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathbf{q}. \triangle x + \mathbf{u}(n) \tag{10}$$

Entonces el sistema algebraico a resolver para la posición $(n+1) \triangle x$ si se supone conocido $u(n)$ será:

$$B[\mathbf{u}(n) + \mathbf{q}\triangle x, q] + u_\infty \, L_1(\mathbf{q}) + \nu \, L_2[\mathbf{u}(n) + \mathbf{q}\triangle x] +$$

$$+ M[\mathbf{u}(n) + \mathbf{q}\triangle x] + \mathbf{C} = 0 \tag{11}$$

En adelante llamaremos $F(\mathbf{q}; \mathbf{u}(n), U_\infty, \nu, \triangle x)$ a la función del lado izquierdo de la ecuación (11). De tal forma que (11) es equivalente a hallar q tal que

$$F(q; \mathbf{u}(n), U_\infty, \nu, \triangle x) = 0 \tag{12}$$

La variable $\mathbf{q}$ será la incógnita y $\mathbf{u}(n)$, U_∞, ν, $\triangle x$ serán parámetros de la ecuación (12).

PROPIEDADES DE LA FUNCION F( )

Las propiedades de la función F que debemos destacar en este momento son:

Positividad de las formas B, $L1$ y $L2$, y como consecuencia de esto positividad de la derivada de Gateaux de F.

La positividad de esta derivada será usada para demostrar la existencia de soluciones de la ecuación $F(\mathbf{q}) = 0$.

Positividad de B, $L1$, $L2$

Consideremos el producto escalar:

$$a^T \, B(\mathbf{u}, \mathbf{b}) = \int_0^d u_i w_i a_j w_j b_k w_k dy \tag{13}$$

con $i, j, k = 2, N-1$.

Proponemos que si $\mathbf{u}_i > 0$ para todo $i = 2, N-2$ entonces dejando u constante $(\mathbf{a})^T. \, B(\mathbf{u}, \mathbf{b})$ es un producto escalar en R^{N-2}. Dicho producto escalar lo denotamos:

$$< a \, , \, b > = (\mathbf{a})^T. \, B(\mathbf{u}, \mathbf{b})$$

Las propiedades de conmutatividad, aditividad y homogeneidad de $< \, , \, >$ son obvias.

Si $a = 0$ obviamente $< a \, , \, a > = 0$.

Llamemos $u(y) = \sum u_i w_i(y)$ y $a(y) = \sum a_i w_i(y)$.

Si $u_i > 0$ para $i = 2, N-1$ entonces $u(y) > 0$ para $0 < y < d$, esto dada la definición de las bases $\{ w_i(y) \}$ dada anteriormente.

Si $a \neq 0$ entonces existirá al menos un intervalo (a_k, a_{k+1}) en el cual $a(y) > 0$. Pero mirando la definición de $< a , a >$ y de B vemos que $< a , a >$ lo podemos reescribir como:

$$< a , a > = \int_0^d u(y).a^2(y)\ dy$$

Lo cual dadas las propiedades de $u(y)$ y $a(y)$ es necesariamente positivo.

Con esto concluimos que $< , >$ es un producto escalar legítimo en R^{N-2} y por tanto $< \mathbf{a} , \mathbf{a} >^{1/2}$ será una norma en R^{N-2}. Dada la equivalencia de las normas en R podemos decir que $< \mathbf{a} , \mathbf{a} > \geq K_B(\mathbf{u})\ \|\mathbf{a}\|^2$. Donde $\|\mathbf{a}\|$ es la norma de Pitágoras y $K_B(u)$ obviamente es una constante que depende de u puesto que u entró en la definición de $< , >$.

En términos de B escribimos: Si $\mathbf{u}_i > 0$ para $i = 2, N-1$ entonces

$$(\mathbf{a})^T.\ B(\mathbf{u}, \mathbf{b}) \geq K_B(\mathbf{u})\ \|a\|^2 \tag{14}$$

$$K_B(u) > 0$$

Ahora probamos que la forma $L2$ es positiva definida.

Consideremos el producto:

$$(\mathbf{a})^T.\ L2(\mathbf{a}) = \int_0^d (\mathbf{a}_i).w_i'(y).(\mathbf{a}_j)w_j'(y)$$

con $i, j = 2, N-2$.

Con $a(y) = \sum a_i w_i(y)$ podemos escribir

$$(a)^T.\ 2(a) = \int [a'(y)]^2\ dy$$

pero $\int_0^d [a'(y)]^2\ dy$ es una norma en $H_0'(0,d)$ y $a(y) \in H_0'(0,d)$ de lo cual se sigue fácilmente que también será una norma para el vector $\mathbf{a}$ en R^{N-2}.

Luego por equivalencia de normas en R existe una constante K_2 tal que:

$$(\mathbf{a})^T.\ L2(\mathbf{a}) \geq K_2\ \|\mathbf{a}\|^2 \tag{15}$$

$$K_2 > 0$$

Finalmente consideremos el producto:

$$(\mathbf{a})^T.\ L1(\mathbf{a}) = \int_0^d w_N(y)\ \mathbf{a}_i\ w_i(y)\ \mathbf{a}_j\ \mathbf{w}_j(y)\ dy$$

Pero $w_i(y) > 0$ en $(a_0, d\,]$ de donde se sigue que

$$(a)^T\ L1(a) \geq 0 \qquad \text{para todo} \qquad \mathbf{a} \in R^{N-2} \tag{16}$$

Positividad de d_qF

La derivada de Gateaux de $F(q; U_\infty, u(n), \nu, \triangle x)$ actuando sobre el vector $\mathbf{a} \in R^{N-2}$ será:

$$[d_q\ F(\mathbf{q})]\ \mathbf{a} = B(\mathbf{u}(n), \mathbf{a}) + 2\triangle x\ \ B(\mathbf{q}, \mathbf{a}) +$$

$$+\ u_\infty\ L1(\mathbf{a}) + \triangle x\ \nu\ L2(\mathbf{a}) + \triangle x\ M(\mathbf{a}) \qquad 17)$$

Tomando el producto interior por $\mathbf{a}$:

$$a^T\ [d_q\ F(q)]a = \mathbf{a}^T\ B(\mathbf{u}(n), \mathbf{a}) + 2\triangle x\ a^T\ B(\mathbf{q}, \mathbf{a}) +$$

$$+\ u_\infty\ \mathbf{a}^T\ L1(\mathbf{a}) + \triangle x\ \nu\ \mathbf{a}^T\ L2(\mathbf{a}) + \triangle \mathrm{x}\ \mathbf{a}^\mathbf{T}\ \mathrm{M}(\mathbf{a}) \tag{18}$$

Usando (14), (15) y (16) obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\mathbf{a}^T\ [d_q\ F(\mathbf{q})]\ \mathbf{a} \geq K_B\ ||\mathbf{a}||^2 + \triangle x\ \nu\ K_2\ ||\mathbf{a}||^2 -$$

$$2\triangle x\ |a^T\ B(\mathbf{q}, \mathbf{a})| - \triangle x\ |\mathbf{a}^T\ M(\mathbf{a})| \tag{19}$$

Usando la desigualdad de Cauchy y la continuidad de B y M

$$\mathbf{a}^T\ [d_q\ F(q)]\mathbf{a} \geq$$

$$\Big[K_B + \triangle x\ \nu\ K_2 - 2\triangle x\ C_B\ ||\mathbf{q}|| - \triangle x\ ||M||\Big]\ ||\mathbf{a}||^2 \tag{20}$$

La expresión (20) la usaremos para establecer condiciones sobre los parámetros de la función F que permiten que d_qF sea positiva definida.

Existen dos casos para verificar la positividad de d_qF:

a) $\triangle x = 0$ entonces

$$\mathbf{a}^T\ [d_qF]\ \mathbf{a} \geq K_B\ ||\mathbf{a}||^2, \qquad K_B > 0 \tag{21}$$

b) $\triangle x > 0$ entonces

$$\mathbf{a}^T\ [d_qF]\ \mathbf{a} \geq S\Big(\mathbf{u}(n), \nu, \triangle x, \mathbf{q}\Big)\ ||\mathbf{a}||^2 \tag{22}$$

con $S = K_B + \Delta x\,[\nu K_2 - \|M\|] - 2\Delta x\, C_B\,\|\mathbf{q}\|$.

Si q es escogido tal que S sea positivo entonces $d_q F$ será también positivo, es decir si

$$Q \equiv \frac{K_B + \Delta x\,[\nu K_2 - \|M\|]}{2\Delta x\, C_B} > \|q\| \tag{23}$$

entonces S será positivo.

Claro está que se requiere adicionalmente que

$$\nu > \frac{\|M\|}{K_2} \equiv \nu_m \tag{24}$$

para que $Q > 0$.

En la desigualdad (22) molesta que S dependa de q. Este problema lo arreglaremos con la siguiente manipulación.

Usando la definición de Q reescribimos S como:

$$S = 2\Delta x\, C_B\,[Q - \|\mathbf{q}\|]$$

Sea $0 < t < 1$; si $\|q\| \leq tQ$ entonces

$$S \geq 2\Delta x\, C_B\,(1-t)\,Q$$

Llamemos

$$G = 2\Delta x\, C_B\,(1-t)\,Q \tag{25}$$

entonces podemos afirmar finalmente que

$$\mathbf{a}^T\,[d_q F]\,\mathbf{a} \geq S\,\|\mathbf{a}\|^2 \geq G\,\|\mathbf{a}\|^2 \tag{26}$$

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DE $F(q) = 0$

Para probar la existencia de soluciones de la ecuación $F(q) = 0$ usaremos un teorema de Hadamard[4]. La existencia podía haberse demostrado usando el Teorema de Funciones Implícitas, sin embargo el teorema de Hadamard nos da una mejor caracterización de las condiciones de existencia.

El teorema de Hamadard afirma lo siguiente:

"Sea $F : A \subset R^{N-2} \text{ x } R^{N-2}$ una función de derivada continua en A, y supongamos que existe una bola abierta $s = s(qo, r) \subset A$ tal que

$$a^T\,[d_q F]\,a \geq G\,\|a\|^2$$

$$\text{si} \qquad \mathbf{q} \in s(q_0, r)$$

$$\text{y} \qquad r > \frac{||F(q_0)||}{G}$$

entonces existe al menos un $q* \; \epsilon \; s(q_0, r)$ tal que $F(q*) = 0$."

Para poder usar este teorema daremos condiciones sobre u(n), ν, $\triangle x$ y U_∞ que hagan posibles las desigualdades del teorema. Para esto tomamos dos casos: $\triangle x = 0$ y $\triangle x > 0$.

Sea $\triangle x > 0$. Definimos:

$$r = tQ$$

$$qo = 0$$

Entonces

$$F(0) = \nu L2 \, [\mathrm{u}(n)] + M[\mathrm{u}(n)]$$

luego

$$||F(0)|| \leq \nu \, ||L2|| \, ||\mathbf{u}(n)|| + ||M|| \, ||\mathbf{u}(n)||$$

por lo tanto la condición sobre r queda satisfecha si:

$$tQ > \frac{(\nu \, ||L2|| + ||M||) \, ||\mathrm{u}(n)||}{2\triangle x \; C_B \; (1-t) \; Q} \tag{27}$$

O lo que es lo mismo:

$$(t) \; (1-t) > \frac{(\nu \, ||L2|| + ||M||) \, ||u(n)||}{2\triangle x \; C_B \; Q^2} \tag{28}$$

Luego si $u(n)$, $\triangle x$, t, ν, son tales que (28) se cumpla entonces habrá una solución $F(q*)$ con $q* \; \epsilon \; s(0, tQ)$.

La desigualdad (28) la vamos a substituir por otra que implica (28). Mirando la definición de Q vemos que

$$Q > \frac{K_B}{2\triangle x \; C_B} \qquad \text{si} \quad \triangle x > 0$$

luego si $u(n)$, $\triangle x$, ν y t son tales que

$$(t) \; (1-t) \geq \frac{(\nu \, ||L2|| + ||M||) \; 2\triangle x \; C_B}{{K_B}^2} \tag{29}$$

entonces se verificarán las condiciones para que existan soluciones en $s(0, tQ)$.

Llamemos to al valor de t, $0 \leq to \leq 1$ que satisface una igualdad en (29).

$to(1 - to) = h\triangle x$ con h definido por

$$h \;=\; 2C_B \;\|\mathbf{u}(n)\|\; (\nu\; \|L2\| \;+\; \|M\|) \;/\; {K_B}^2$$

Entonces *to* estará dado por

$$to \;=\; \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4h\triangle x}}{2}$$

Llamamos *too* a la menor de las raices y *to*1 la mayor entonces si

$$too \;\leq\; to \;\leq\; to1$$

la condición (29) se verificará.

Debemos agregar que para que la anterior afirmación tenga sentido se requiere que: $1/4 \;-\; h\triangle x \;>\; 0$, es decir que

$$\triangle x \;<\; h/4 \tag{30}$$

(30) impone una cota superior sobre $\triangle x$.

Escogemos $t \;=\; too$ con el fin de acotar al máximo la solución; entonces podemos resumir el estudio de existencia de soluciones en la siguiente afirmación:

"Si $0 \;\leq\; \triangle x \;<\; h/4,\;\; \nu \;>\; \|M\| \;/\; K_2$ y $\mathrm{u}_i(n) \;>\; 0$ para $i = 2, N-1$ entonces existe al menos un $q* \;\epsilon\; s(0, tQ)$ tal que $F(q*) \;=\; 0$;

$$t \;=\; \frac{1}{2} \;-\; \sqrt{\frac{1}{4} - h\triangle x}$$

$$h \;=\; 2C_B \;\|\mathbf{u}(n)\|\; (\nu\; \|L2\| \;+\; \|M\|) \;/{K_B}^2 \tag{31}$$

$$Q \;=\; \frac{K_B \;+\; \triangle x\; [\nu K_2 \;-\; \|M\|]}{2\triangle x C_B}$$

Si $\triangle x \;=\; 0$ entonces $\mathbf{a}^T\; [d_q F]\; \mathbf{a} \;\geq\; K_B\; \|a\|^2$ luego existirán soluciones en $s(0, r)$ siempre y cuando

$$r \;>\; (\nu\; \|L2\| \;+\; \|M\|)\; \|u(n)\| \;/\; K_B \tag{32}$$

La unicidad de las soluciones $q*$ en $s(0, tQ)$ es una consecuencia directa del siguiente teorema (ver[4]):

"Si $F(q)$ tiene derivada continua en $A \;\subset\; R^{N-2}$, con A convexo y $d_q F(q)$ es positiva definida para todo A entonces F es $1-1$ en A."

En nuestro caso $d_q F(q)$ es positiva definida en $s(0, tQ)$ por lo tanto si $F(q*) \;=\; 0$, $q*$ será el único elemento de $s(0, tQ)$ que satisface $F(q*) \;=\; 0$.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LA SOLUCION q

En la siguiente parte de este trabajo pretendemos demostrar que la serie de soluciones $u(n)$ convergen a la solución del sistema de ecuaciones ordinarias (7). Para esto vamos a requerir algunas propiedades de suavidad de la solución $q*$ como función de los parámetros de la función F.

Para esto consideraremos en adelante la función F como una función de 2 variables:

$$F : R^{N-2} \text{ x } R^{N+1} \longrightarrow R^{N-2} , \qquad F(q, P)$$

Los parámetros $\mathbf{u}(n)$, U_∞, ν, $\triangle x$ los reuniremos en un vector

$$P \in R^{N-2} \text{ x } R^3 \quad , \quad P = (\mathbf{U}(n), U_\infty, \nu, \triangle x)$$

Los resultados (31) y (32) demuestran que bajo ciertas restricciones sobre P se puede hallar un $q(P)$ tal que

$$F\Big(\mathbf{q}(P), \mathbf{P}\Big) = 0$$

Entonces para comodidad adelante definiremos una región $D \subset R^{N+1}$ tal que para todo $P \in D$, $\mathbf{q}(P)$ exista y esté acotado.

Consideremos las siguientes regiones para los componentes de P:

$$0 < u_m \leq \|\mathbf{u}(n)\| \leq U_M < \infty \qquad \mathbf{u}_i(n) > 0$$

$$0 < V_m \leq U_\infty \leq V_M < \infty$$

$$0 < \frac{\|M\|}{K_2} < \nu \leq \nu_M < \infty$$

$$0 \leq \triangle x < \triangle x_M$$

con $\triangle x_M = h/4$ y evaluando h de (31) usando U_m para $\|u(n)\|$ y $\frac{\|M\|}{K_2}$ para ν.

Entonces sea D el producto cartesiano de estas cuatro regiones.

Llamemos K al siguiente supremo sobre D

$$K = \sup_{p \in D} \{tQ\} \tag{33}$$

De las fórmulas en (31) y la definición de D es claro que el supremo existe. (Es fácil verificar usando la regla de L'Hopital que en el caso $\triangle x \longrightarrow 0$ $\quad tQ$ calculado de (31) coincide con r calculado de (32) que sería el argumento en el supremo (33)).

Ahora probaremos que para la función $q(P)$ definida sobre D la derivada de Gateaux existe y es acotada en D; para esto usaremos el teorema de Funciones Implícitas:

Sea $Po \epsilon D$ tal que $F[q(Po), Po] = 0$. Lo cual está garantizado por (31). Sabemos que $\partial_q F[q(\mathbf{Po}), \mathbf{Po}]$ existe y es invertible dada la positividad en (26). Supongamos que es continua en un entorno de $[q(Po), Po]$. Ahora miremos la derivada $\partial F_p[q(Po), Po]$. (Llamamos $qo = q(Po)$).

$$[\partial_p F\ (\mathbf{qo}, \mathbf{Po})]\ P = [\partial_{u(n)} F]\ \mathbf{P}_1 + [\partial_{u_\infty} F]\ \mathbf{P}_2 +$$

$$+ [\partial_\nu F]\ \mathbf{P}_3 + [\partial_{\Delta x} F]\ \mathbf{P}_4 \tag{34}$$

con $P = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ y

$$\begin{array}{llcll}
\partial_{u(n)} & F(qo, Po) & : R^{N-2} & \longrightarrow & R^{N-2} \\
\partial_{u_\infty} & F(qo, Po) & : R & \longrightarrow & R^{N-2} \\
\partial_{nu} & F(qo, Po) & : R & \longrightarrow & R^{N-2} \\
\partial_{\Delta x} & F(qo, Po) & : R & \longrightarrow & R^{N-2}
\end{array}$$

definidos por

$$\begin{aligned}
[\partial_{u(n)}\ F(qo, Po)]\ P_1 &= B(\mathbf{P}_1, \mathbf{qo}) + \nu_0\ L2(\mathbf{P}_1) + M(\mathbf{P}_1) && (35a)\\
[\partial_{u_\infty}\ F(qo, Po)]\ P &= L1(\mathbf{qo}) && (35b)\\
[\partial_\nu\ F(qo, Po)]\ P &= L2[\mathbf{u}(n)_0 + \mathbf{qo}\ \Delta x_0] && (35c)\\
[\partial_{\Delta x}\ F(qo, Po)]\ P &= B[\mathbf{qo}, \mathbf{qo}] + \nu_0 L2[\mathbf{q}_0] + M(\mathbf{qo}) && (35d)
\end{aligned}$$

Entonces del Teorema de Funciones Implícitas concluimos que

$$d_p q[\mathbf{Po}] = -\ [\partial_q F(qo, Po)]^{-1}\ .\ \partial_p F(qo, Po) \tag{36}$$

Y esta expresión la usamos para demostrar que $d_p q(\mathbf{Po})$ está acotada. Para lo cual necesitamos que cada uno de los términos del producto en (36) esté acotado:
El acotamiento de $[d_q F(qo, Po)]$ sigue del siguiente Lema (ver[4]):
"Si A es un operador lineal tal que $(a)^T\ [A]\ a > \frac{1}{k}\ ||a||$ entonces

$$||A^{-1}|| \leq \frac{1}{k}"$$

Usando (26) y (31) y el anterior lema concluimos que

$$||\left[\partial_q F[q(P), P]\right]^{-1}|| \leq \frac{1}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - h\Delta x}} \cdot \frac{1}{K_B + \Delta x[\nu K_2 - ||M||]} \tag{37}$$

El lado derecho de la desigualdad (37) se puede ver que es acotado si $P \epsilon D$. Entonces escribimos

$$\left\| \left[\partial_q F[q(P), P] \right]^{-1} \right\| \leq \Psi_q < \infty \tag{38}$$

La cota para $d_P F(qo, Po)$ se sigue de la definición de D, del hecho de que qo esté acotado en (33), y de la continuidad de las distintas formas involucradas:

$$\|[\partial_p F(Po, qo)]\| \leq \{\|\partial_{u(n)} F\|^2 + \|\partial_{u_\infty} F\|^2 + \|\partial_\nu F\|^2 + \|\partial_{\triangle x} F\|^2\}^{1/2} \tag{39}$$

con

$$\|\partial_{u(n)} F\| \leq C_B \, \|\mathbf{qo}\| + \nu_0 \, \|L2\| + \|M\| \tag{40a}$$

$$\|\partial_{u_\infty} F\| \leq \|L1\| \tag{40b}$$

$$\|\partial_\nu F\| \leq \|\mathbf{u}(n)_0\| \, \|L2\| + \triangle x_0 \, \|\mathbf{qo}\| \, \|L2\| \tag{40c}$$

$$\|\partial_{\triangle x} F\| \leq C_B \, \|\mathbf{qo}\| + \nu o \, \|L2\| \, \|\mathbf{qo}\| + \|M\| \, \|\mathbf{qo}\| \tag{40d}$$

Luego llamamos Ψ_P la cota de $d_P F(qo, Po)$.

$$\|\partial_p F[P, q(P)]\| \leq \Psi_P < \infty \tag{41}$$

De donde se sigue usando (38) y (41) que:

$$\|\partial_p q(Po)\| \leq \theta < \infty \qquad \text{para todo} \qquad Po \,\epsilon\, D \tag{42}$$

UNA DESIGUALDAD PARA EL ERROR DE APROXIMACION

Sea $\mathbf{w}(x) \,\epsilon\, R^{N-2}$ la solución al sistema (7)

$$B(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) + u_\infty \, L1 \, (\dot{\mathbf{w}}) + \nu L2(\mathbf{w}) + M_1(\mathbf{w}) + C = 0$$

con $w(0) = wo$.

Supongamos adicionalmente que dicha solución es 2 veces derivable en algún intervalo $[0, X]$.

Queremos comparar ahora las sucesiones

- $\{ \mathbf{u}(n) \}$ dada por $\mathbf{u}(n+1) = \mathbf{u}(n) + \triangle x \; \mathbf{q}(P)$
- $\{ \mathbf{w}(n) \}$ definida como $\mathbf{w}(n) \equiv \mathbf{w}(n \, \triangle x)$

Además suponemos que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{w}(0) = \mathbf{wo}$.

Definimos el error de aproximación $e(n)$ como

$$e(n) = \|\mathbf{u}(n) - \mathbf{w}(n)\| \tag{43}$$

Queremos mostrar que $e(n)$ satisface una desigualdad del tipo

$$e(n+1) \leq C1\,\Delta x + (1 + \Delta x\, C2)\, e(n)$$

Si este el caso mediante un argumento más o menos standar se puede demostrar que $e(n) \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$ y $n\,\Delta x$ está acotado (ver por ejemplo[5]).

Por el teorema del valor medio para funciones dos veces derivables:

$$\|\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n) - \dot{\mathbf{w}}(n\Delta x)\| \leq \sup_{0\leq\alpha\leq 1} \|\ddot{\mathbf{w}}(n\Delta x + \alpha\Delta x)\|\,\Delta x^2 \tag{44}$$

y de las definición de $\{\ u(n)\ \}$

$$\|\mathbf{u}(n+1) - \mathbf{u}(n)\| \leq \Delta x\,\|\mathbf{q}[u(n), u_\infty, \nu, \Delta x]\| \tag{45}$$

Usando la desigualdad triangular y (44), (45)

$$\|\mathbf{u}(n+1) - \mathbf{w}(n+1)\| \leq \sup_{0\leq\alpha\leq 1} \|\ddot{\mathbf{w}}\ (n\Delta x + \alpha\Delta x)\|\,\Delta x^2 + \|\mathbf{w}(n) - \mathbf{u}(n)\| +$$

$$+ \|\dot{\mathbf{w}}(n\Delta x) - q[u(n), u_\infty, \nu, \Delta x]\|\,\Delta x \tag{46}$$

El último término lo podemos escribir como

$$\|\dot{\mathbf{w}}(n\Delta x) - \mathbf{q}[\mathbf{u}(n), u_\infty, \nu, \Delta x]\| \leq \|\dot{\mathbf{w}}(n\Delta x) - \mathbf{q}[\mathbf{w}(n), u_\infty, \nu, \Delta x]\| +$$

$$+ \|\mathbf{q}[\mathbf{w}(n), u_\infty, \nu, \Delta x] - \mathbf{q}[\mathbf{u}(n), u_\infty, \nu, \Delta x]\| \tag{47}$$

Y por el teorema del valor medio

$$\|\mathbf{q}[\mathbf{w}(n), u_\infty, \nu, \Delta x] - q[\mathbf{u}(n), u_\infty, \nu, \Delta x]\| \leq$$

$$\leq \sup_{0\leq\alpha\leq 1} \|\partial_p q[\mathbf{u}(n) + \boldsymbol{\alpha}\Big(w(n) - u(n)\Big), \nu, \Delta x]\|\ \|w(n) - u(n)\| \tag{48}$$

Luego (46) lo podemos reescribir como:

$$e(n+1) \leq \sup_{0\leq\alpha\leq 1} \|\ddot{\mathbf{w}}\ (n\Delta x + \alpha\Delta x)\|\,\Delta x^2 +$$

$$+ \|\dot{\mathbf{w}}\ (n\Delta x) - \mathbf{q}[w(n), u_\infty, \nu, \Delta x]\|\,\Delta x +$$

$$+ \{1 + \triangle x \sup_{0\leq\alpha\leq 1} ||\partial_p q[\mathbf{u}(n) + \alpha\Big(\mathbf{w}(n) - \mathbf{u}(n)\Big), u_\infty, \nu, \triangle x||\} \; e(n) \qquad (49)$$

Ahora queremos demostrar que $||\dot{\mathbf{w}}\ (n\triangle x) - \mathbf{q}[w(n), u_\infty, \nu, \triangle x]||$ es de orden $\triangle x$. Para demostrar esto usamos los siguientes argumentos:

$F(q(P), P) \; = \; 0$ para todo $P \in D$, esto incluye el caso en que

$$P \; = \; (w(n), U_\infty, \nu, 0) \qquad \text{si} \qquad U_m \; < \; ||w(n)|| \; < \; U_M$$

Por lo tanto:

$$B\Big[\mathbf{w}(n), \mathbf{q}[w(n), u_\infty, \nu, 0]\Big] \; + \; u_\infty \; L1\Big[\mathbf{q}[\mathbf{w}(n), u_\infty, \nu, 0]\Big] \; +$$

$$+ \; \nu \; L2[\mathbf{w}(n)] \; + \; M[\mathbf{w}(n)] \; + \; C \; = \; 0 \qquad (50)$$

Pero $\dot{w}(n\triangle x)$ satisface la misma ecuación que $q\Big(w(n), U_\infty, \nu, 0\Big)$ (ver (7)).

De aquí concluimos que:

Si $\Big(\mathbf{w}(n), u_\infty, \nu, 0\Big) \in D$ entonces

$$\mathbf{q}\Big(\mathbf{w}(n), U_\infty, \nu, 0\Big) \; = \; \dot{w}(n\triangle x) \qquad (51)$$

Entonces si $\Big(\mathbf{w}(n), U_\infty, \nu, \triangle x\Big) \in D$, usando nuevamente el teorema del valor medio:

$$||\mathbf{q}(\mathbf{w}(n), u_\infty, \nu, \triangle x) \; - \; \mathbf{q}(\mathbf{w}(n), u_\infty, \nu, 0)|| \; \leq$$

$$\leq \; \sup_{0\leq\alpha\leq 1} ||\partial_p q[\mathbf{w}(n), u_\infty, \nu, \alpha\triangle x]|| \; \triangle x \qquad (52)$$

Y usando (51) en (52)

$$||\dot{\mathbf{w}}(n\triangle x) \; - \; \mathbf{q}[\mathbf{w}(n), u_\infty, \nu, \triangle x] \; \leq$$

$$\leq \; \sup_{0\leq\alpha\leq 1} ||\partial_p q[\mathbf{w}(n), u_\infty, \nu, \alpha\triangle x]|| \; \triangle x \qquad (53)$$

Con lo cual llegamos finalmente a la expresión deseada para $e(n)$.

Reemplazando (53) en (49) obtenemos:

"Si $(\mathbf{u}(n), U_\infty, \nu, \triangle x)$ y $(\mathbf{u}(n), U_\infty, \nu, \triangle x)$ son miembros de D entonces

$$e(n+1) \; = \; S_1 \; \triangle x^2 \; + \; (1 + \triangle x \; S_2) \; e(n) \qquad (54)$$

Con

$$S1 = \sup_{0\leq\alpha\leq 1} \|\ddot{\mathbf{w}}(n\Delta x+\alpha\Delta x)\| + \sup_{0\leq\alpha\leq 1} \|\partial_p q[\mathbf{w}(n), u_\infty, \nu, \alpha\Delta x]\|$$

$$S2 = \sup_{0\leq\alpha\leq 1} \|\partial_p q[\mathbf{u}(n)+\alpha(\mathbf{w}(n)-\mathbf{u}(n)), u_\infty, \nu, \Delta x]\|$$

Para que la desigualdad (54) resulte útil es necesario poder reemplazar $S1$ y $S2$ por constantes. El motivo del análisis que sigue es el de demostrar que esto es posible:

Definamos $s(wo, p(wo))$como la bola más grande en R^{N-2} con centro wo y radio p tal que si $u \in s(wo,p)$ entonces

$$u_m < \|\mathbf{u}\| < U_M \quad ; \quad \mathbf{u}_i > 0 \tag{55}$$

Y sea D' el producto cartesiano de $s(wo,p)$ por los intervalos

$$[V_m \ , \ V_M] \ , \ \left[\frac{\|M\|}{K_2} \ , \ \nu_M\right] \ , \ [0 \ , \ \Delta x_M]$$

usados en la definición de D. Claramente $D' \subset D$. Además D' es un conjunto convexo, propiedad que necesitaremos más adelante.

Ahora usamos la siguiente proposición que se podría mostrar por inducción:

"Si $n\Delta x K \leq p(wo)$ y $< U <$ entonces

$$(u(n), U_\infty, \nu, \Delta x) \in D'." \tag{56}$$

(Para mostrar esto debemos notar que:

Si $(u(k), U_\infty, \nu, \Delta x) \in D$ entonces $u(k+1)$ queda definido por (10)

$$u(k+1) = u(k) + \Delta x \ . \ q[(u(k), U_\infty, \nu, \Delta x)] \quad)$$

Ahora definimos las siguientes cotas:

$$X1 = \frac{p(wo)}{K} \tag{56}$$

De la definición de $X1$ y de (55) y (56) se sigue que:

$$\text{si } n\Delta x < X1 \quad \text{entonces} \quad (u(n), U_\infty, \nu, \Delta x) \in D'$$

Ahora definamos $X2 > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{w}(x) - \mathbf{wo}\| \leq p(wo) \quad \text{para todo} \quad x \leq X2 \tag{57}$$

$X2$ dependerá de wo, U_∞, ν.

De las definiciones de $X1$ y $X2$ concluimos que

" Si $n\triangle x \ < \ \min\ \{X1\ ,\ X2\}$ entonces

$$\Big(\mathrm{u}(n), U_\infty, \nu, \triangle x\Big) \quad , \quad \Big(\mathrm{w}(n), U_\infty, \nu, \triangle x\Big) \ \epsilon \ D' \tag{58}$$

y si D' es convexo entonces para $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\Big(u(n) + \ \alpha(w(n) - u(n)), U_\infty, \nu, \triangle x\Big) \ \epsilon \ D'."$$

Usando (58) y (42) concluimos que:

$$\text{Si } V_m \ \leq \ u_\infty \ < \ V_M \quad , \quad \frac{\|M\|}{K2} \ < \ \nu \ \leq \ \nu_M \quad , \quad 0 \ \leq \ \triangle x \ < \ \triangle x_M \tag{59}$$

entonces

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \ \|\partial_p q[u(n) + \alpha(w(n) - u(n)), u_\infty, \nu, \triangle x]\| \ \leq \ \theta$$

Con argumentos similares:

"Si $n\triangle x \ < \ \min \ \{X1, X2\}$ entonces para todo $0 \leq \alpha \leq 1$

$$(\mathrm{w}(n), U_\infty, \nu, \alpha\triangle x) \ \epsilon \ D'." \tag{60}$$

Por lo tanto

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \ \|\partial_p q[(w(n), u_\infty, \nu, \alpha\triangle x]\| \ \leq \ \theta \tag{61}$$

Finalmente supongamos la siguiente cota para $\ddot{w}(x)$:

"Si $n\triangle x \ < \ \min \ \{X1, X2\}$ entonces

$$\sup_{0 \leq x \leq (n+1)\triangle x} \ \|\ddot{w}(x)\| \ \leq \ w \ < \ \infty" \tag{62}$$

w dependerá de wo, U_∞, ν.

Con estos resultados obtenemos la versión deseada de (54)

"Si $n\triangle x \ < \ \min \ \{X1, X2\}$

$$e(n+1) \ < \ (\theta + w)\ \triangle x^2 \ + \ (1 + \theta\triangle x)\ e(n)" \tag{63}$$

CONVERGENCIA DE LA SOLUCION APROXIMADA

Por último seguimos un proceso muy simple (ver[5] por ejemplo) para mostrar que $u(n) \longrightarrow w(x)$:

Consideremos la sucesión $E(n)$ definida por:

$$E(n+1) = (\theta + w)\,\Delta x^2 + (1+\theta\Delta x)\,E(n)$$

$$\text{y} \quad E(0) = 0 \tag{64}$$

Es claro que $E(n) < e(n)$.

Pero $E(n)$ se puede calcular explícitamente como:

$$E(n) = \frac{(w+\theta)}{\theta}\,\Delta x\,(1+\Delta x\theta)^n - \frac{(w+\theta)}{\theta}\,\Delta x \tag{65}$$

Usando la desigualdad $(1+a) < \exp(a)$ podemos decir que

$$e(n) \leq E(n) \leq \frac{(w+\theta)}{\theta}\,\Delta x\,\Big[\exp[n\Delta x\theta] - 1\Big] \tag{66}$$

De (66) concluimos el siguiente resultado:

"Supongamos que wo, U_∞, ν, satisfacen

$$U_m \leq \|wo\| \leq U_M \quad , \quad (wo)_i > 0 \quad , \quad V_m \leq U_\infty < V_M \quad , \quad \frac{\|M\|}{K_2} < \nu \leq \nu_M$$

Sea $s(wo, p(wo))$ la bola definida en (55) y $X1$ y $X2$ definidos en (56) y (57), y supongamos que $\ddot{w}(x)$ satisface (62) entonces si $x < \min\{X1, X2\}$ y $n\Delta x = x$

$$\lim_{n\to\infty} \|u(n) - w(n)\| = 0." \tag{67}$$

CONCLUSIONES

Las fórmulas en (31) permiten cuantificar una serie de características típicas de ecuaciones no lineales y en particular de ecuaciones de capa límite:

- Aún cuando el esquema de diferencias finitas para aproximación en la dirección de avance es Implícito, la existencia de soluciones al problema algebraico, y por tanto la convergencia de estas soluciones al sistema de ecuaciones ordinarias, están condicionadas a que el tamaño del incremento Δx esté por debajo de un cierto valor que depende de la viscosidad y de la norma de la velocidad.

- El tamaño de la viscosidad también está condicionado para que existan soluciones. En este caso (31) nos da una cota inferior lo cual es típico de problemas de flujo viscoso, para los cuales viscosidades muy pequeñas no permiten soluciones de estado estable.
- La limitación más importante que impone (31) es la necesidad de que la velocidad u se mantenga positiva (a excepción del punto $y = 0$) con el avance de la "capa límite". Esta limitación es el reflejo del problema de separación. En teoría de capa límite se toma como punto de separación aquel en el cual $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Si las velocidades para $y \neq 0$ son 0 o negativas son indicios del principio de la separación o aún de la existencia de reflujo. Por estas razones era de esperarse que apareciera alguna restricción sobre el signo de la velocidad para que existieran soluciones aproximadas. Sin embargo en el momento se está investigando sobre formas de predecir aún cuando sea en el esquema discreto, el momento en el cual la velocidad empieza a presentar componentes 0 o negativas y así dar algunos pasos en una teoría de predicción a priori de la separación. Como están las cosas en este artículo sólo se afirma que si la velocidad es 0 o negativa pueden no existir soluciones, pero no sabemos cuándo ocurre esto.
- Otra dirección importante de investigación en la cual se está trabajando es la de incluir dentro del análisis la ecuación de continuidad de tal forma que estemos trabajando con el sistema real de capa límite. Esto en principio no parecería muy difícil. De todas formas el presente análisis aún cuando sólo trabaje con un problema modelo, esperamos que ayude a constituir una teoría de aproximación de la capa límite, ya que la mayoría de la literatura al respecto únicamente muestra implementaciones de algoritmos de solución y "pruebas" numéricas de convergencia.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Francisco Rodríguez, Jefe del Departamento de Ingeniería Mecánica, por el tiempo que me ha otorgado para realizar este trabajo.

REFERENCIAS

1. S. Kim, "Finite Element Analysis of Incompressible Boundary Layer", ***Int. Jou. for Numerical Methods in Engineering***, Vol. **5**, (1985).
2. N. Zamani, "A Collocation Method for Integration of Boundary Layer Equations", ***Applied Mathematics and Computation***, Vol. **15**, (1984).
3. N. Zamani y F. Nafeiy, "Finite Element Formulation of Thermal Boundary Layer", ***Journal of Computational and Applied Mathematics***, Vol. **11**, (1984).
4. J. Ortega y W. Rheinboldt, ***"Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables"***, Academic Press N.Y., (1970).
5. S. Conte y C. de Boor, ***"Análisis numérico"***, Mc. Graw Hill N.Y.,(1974).
6. H. Schlichting, ***"Teoría de la Capa Límite"***, Ediciones Urmo, Bilbao, (1972).