

ESTUDIO DE ESTRUCTURAS SOMETIDAS A ESFUERZOS DE IMPACTO EN REGIMEN ELASTOPLASTICO Y CON GRANDES DEFORMACIONES POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. PARTE II: ALGORITMO DE CONTACTO-IMPACTO Y EJEMPLOS

JUAN MIQUEL CANET

y

JAVIER BONET

*Escuela de Ingenieros de Caminos,
Canales y Puertos de Barcelona*

RESUMEN

En este segundo artículo, se expone el algoritmo de contacto-impacto utilizado para problemas tridimensionales. Se desarrolla fundamentalmente el método de las penalizaciones hallando el valor de la máxima rigidez estable. Se incluyen asimismo tres ejemplos de aplicación.

SUMMARY

In this second part of the paper, we shall present the contact-impact algorithm used in tridimensional problems. We shall develop fundamentally the penalizations methods in order to find the stable maximum stiffness value. We shall also include three application examples.

INTRODUCCION

En un artículo previo¹, se desarrolló la formulación teórica para el estudio de cuerpos sometidos a acciones de impacto. Después de describir las ecuaciones constitutivas utilizadas, se estudiaba el elemento hexaédrico y la integración numérica. En este artículo, se completa el estudio anterior, con el algoritmo de contacto-impacto y la resolución de tres ejemplos.

ALGORITMO DE CONTACTO-IMPACTO

En el presente apartado, nos proponemos describir las estrategias numéricas, capaces de definir con eficacia las zonas de contacto y asegurar el cumplimiento de la impenetrabilidad de la materia y de la tercera ley de Newton.

Recordemos que nuestros sólidos se encuentran definidos como un ensamblaje de elementos hexaédricos, por lo que sus contornos quedan definidos como unión de elementos de 4 nodos. Estos elementos son superficies regladas y pueden representarse

Recibido: Febrero 1987

particularizando las ecuaciones del hexaedro tomando uno de sus parámetros (ξ^1, ξ^2, ξ^3) el valor 1 ó -1. Realizando esta operación, y llamando ξ, η a las dos coordenadas intrínsecas libres, que emplearemos como coordenadas superficiales, tenemos que la geometría de un elemento de contorno viene definida en todo instante de tiempo como:

$$x^i(t) = x_A^i(t) N_A(\xi, \eta) \quad (1)$$

Con $A = 1, 2, 3, 4$

$$N_A = \frac{1}{4} (1 + \xi_A \xi) (1 + \eta_A \eta)$$

Una de las grandes dificultades de los problemas de impacto, tanto estudiados desde una óptica analítica como numérica, es la variabilidad de las zonas de contacto, al depender ésta del movimiento y deformación de los sólidos.

Podemos esquematizar todo método numérico de contacto-impacto en dos etapas: la primera de ellas tiene como fin determinar en cada iteración la zona de contacto; una vez conocida ésta se procede a la aplicación del algoritmo de contacto-impacto en los puntos donde los sólidos han entrado en contacto.

Existen principalmente dos algoritmos distintos para tratar las zonas de contacto. El primer método publicado fue el llamado "Método de las restricciones nodales" ("Nodal Constraint Method") debido a Hughes et al (ver¹⁰). Posteriormente Halquist puso a punto el "método de las penalizaciones" ("Penalty Method") (ver¹³).

Pueden entenderse ambos métodos como una generalización a superficies de contacto de los clásicos procedimientos existentes para tratar las condiciones de contorno en corrimientos de estructuras aisladas, donde recordemos que la condición $u_n = 0$ podía imponerse de dos formas:

- Retirar la correspondiente fila y columna de la matriz de rigidez, esto es, anular el correspondiente grado de libertad.
- Colocar un muelle de rigidez suficiente como para asegurar aproximadamente que se cumple $u_n = 0$.

El método de las restricciones nodales y el de las penalizaciones pueden interpretarse como generalizaciones de los anteriores respectivamente. En el método de las restricciones nodales se impone de forma exacta la impenetrabilidad de la materia y se utilizan las condiciones de contacto-impacto continuo.

En el presente trabajo, se ha utilizado el método de las penalizaciones y por tanto será este el que se describa.

Supongamos los contornos de dos sólidos susceptibles de entrar en contacto, $\partial V_1, \partial V_2$, ambos quedan definidos por un ensamblaje de elementos de 4 nodos como vimos anteriormente. De ambas superficies o contornos definiremos una como superficie principal ("master surface") y la otra como superficie asociada ("slave surface"). Análogamente a los nodos de la primera los llamaremos nodos principales y nodos asociados a los de la segunda.

En general, la primera de ellas es utilizada para la definición de las normales en el área de contacto, realizándose la determinación de dicha zona mediante la comprobación, en cada iteración, y para todos los nodos asociados, de su posible penetración en la superficie principal. Si ninguno de dichos nodos ha entrado en contacto con la superficie principal los sólidos se mueven independientemente.

Según lo anterior, la elección de uno de los contornos como principal y otro como asociado no es arbitraria en general, y debe elegirse preferentemente como asociada aquella con una discretización más fina, ya que de lo contrario, podemos encontrarnos con casos como el que representa la figura 1. Si trabajamos con grandes corrimientos como es nuestro caso, el problema se complica enormemente, ya que la zona de contacto no está predeterminada y por tanto los nodos asociados pueden incidir sobre las caras de los elementos de la superficie principal.

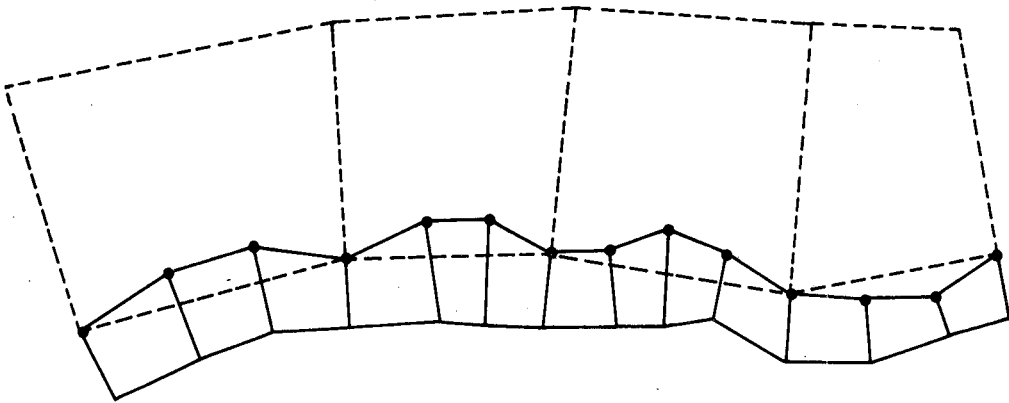


Figura 1. Elección de contorno principal y asociado

En tales condiciones, la determinación del área de contacto debe realizarse encontrando para cada nodo asociado el punto de la superficie principal más cercano a él, punto que denominaremos de incidencia o penetración, y que claramente es variable con el tiempo. El punto de incidencia es tal que trazando la normal a la superficie principal desde él, dicha recta pasa por el nodo asociado correspondiente (fig. 2).

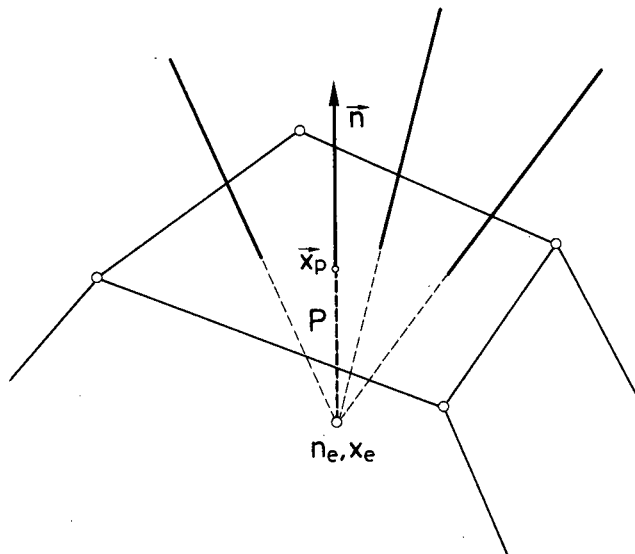


Figura 2. Punto de incidencia y nodo asociado en la superficie de contacto

En donde para la figura 2

n_e : Nodo asociado de coordenadas \vec{x}_e

\vec{x}_p : Punto de penetración

\vec{n} : Normal a la superficie principal en \vec{x}_p

Una vez conocido \vec{x}_p la condición de no penetración puede establecerse como:

$$(\vec{x}_e - \vec{x}_p) \cdot \vec{n} = -p \leq 0 \quad (2)$$

Siendo p la distancia penetrada.

El cálculo del punto \vec{x}_p resulta sumamente problemático. Por un lado la superficie principal presenta aristas en los lados comunes a dos elementos, esto es, la normal no es continua, ni tampoco constante dentro de cada una de las caras. Todo ello nos conduce hacia un algoritmo sumamente sofisticado que puede verse descrito en¹³.

Método de las penalizaciones

El método de las penalizaciones o "Penalty Method" a lo largo de su corta historia ha demostrado ser uno de los métodos más simples y eficaces para el tratamiento de superficies de contacto.

Este procedimiento es fácilmente aplicable con superficies de contacto no predeterminadas y contacto nodo-elemento. Una vez conocida ésta se impide, o mejor se controla, la penetración mediante la aplicación de unas fuerzas entre el nodo asociado que penetra y la cara sobre la que penetra, de módulo:

$$F = k p \quad (3)$$

Siendo p la penetración. Asimismo la dirección de F se hace coincidir con la normal a la cara principal (fig. 3).

Como puede observarse este procedimiento equivale a la introducción de un muelle de rigidez k entre ambas superficies. Este método presenta una ventaja de gran importancia, que es la posibilidad de colocar muelles no sólo entre los nodos asociados y las caras principales, sino también entre los nodos principales y las caras asociadas. Es decir, aparte de calcular la posible penetración de los nodos asociados en la superficie principal, y, en su caso, aplicar los muelles, podemos realizar el procedimiento inverso, como si redefiniésemos las superficies principal y su asociada, y calcular la penetración de los nodos principales en la superficie asociada, aplicando los muelles convenientes (fig. 4).

Tenemos por tanto un procedimiento perfectamente simétrico respecto a ambas superficies, siendo indiferente la elección de las mismas.

A efectos de cálculo el procedimiento es distinto según si trabajamos con un algoritmo implícito o uno explícito. En el segundo simplemente calculamos en cada

iteración la penetración p , aplicamos al nodo n una fuerza $\vec{F} = k p \vec{n}$ y una fuerza $-\vec{F}$ sobre la cara conveniente, lo que equivale a aplicar unas fuerzas $\vec{F}_A = -\vec{F} N_A (\xi_p, \eta_p)$ sobre los cuatro nodos pertenecientes a dicha cara (fig. 5).

En caso de trabajar con esquemas de integración implícitos es preciso introducir en cada iteración la rigidez del muelle dentro de la matriz de rigidez global. Ello puede conseguirse fácilmente puesto que podemos entender la inclusión del mismo como un elemento de cinco nodos, piramidal (fig. 6).

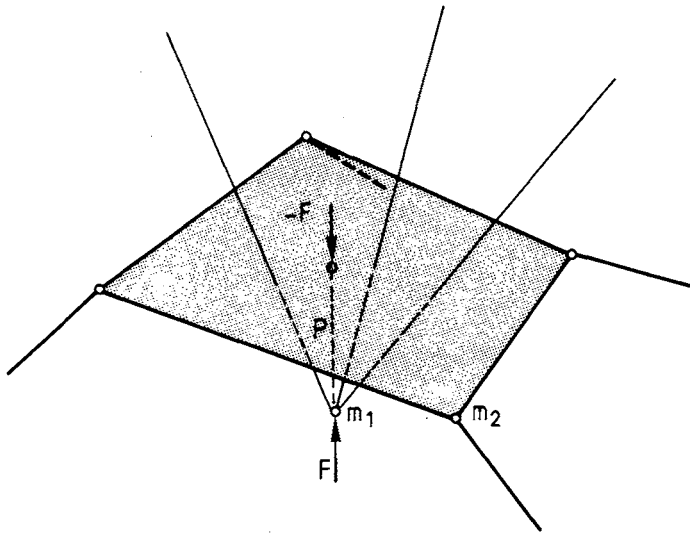


Figura 3. Penetración de un elemento en otro

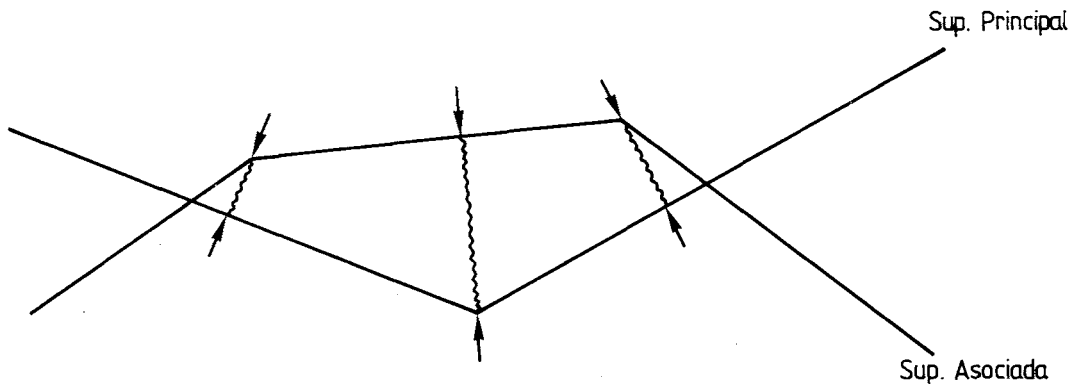


Figura 4. Aplicación de muelles en la superficie principal y en la asociada

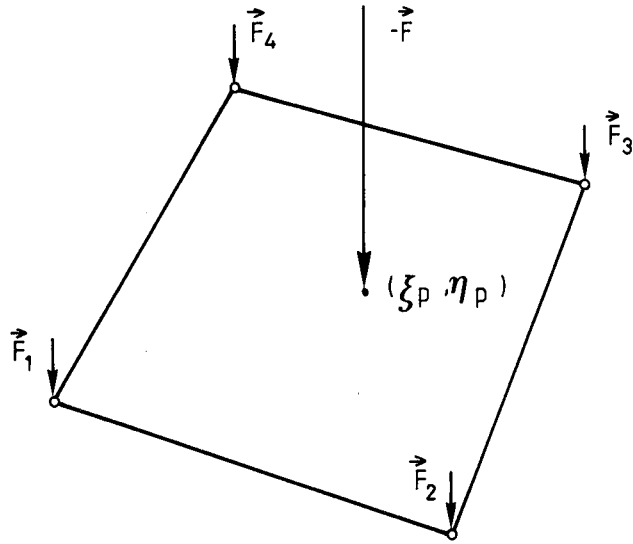


Figura 5. Distribución de fuerzas de contacto

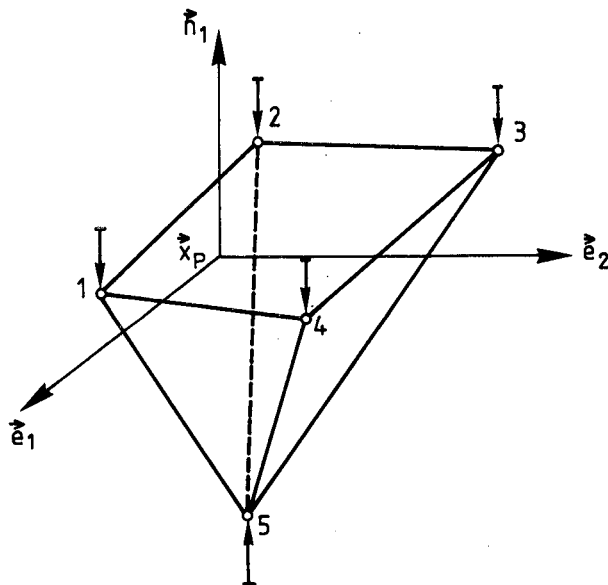


Figura 6. Elemento de cinco nodos piramidal

Suponiendo un sistema de coordenadas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{n}$; llamando a los corrimientos según estos ejes u^1, u^2, u^n ; y numerando los nodos de este hipotético elemento de tal forma que el quinto sea n_e podemos poner:

$$\bar{F}_5 = k p \bar{n}$$

Siendo $p = u_5^n - u^n(p)$

Pero $u^n(p) = u_1^n N_1(\xi_p, \eta_p) + u_2^n N_2(\xi_p, \eta_p) + \dots + u_4^n N_4(\xi_p, \eta_p)$

Por lo que tendremos:

$$p = u_5^n - (u_1^n N_1 + u_2^n N_2 + u_3^n N_3 + u_4^n N_4)$$

Y por tanto:

$$F_5^n = k u_5^n - k u_A^n N_A$$

$$F_A^n = -F_A^n N_A \quad \text{para } A = 1, 2, 3, 4$$

Por lo tanto la matriz de rigidez de este elemento, para el grado de libertad u^n , se expresa:

$$\begin{bmatrix} F_1^n \\ F_2^n \\ F_3^n \\ F_4^n \\ F_5^n \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 & -N_1 \\ N_1 N_2 & N_2 N_2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 & -N_2 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 & N_3 N_4 & -N_3 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4 N_4 & -N_4 \\ -N_1 & -N_2 & -N_3 & -N_4 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ u_4^n \\ u_5^n \end{bmatrix} \quad (4)$$

La anterior matriz, una vez realizado el conveniente cambio de base, puede ensamblarse en la matriz global por el método usual en elementos finitos.

Como vemos este procedimiento es enormemente simple, pero su eficacia depende de un parámetro sumamente crítico, como es la rigidez de los muelles k . Es claro que si $k \Rightarrow \infty$ la penetración tiende a ser nula, y por lo tanto el método exacto. Por ello k debe ser elegida lo mayor posible. Sin embargo tenemos dos fuertes limitaciones, por un lado en esquemas implícitos valores muy elevados de k nos producirán matrices de rigidez mal condicionadas, es decir con términos de orden muy distinto.

No obstante esta limitación, aun siendo importante, no es tan grave como la que aparece en esquemas explícitos, donde la introducción de un muelle en la estructura

general provoca la variación de las frecuencias propias de vibración. Así, si elegimos k excesivamente grande y no modificamos el intervalo de integración podemos convertir el problema en inestable, es decir obtener una nueva frecuencia máxima tal que:

$$w'_{m\acute{a}x} > \frac{2}{\Delta t} \quad (5)$$

Frente a este grave escollo la rigidez propuesta inicialmente por Halquist es:

$$k = \mu \frac{kA^2}{V} \quad (6)$$

Siendo:

A = Area de la cara en cuestión

V = Volumen del elemento al que pertenece la cara anterior

K = Rigidez volumétrica de dicho elemento

Y μ un coeficiente cuyo fin es evitar las inestabilidades en el análisis y para el que Halquist recomienda el valor de 0.1, en base a múltiples pruebas.

La rigidez utilizada por el autor del método es por tanto totalmente empírica. Por el contrario nosotros nos proponemos obtener una expresión de k tal, que siendo lo mayor posible, podamos demostrar analíticamente la estabilidad del sistema.

Determinación de la máxima rigidez estable

Como se ha visto el valor de la frecuencia máxima de una estructura es totalmente desconocido para nosotros, ya que, en realidad, lo que estamos utilizando es una cota del mismo. Por lo tanto es posible tener un cierto margen en los valores de k sin que la frecuencia máxima real supere el límite definido por (5).

Parece claro que para la determinación de este margen, en principio, no podemos utilizar la proposición que empleábamos para acotar la frecuencia máxima de la estructura, según la cual ésta es menor que la máxima de los elementos que la forman. Ello se debe a que el muelle es un elemento que no aporta masa al ensamblaje, por lo que sus frecuencias no pueden definirse (o si se definen toman el valor ∞).

No obstante podemos realizar la siguiente hipótesis: suponer que la masa total del nodo donde aplicamos el muelle ha sido en realidad aportada en parte por el elemento y en parte por el muelle. Es claro que esta hipótesis es falsa, sin embargo no nos varía el resultado final del ensamblaje y nos permite emplear el teorema anterior.

La masa aportada por el muelle la tomaremos como αm , siendo α un coeficiente menor que 1 y m la masa del nodo; mientras que la aportada por el elemento será $(1 - \alpha)m$ (fig. 7).

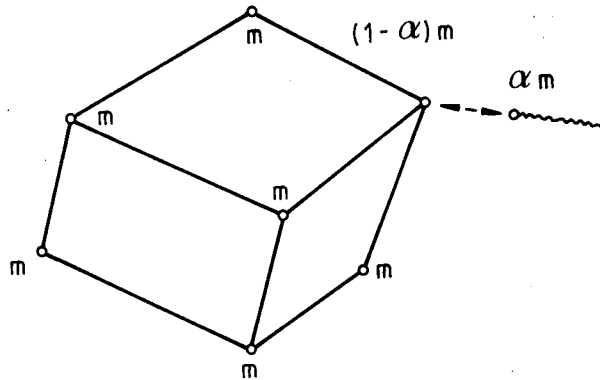


Figura 7. Distribución de la masa entre el nodo y el muelle

Podemos ahora estudiar las frecuencias de ambos cuerpos separadamente. Empezaremos primero con el elemento analizando la variación de los valores propios debida a la hipotética disminución de masa en sus nodos. Puesto que en un mismo elemento podemos tener varios nodos susceptibles de impactar, el caso más desfavorable ocurrirá cuando dicha disminución de masa sea en todos ellos. Tendremos entonces que la nueva matriz de masas será:

$$\mathbf{M}' = (1 - \alpha) \mathbf{M} \quad (7)$$

Y por lo tanto el nuevo problema de autovalores se plantea como:

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = (1 - \alpha) \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} \quad (8)$$

Teniendo entonces que el nuevo autovalor máximo es:

$$\lambda'_{m\acute{a}x} = \frac{\lambda_{m\acute{a}x}}{(1 - \alpha)} \quad (9)$$

Siendo:

$\lambda_{m\acute{a}x}$ = Cuadrado de la frecuencia máxima del elemento con la masa completa.

$\lambda'_{m\acute{a}x}$ = Cuadrado de la frecuencia máxima del elemento con la masa supuesta.

Considerando que la expresión (9) se convierte en acotación cuando al elemento no confluyen muelles en cada nodo, e imponiendo la estabilidad en la forma:

$$w'_{m\acute{a}x} = \frac{W_{m\acute{a}x}}{\sqrt{1 - \alpha}} < W = 2/\Delta t$$

obtenemos el valor de α como:

$$\alpha \leq 1 - (w_{mdx}/W)^2 \quad (10)$$

En el caso más desfavorable de que nuestro elemento fuese el que condiciona el intervalo de integración tendríamos:

$$w_{mdx} = F W$$

y por lo tanto:

$$\alpha = 1 - F^2 \quad (11)$$

En realidad, el valor de α depende del elemento sobre el que trabajemos, sin embargo tomaremos el valor definido por (11) para todos ellos. La razón para actuar así es por un lado la simplicidad y por otro el hecho de ser los elementos cercanos al contacto los más finamente discretizados, por lo que serán usualmente los que limiten el Δt .

Una vez estudiado el elemento procedemos a analizar las frecuencias propias del elemento muelle, cuya matriz de rigidez venía definida por (4). Para simplificar el cálculo posterior veamos primero que el caso más desfavorable se da cuando el nodo incidente impacta sobre uno de los nodos de la cara principal. Para ello planteamos el problema de autovalores clásico:

$$[K] [x] = \lambda [M] [x] \quad (12)$$

Siendo la matriz de masas, en la hipótesis de que las masas de los 4 nodos que forman la cara sean iguales:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix}$$

Obviando las operaciones algebraicas necesarias, es fácil comprobar que los autovalores del sistema anterior son:

$$\lambda_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\lambda_5 = k \left(\frac{1}{m_5} + \frac{N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + N_4^2}{m_1} \right) \quad (13)$$

El máximo valor de λ_5 se tiene para $N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + N_4^2$ máximo, ello ocurre cuando $N_I = 1$ y $N_J = 0 \quad J = I$, es decir cuando el nodo incidente impacta sobre otro nodo.

En virtud de lo anterior podemos suponer que el muelle está compuesto por dos nodos (n_1 y n_2): (fig. 8).

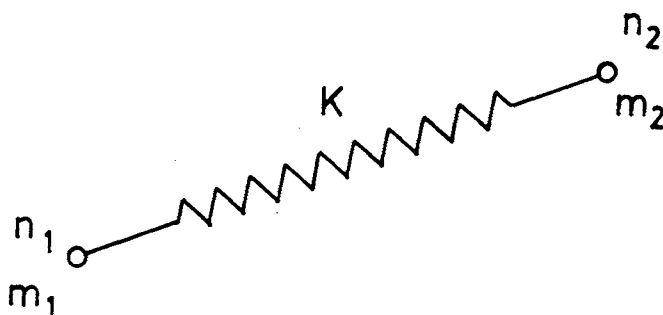


Figura 8. Elemento muelle de dos nodos

por lo que su frecuencia propia será de:

$$\omega_m^2 = k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

Imponiendo la condición de estabilidad tendremos que k queda definida por:

$$k \leq \frac{4}{\Delta t^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} \quad (14)$$

Por último nos queda estudiar los valores que podemos asignar a m_1 y m_2 , para ello recordando el análisis previo sobre los elementos, podemos suponer de forma ficticia una masa de:

$$m_1 = \alpha m(n_1) \quad (15)$$

$$m_2 = \alpha m(n_2)$$

Sin embargo recordemos que el algoritmo de las penalizaciones no sólo introduce muelles entre el nodo asociado y el principal sino también entre el nodo principal y el asociado, por lo tanto, puesto que al elemento ficticiamente sólo podemos quitarle m , tendremos que repartir esta masa entre ambos muelles:

$$m_i = 1/2 \alpha m(n_i) \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

Con estas masas la rigidez queda definida como:

$$k = \frac{2 \alpha}{\Delta t^2 \left(\frac{1}{m(n_1)} + \frac{1}{m(n_2)} \right)} \quad (17)$$

La expresión anterior ha sido utilizada con éxito en el presente estudio tanto para contactos nodo a nodo como nodo-elemento, en este último caso se toma $m(n_2)$ como la masa del nodo más cercano al incidente.

EJEMPLOS

En este apartado, vamos a ilustrar los desarrollos realizados anteriormente con tres ejemplos. El "hardware" utilizado para dicho cometido ha sido un ordenador VAX-750, con terminales VT-101, un plotter Benson y una pantalla gráfica Tektronix 4107 con su correspondiente unidad de hardcopy.

El "software" empleado comprende un programa base, denominado IMPACT-3D, donde se materializan los algoritmos descritos anteriormente. Este programa ha sido desarrollado a partir del código vectorial DYNA-3D, realizado en el Lawrence Livermore National Laboratory por J. O. Halquist⁴⁰, del que se ha conservado su estructura de segmentos, así como, en la medida de lo posible, la entrada de datos. Las modificaciones introducidas son la reescritura en forma escalar de las subrutinas originalmente vectorizadas, la adaptación del software de input-output a disco y la introducción de las mejoras en los algoritmos descritos, mejoras que han permitido decrementos en los tiempos de cálculo muy elevados.

El programa IMPACT-3D utiliza como único canal de salida un conjunto de archivos en formato binario (sin formato) en los cuales se glosan todos los resultados del cómputo. Para la traducción de dichos archivos en gráficas de la historia en el tiempo de tensiones, deformaciones, corrimientos, velocidades, aceleraciones, deformaciones plásticas etc., o en proyecciones del cuerpo deformado tanto en plotter como en pantalla gráfica se ha desarrollado el postprocesador gráfico POST-IMPACT, para el cual se han creado algoritmos de representación tridimensional.

La elección de los ejemplos ha venido determinada por la posibilidad de compararlos con los resultados de otros programas o por el interés intrínseco del problema a resolver. Como se verá posteriormente los tiempos de ejecución son, pese a la optimización y mejoras de los algoritmos, sumamente elevados. Como valor medio puede darse el de 6 milisegundos por iteración y elemento (100 minutos por millón de elementos e iteración). Esta dificultad nos ha imposibilitado la resolución de problemas más complejos pero de mayor interés, los cuales requerirían un tratamiento con ordenador vectorial.

Impacto de una barra discretizada con 972 elementos

Este primer ejemplo, se ha empleado para probar el programa, ya que de él existen numerosos resultados obtenidos con otros programas⁴⁰.

El problema a resolver es el impacto de una barra cilíndrica, 3.2 mm de radio y 32.4 mm de altura, a una velocidad de 227 m/s contra un muro infinitamente rígido. Este problema puede representar el impacto de un proyectil contra un blindaje. Por existir simetría cilíndrica puede discretizarse tan solo un cuarto de la barra, tal como indica la figura 9, con 972 elementos y 1369 nodos. Las características del material son las del cobre:

$$\begin{aligned} E &= 117 \text{ GPa} \\ \nu &= 0.35 \\ \sigma_y &= 0.400 \text{ GPa} \\ E_p &= 0.100 \text{ GPa} \\ \varphi &= 8930 \text{ Kg/m}^3 \end{aligned}$$

Se ha supuesto un modelo elastoplástico con endurecimiento isótropo lineal. Los valores de la viscosidad de hourglass, volumétrica, lineal y volumétrica cuadrática son 0.02, 0.06 y 1.2 respectivamente.

El tiempo de CPU empleado para la resolución, antes de introducir las mejoras en los algoritmos de cálculo, fue de 19 horas, mientras que una vez introducidas dichas mejoras se redujo el tiempo de cálculo a 13.5 horas de CPU.

El número de iteraciones realizadas han sido 7800, para un lapso de tiempo del problema de 80 microsegundos (momento en el cual la velocidad de sólido rígido cambia de signo, iniciándose el despegue), lo que nos da idea de lo reducido de los incrementos de tiempo utilizados.

En las figuras 9 se detalla la geometría inicial del problema y una secuencia de las sucesivas deformadas del sólido en proyección axonométrica.

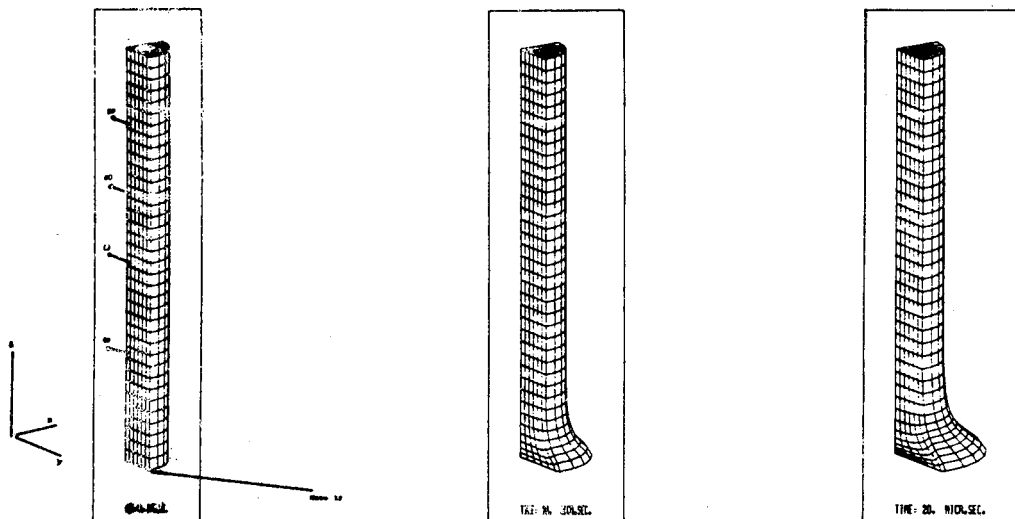


Figura 9. Sucesivas deformaciones del impacto de una barra cilíndrica contra un plano perpendicular a ella.

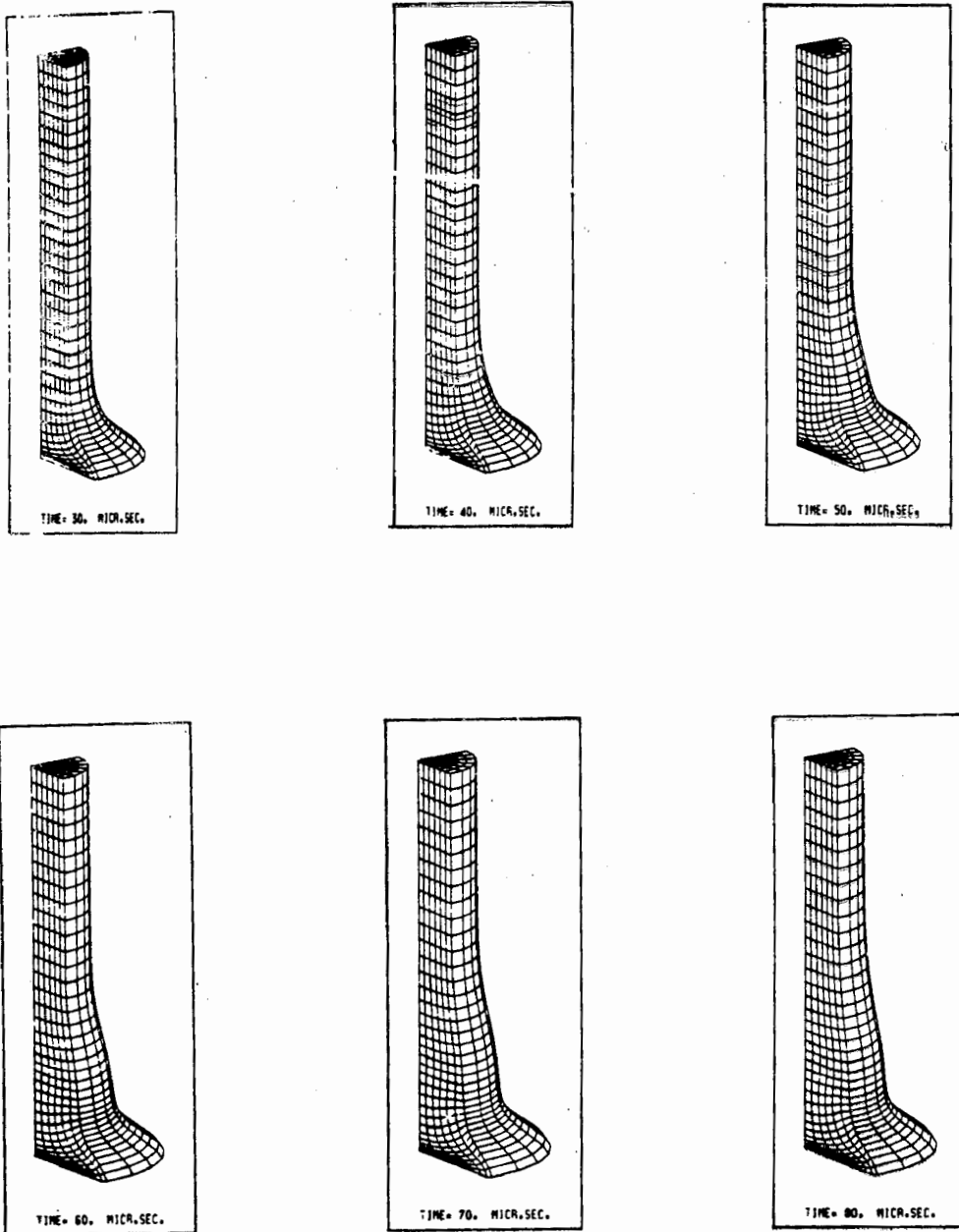


Figura 9. (Continuación) Sucesivas deformaciones del impacto de una barra cilíndrica contra un plano perpendicular a ella.

En la figura 10 se muestran algunas historias en el tiempo de las tensiones, deformaciones plásticas, corrimientos y velocidades.

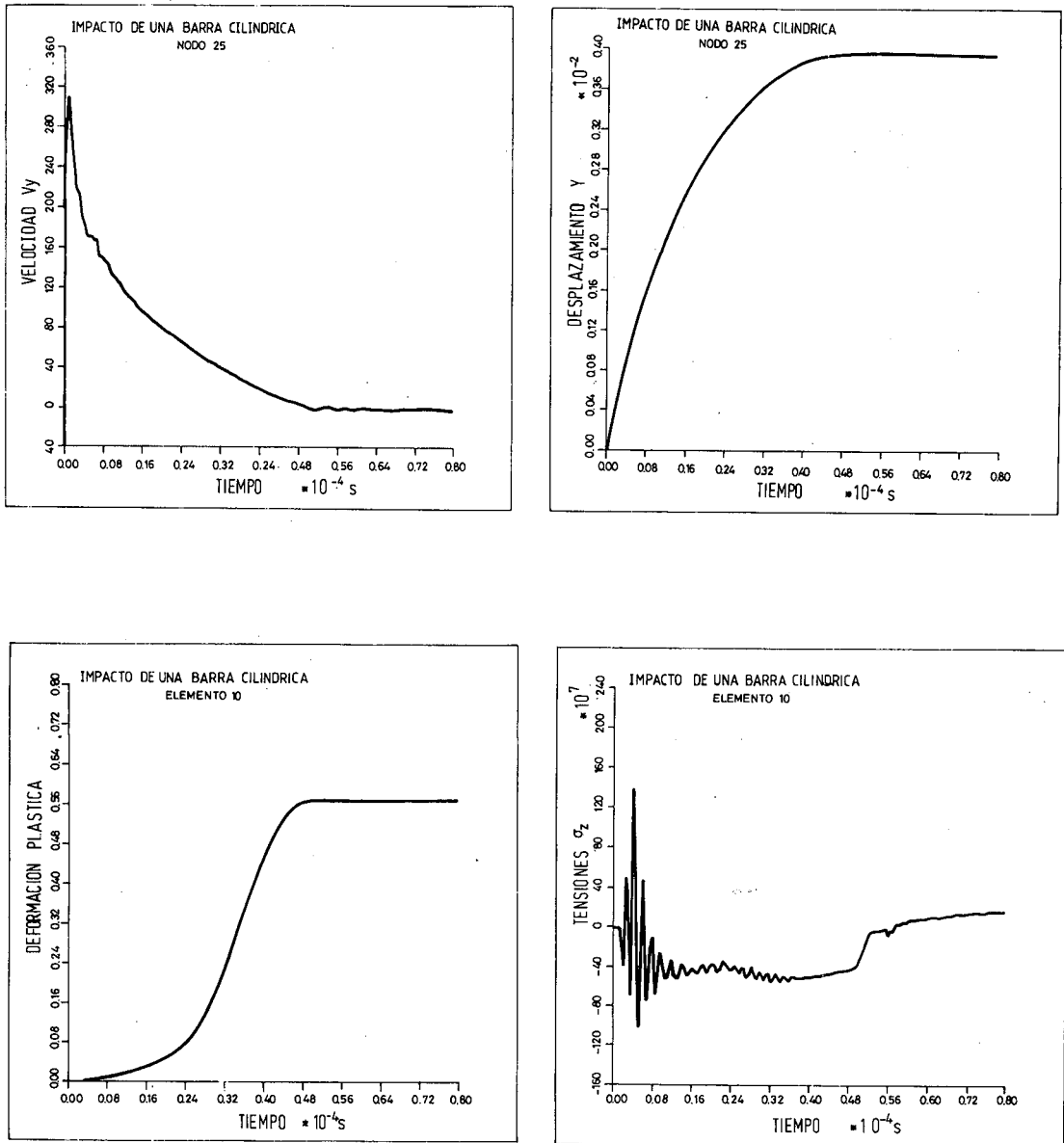


Figura 10. Variación de la velocidad v , desplazamiento y , deformación plástica y tensiones en el impacto de una barra cilíndrica contra un plano perpendicular a ella

Por último, en la figura 11 aparece coloreado el sólido en función de los niveles de deformación plástica equivalente obtenida.

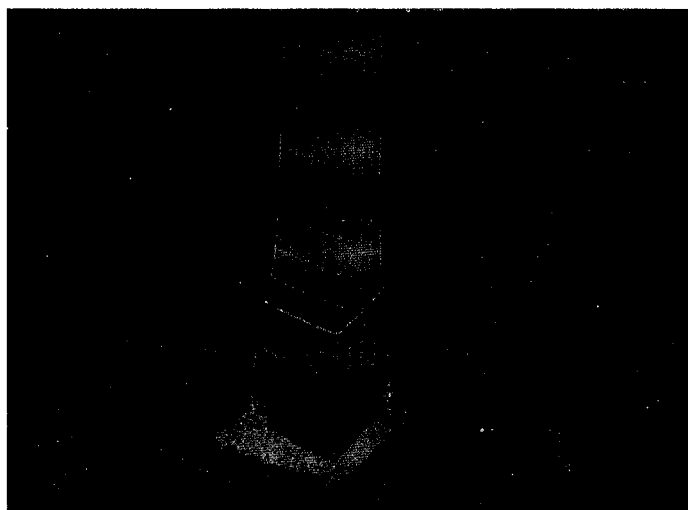


Figura 11. Perspectiva de la deformación de una barra cilíndrica impactando contra un plano perpendicular a ella.

Impacto oblicuo de una varilla

El problema que pretendemos resolver es el impacto contra una pared rígida, inclinada 10 grados respecto a la horizontal, de una varilla de 0.638 cm de diámetro y 30.5 de largo, bajando con una velocidad inicial de 201,7 m/s.

Las características del material son las del aluminio, modelando este como material elastoplástico y con los siguientes módulos:

$$\begin{aligned}
 G &= 26.5 \text{ GPa} \\
 K &= 57.5 \text{ GPa} \\
 \sigma_y &= 0.29 \text{ GPa} \\
 E_p &= .055 \text{ GPa} \\
 \varphi &= 2700 \text{ Kg/m}^3
 \end{aligned}$$

La discretización se ha realizado aprovechando el único plano de simetría existente y utilizando una malla de 3480 elementos y 4818 nodos, tal como indica la figura 12. El tiempo real de problema resuelto fue de unos 2600 microsegundos, precisando su cálculo cerca de 40000 iteraciones y 150 horas de CPU. Las deformadas obtenidas pueden verse en la misma figura 12, mientras que en la figura 13 se detalla el estado de deformaciones plásticas en la varilla en el instante final del cálculo (2600 microsegundos).

El interés de este problema reside en la existencia de ensayos experimentales que permiten verificar la validez de los resultados numéricos (ver⁴⁰). En la figura 14 pueden compararse los perfiles experimental y numérico. Las discrepancias entre ambos pueden estar motivadas por varias razones, entre ellas cabría destacar una discretización excesivamente gruesa; una representación incorrecta de las propiedades del material, la pobre aproximación que representa el tomar como elemento infinitamente rígido lo que en el experimento es una placa de acero y el hecho de que se compara el instante de cálculo correspondiente a los 2400 microsegundos con el resultado experimental final el cual tiene lugar en un tiempo algo superior.

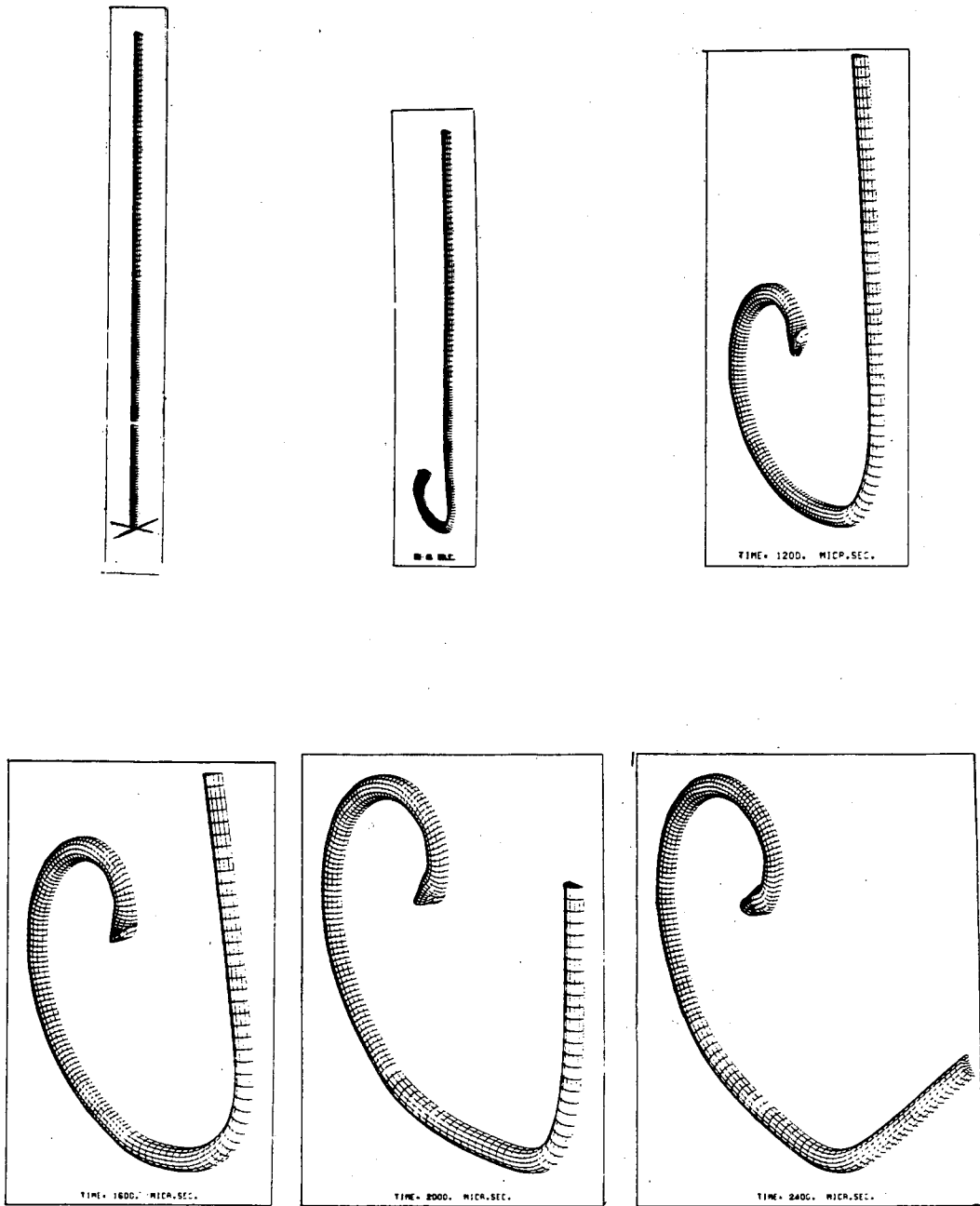


Figura 12. Deformación de una barra cilíndrica chocando contra un plano inclinado 10° con la horizontal (perspectiva).

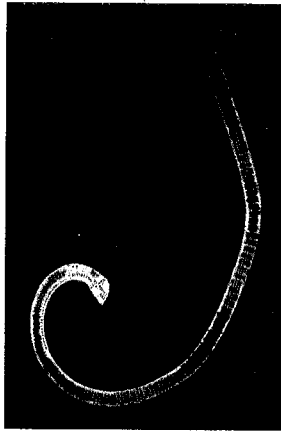


Figura 13. Perspectiva de la deformada a los 2400 microsegundos de una barra cilíndrica impactando contra un plano inclinado 10° con la horizontal.

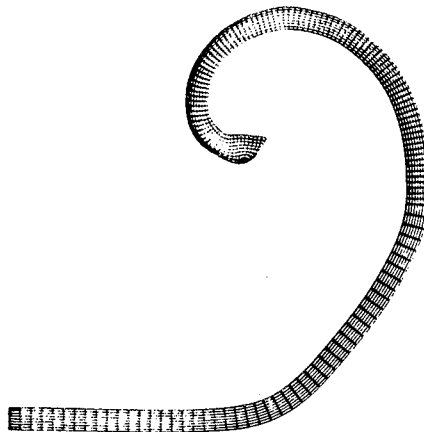
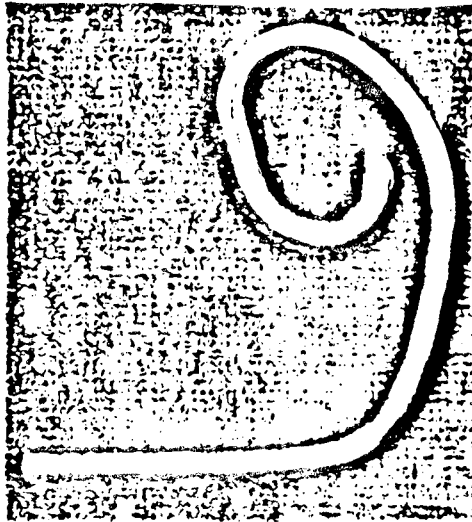


Figura 14 Comparación entre la deformada obtenida y la experimental

Impacto de dos barras semicilíndricas

En este ejemplo se pretende resolver la colisión de dos barras semicilíndricas, cuyas dimensiones son 3.2 mm de radio y 14.4 mm de altura, cuando viajan con los ejes perpendiculares y con velocidades iguales pero opuestas de 50 m/s.

Las características del material son idénticas a las de los ejemplos 1 y 2, pero en este caso se han definido todos los elementos como pertenecientes a un modelo inicialmente elástico. Para la discretización del problema se han utilizado los dos planos de simetría existentes, resultando un total de 432 elementos y 722 nodos tal como indica la figura 15. Las tensiones y la deformación plástica obtenidas en el elemento 1 (fig. 15) se muestran en la figura 16. Por último en la figura 17 se ilustra la geometría y el estado de deformaciones plásticas equivalentes de las barras.

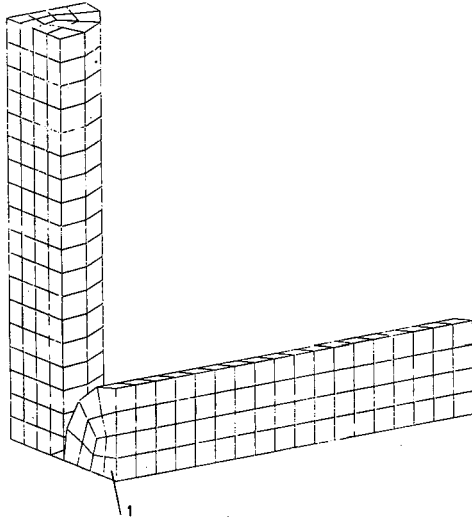


Figura 15. Disposición geométrica y discretización del estado inicial de dos barras chocando perpendicularmente entre sí a una velocidad de 50 m/s.

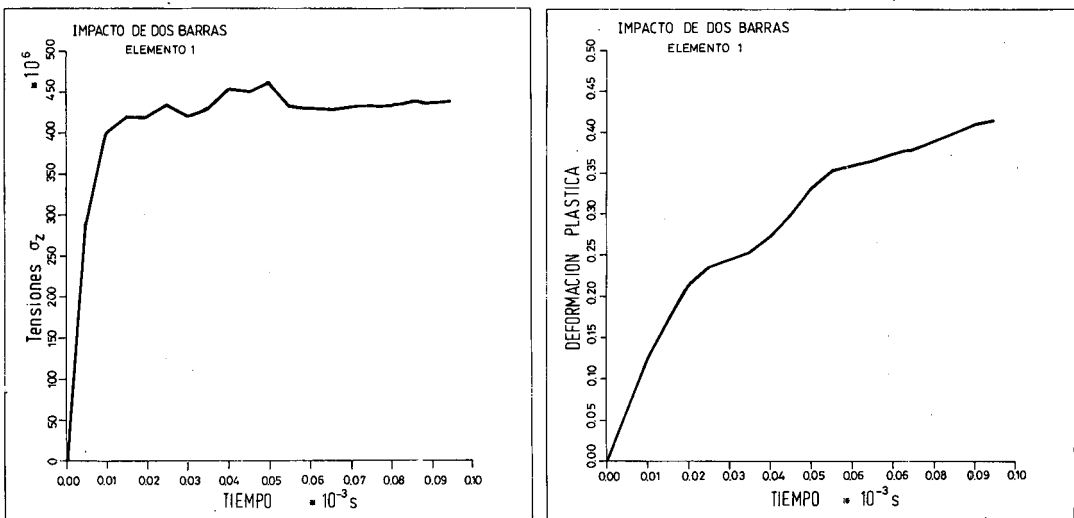


Figura 16. Tensiones y deformación plástica en el punto 1 de dos barras chocando perpendicularmente

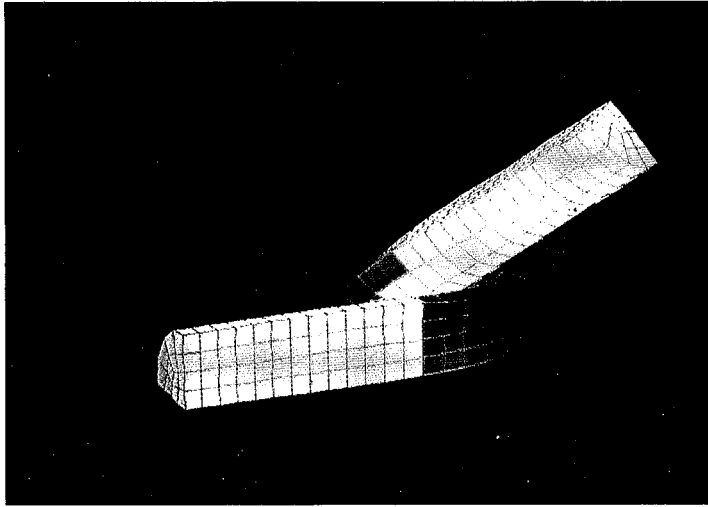


Figura 17. Perspectiva del estado final de dos barras chocando perpendicularmente entre sí

CONCLUSIONES

El trabajo realizado ha estado principalmente encaminado hacia la optimización de los algoritmos existentes a fin de disminuir los tiempos de ejecución. Tal optimización ha requerido en muchos casos una completa reelaboración de dichos algoritmos. En este sentido podemos decir que merced al nuevo esquema utilizado para la determinación de los incrementos de tiempo de integración se ha conseguido una reducción del 20 % en el tiempo de CPU. Asimismo la definición del material denominado “inicialmente elástico”, junto con el empleo de las coordenadas intrínsecas (ξ^α) para la integración de las fuerzas internas resistentes en modelos elásticos de primer orden, pueden suponer reducciones de incluso un 30 %. Las modificaciones introducidas en el algoritmo de las penalizaciones no suponen ningún decremento en los tiempos de cálculo, si bien, mejoran la definición de las zonas de contacto entre sólidos.

Junto con técnicas depuradas de programación, si se quiere resolver problemas de cierta complejidad, es necesario emplear ordenadores de gran potencia y velocidad de cálculo. Actualmente estas aplicaciones se están realizando con los modernos superordenadores de proceso vectorial (CRAY, CYBER-205...). En realidad el programa original que utilizamos para desarrollar IMPACT-3D estaba preparado para su funcionamiento en el sistema vectorial CRAY-I, requiriendo su adaptación al ordenador VAX-750 la reelaboración escalar de aquellos segmentos que presentaban una estructura vectorial.

Quisiéramos por último comentar las posibles futuras líneas de investigación que quedan abiertas sobre esta temática. Primeramente, como punto más urgente, es deseable la incorporación de elementos laminares en el programa. Ello viene motivado por la frecuente aparición de láminas en los problemas de impacto, láminas cuya discretización mediante elementos tridimensionales es excesivamente costosa. Tales elementos deberían ser cuidadosamente analizados con el fin de obtener un elemento rápido de integración y eficaz en problemas de impacto. Nuestra sugerencia es seguir el camino iniciado por el elemento de W. Kanokukulchai (ver¹²) pero incorporándole el empleo

de las coordenadas intrínsecas. Otro de los temas abiertos es la incorporación de nuevas ecuaciones constitutivas capaces de representar diversos materiales de interés como pueden ser explosivos, suelos, gases..., así como introducir las condiciones de rotura en tales modelos.

REFERENCIAS

1. J. Miquel Canet y J. Bonet Carbonell, "Estudio de estructuras sometidas a esfuerzos de impacto en régimen elastoplástico y con grandes deformaciones por el método de los elementos finitos. Parte I: Formulación teórica". *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. Vol. 3, núm. 2, (1987).
1. M. L. Wilkins, "Calculation of Elastic-Plastic Flow", *Methods in Computational Physics*, Vol. 3, (1964).
2. G. Maenchen, S. Sack, "The Tensor Code", *Methods in Computational Physics*, (1964).
3. W. F. Noh, "Numerical Methods in Hidrodinamic Calculations", *Report UCRL-52112*, Lawrence Livermore Laboratory, Berkeley, (1976).
4. C. J. Constantino, "Stress Waves in Layered Arbitrary Media", ITT Research Institute, *Report SAMSO TR-68-181*, Chicago, (1968).
5. J. T. Oden, "A General Theory of Finite Elements", *I. J. N. M. E.*, (1969).
6. S. W. Key, "Hondo-A Finite Elements Computer Program for the Large Deformation Dynamic Response of Axisimetric Solids", Sandia National Laboratory, Albuquerque, *Rep.* 74-0039.
7. I. Farhooman and E. L. Wilson, "A Non-Linear Finite Element Code for Analyzing the Blast Response of Underground Structures", U.S. Army Waterways Experiment Station, *Rep.* N-70-1.
8. T. Belytschko, R. L. Chiapetta and H. D. Bartel, "Efficient Large Scale Nonlinear Analysis by Finit Elements", *I. J. N. M. E.* Vol. 10, (1976).
9. T. Belytschko and R. Mullen, "Explicit Integration of Structural Problems", en "*Finite Elements in Nonlinear Mechanics*", editado por P. G. Bergan, Tapir, (1978).
10. T. J. Hughés, J. L. Sackman and R. L. Taylor, "Finite Element Formulation and Solution of Contact-Impact Problems in Continium Mechanics", University of California, Department of Civil Engineering, *Rep.* UC SESM 74-8.
11. T. J. Hughes, J. L. Sackman and R. L. Taylor, "Finite Element Formulation and Solution of Contact-Impact Problems in Continium Mechanics II, III y IV", University of California, Department of Civil Engineering, *Rep.* UC SESM 75-3, 75-7 y 76-4.
12. T. J. Hughes, J. L. Sackman, R. L. Taylor, A. Cournier and W. Kanoknukulchai, "Contact-Impact Problems", University of California, Department of Civil Engineering, *Rep.* SESM 78-4.
13. J. O. Halquist, "A procedure for the Solution of Finite-Deformation Contact-Impact Problems by Finit Element Method", Lawrence Livermore Laboratory, *Rep.* UCRL-52066, (1976).
14. J. O. Halquist, "A Numerical Treatment of Sliding Interfaces and Impact", en K. C. Park y D.K. Garling (Eds.) "*Computational Technics for Interface Problems*", AMD. Vol. 30, ASME New-York, (1978).
15. J. O. Halquist, "A Numerical Procedure for Three Dimensional Impact Problems", *ASCE preprint* 2956, (1977).
16. J. O. Halquist, "*Theoretical Manual for DYNA-3D*", Lawrence Livermore Laboratory, (1982).
17. L. E. Malvern, "*Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*", Prentice-Hall, (1969).
18. Y. C. Fung, "*Foundations of Solids Mechanics*", Prentice-Hall, (1965).
19. C. Truesdell and R. Toupin, "The Clasical Field Theories of Mechanics", *Encyclopedia of Physics* Vol. 3/3, Springer-Verlag, Berlin, (1965).
20. J. M. Massaguer y A. Falques, "*Curso de Mecánica de Medios Continuos*", Vol. 1, Esc. Tec. Sup. de Ing. de Caminos Canales y Puertos, U. P. B.
21. A. C. Eringen and E. S. Suhubi, "*Elastodynamics*", Vol. 1, Academic Press, New York, (1974).
22. Nilsson, "*Impact loading on Concrete Structures*", publicación 79-1, Dep. of Structural Mechanics, of Technology, (1979).
23. O. C. Zienkiewicz, "*The Finite Element Method in Engineering Science*", McGraw-Hill, London, (1977).

24. J. T. Oden, "*Finite Elements of Non linear Continua*", McGraw-Hill, (1968).
25. R. T. Walsh, "*Dynamic Response of Materials to Intense Impulsive Loading*", Air Force Materials Laboratory, (1972).
26. K. J. Bathe, E. L. Wilson, "*Numerical Methods in Finite Element Analysis*", Prentice-Hall, New Jersey, (1976).
27. B. Iron, S. Ahmad, "*Technics of Finite Elements*", Ellis Horwood, (1980).
28. K. J. Bathe, H. Ozdemir y E. L. Wilson, "Estatic and Dynamic Geometric and Material Nonlinear Analisis", University of California, Dep. of Civil Engineering, *Rep. UCSESM 74.4*.
29. J. H. Heifitz y C. J. Constantino, "Dynamic Response of Nonlinear Media at Large Strains", *ASCE, J. M. D. Vol. 98*, (1972).
30. E. H. Lee, "Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains", Transactions of the ASME, *Journal of Applied Mechanics*, Marzo (1968).
31. E. Hinton, D. R. J. Owen, "*Finite Elements in Plasticity*", Pineridge Press, Swansea.
32. H. D. Hibbit, P. V. Marcal y J. R. Rice, "Finite Element Formulation for Problems of Large Strain and Large Displacements", *Int. Jour. Solids Structures*, Vol. **6**, (1970).
33. A. G. Petschek y M. E. Hanson, "Difference Equations for Two Dimensional Flow", *J. Comp. Phy.* (1968).
34. M. L. Wilkins et al., "A Method for Computer Simulation of Problems in Solid Mechanic and Gas Dynamics in Three Dimensions", University of California, Law. Liv. Lab., *Rep. UCRL-51574* (1975).
35. D. Koslov y G. A. Frazier, "Treatment of Hourglass Patterns in Low Order Finite Element Codes", *Int. J. Num. and Analytical Meth. in Geomechanics*, (1978).
36. D. P. Fanagan y T. Belytschko, "A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control", *I. J. N. M. E. Vol. 17*, (1981).
37. F. B. Hildebrand, "*Finite-Difference Equations and Simulations*", Prentice Hall, (1968).
38. J. Von Neumann y R. D. Richtmyer, "A method for the Numeric Calculation of Hydrodynamic Shocks", *J. Appl. Phys.* (1950).
39. W. F. Noh, "Numerical Methods in Hydrodynamic Calculations", University of California, LLNL, *Rep. UCRL-52112*.
40. J. O. Halquist, "User Manual for DYNA-3D and DYNAP", LLNL *Rep. UCID-19156*, (1981).