

O método dos elementos finitos aplicado à flambagem lateral com torção

Ricardo Hallal Fakury e Ana Lydia Reis de Castro e Silva

Departamento de Engenharia de Estruturas
Universidade Federal de Minas Gerais
30110-060, Belo Horizonte, MG, Brasil
Tel.: 55-31-238 10 28, Fax: 55-31-238 19 73
e-mail: fakury@dees.ufmg.br, e-mail: lydia@dees.ufmg.br

Sumário

Neste trabalho é apresentado um procedimento numérico, baseado no método dos elementos finitos, para determinação do momento crítico elástico, relacionado ao estado limite último de flambagem lateral com torção. É mostrada a importância do valor deste momento para o dimensionamento das vigas de aço. O procedimento é bastante geral, e permite analisar vigas com qualquer seção transversal, os mais diversos carregamentos, incluindo a presença de ações estabilizantes e desestabilizantes, condições de contorno variadas, e também vigas com variações abruptas de seção transversal. Diversos casos são analisados e os resultados são comparados com os propostos pela especificação europeia ENV 1993-1-1 e com os obtidos na literatura especializada.

THE FINITE ELEMENT METHOD APPLIED TO LATERAL TORSIONAL BUCKLING OF STEEL BEAMS

Summary

This paper presents a numerical procedure, based on the finite element method, to obtain accurate results for the elastic critical moment for lateral torsional buckling of steel beams. The importance of the value of this moment for the design of these beams is shown. The procedure allows to analyze beams with any cross section, the most different cases of applied loads along the laterally unbraced length, including stabilizing and non-stabilizing loads, and boundary conditions, and also discontinuities in the cross section. Several cases are analyzed and the results are compared with the proposed by European Prestandard ENV 1993-1-1 and with related literature.

INTRODUÇÃO

Quando uma viga perfeitamente reta encontra-se submetida a ações situadas no seu plano de maior rigidez, um deslocamento lateral e uma rotação ocorrerão quando estas ações atingirem seu valor crítico. Tal valor corresponde ao ponto de bifurcação do equilíbrio, quando os deslocamentos no plano de flexão deixam de representar a configuração estável da viga. O fenômeno é um estado limite último denominado flambagem lateral com torção.

Com certa liberalidade, a flambagem lateral com torção tem sido tratada na prática incluindo não somente o problema da bifurcação do equilíbrio, mas também o problema mais geral de carga-deslocamento, incorporando os efeitos das imperfeições geométricas. Estas imperfeições envolvem as excentricidades dos pontos de aplicação das ações em relação ao plano de maior rigidez da viga, a curvatura perpendicular ao plano de flexão e a rotação que a barra pode apresentar antes de submetida ao carregamento.

Os principais fatores que influem na resistência de uma viga à flambagem lateral com torção são:

- a forma da seção transversal;
- o comprimento destravado, ou seja, a distância entre duas seções transversais contidas lateralmente (havendo contenção lateral apenas nas extremidades da viga, o comprimento destravado é igual ao vão) ;
- as condições de contorno das seções contidas lateralmente;
- a variação do diagrama de momento fletor;
- a posição das cargas atuantes em relação ao nível do centro de torção da seção transversal (se as cargas atuarem em nível diferente do nível do centro de torção, elas podem levar a um agravamento ou a uma suavização do fenômeno, sendo chamadas de desestabilizantes e estabilizantes, respectivamente);
- a variação da seção transversal da viga devido à existência de lamelas, recortes nas mesas, aberturas na alma, etc;
- as tensões residuais;
- as imperfeições geométricas.

Ao se projetar uma viga de aço, sua resistência nominal à flambagem lateral com torção precisa ser determinada. O ENV 1993-1-1¹, a exemplo de outras especificações para projeto de estruturas de aço, como a especificação americana do AISC² e a canadense CSA³, fornece esta resistência, em regimes elástico e inelástico, em função do momento crítico elástico, M_{cr} e, ainda, equações e tabelas que permitem obter este momento crítico elástico para muitas situações usuais de carregamento e condições de contorno. Considerando a sua importância, diversos pesquisadores^{4,5,6,7} também têm fornecido valores de M_{cr} , com base em análises numéricas ou ensaios.

Neste trabalho, apresenta-se um procedimento numérico, baseado no método dos elementos finitos aplicado ao elemento de barra, para determinação do momento crítico elástico levando-se em conta todos os fatores anteriormente citados, com exceção das imperfeições geométricas e das tensões residuais, que não influem no comportamento da viga em regime elástico. Embora o procedimento possa ser usado para qualquer tipo de seção transversal, somente serão tratadas as seções em forma de I, simétricas em relação ao eixo situado no plano médio da alma. A flambagem local dos elementos componentes da seção transversal não é prevista.

Diversos casos são analisados e os resultados obtidos são comparados, quando possível, com valores fornecidos pelo ENV 1993-1-1¹ e por vários pesquisadores.

O MÉTODO DE PROJETO DO ENV 1993-1-1

O ENV 1993-1-1¹ estabelece que a resistência nominal à flambagem lateral com torção é igual a

$$M_n = \chi_{LT} M_{pl} \quad (1)$$

onde M_{pl} é o momento de plastificação da seção transversal da viga e χ_{LT} é um fator de redução dado por

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq 1 \quad (2)$$

com

$$\phi_{LT} = 0,5[1 + \sigma_{LT}(\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2] \quad (3)$$

χ_{LT} é um fator de imperfeição, utilizado para que sejam levadas em conta as imperfeições geométricas e as tensões residuais (às vezes referidas como imperfeição de material), sempre presentes na prática, e que tendem a reduzir a resistência nominal das vigas (ECCS⁸). Com base em resultados de ensaios e em análises numéricas, λ_{LT} é tomado igual a 0,21 para perfis laminados e 0,49 para perfis soldados.

λ_{LT} é um parâmetro de esbeltez que tem o seguinte valor

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{M_{pl}}{M_{cr}}} \quad (4)$$

onde M_{cr} é o momento crítico elástico para flambagem lateral com torção. O ENV 1993-1-1¹ fornece valores deste momento, mas apenas para algumas situações específicas de carregamento e condições de contorno, e para barras com inércia constante.

A Figura 1 ilustra os valores da resistência nominal à flambagem lateral com torção, M_n , em função do parâmetro de esbeltez λ_{LT} .

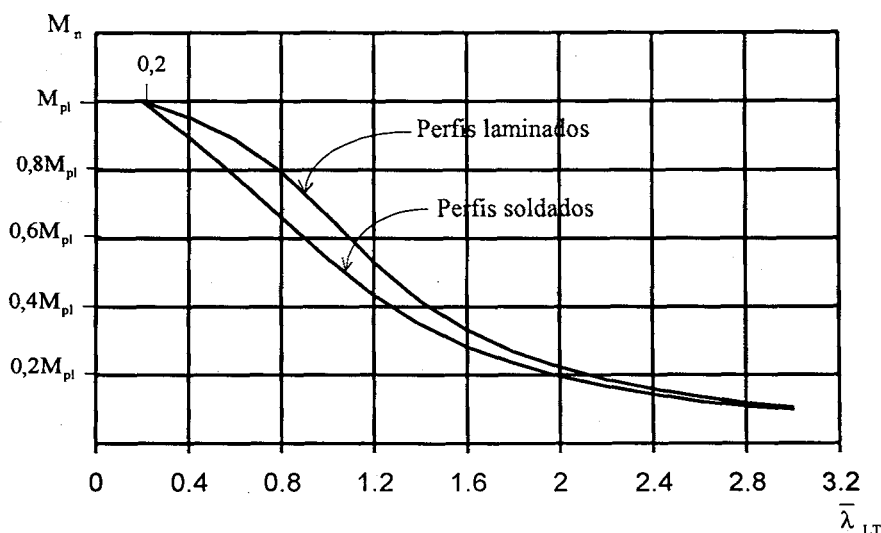


Figura 1. Resistência nominal M_n em função do parâmetro de esbeltez λ_{LT}

Conhecendo-se portanto o valor do momento crítico elástico, M_{cr} , torna-se imediata a obtenção da resistência nominal das vigas de aço à flambagem lateral com torção, em regimes elástico e inelástico, levando-se em conta fatores importantes que influem no seu comportamento real, como as imperfeições geométricas e as tensões residuais.

DETERMINAÇÃO DO MOMENTO CRÍTICO ELÁSTICO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Fundamentos

Quando uma viga perfeitamente reta flete em relação ao eixo de maior inércia (eixo x), a instabilidade fica caracterizada por uma translação μ do centro de torção na direção perpendicular ao plano de flexão (plano yz), e por uma rotação ϕ em torno do eixo longitudinal z (Figura 2).

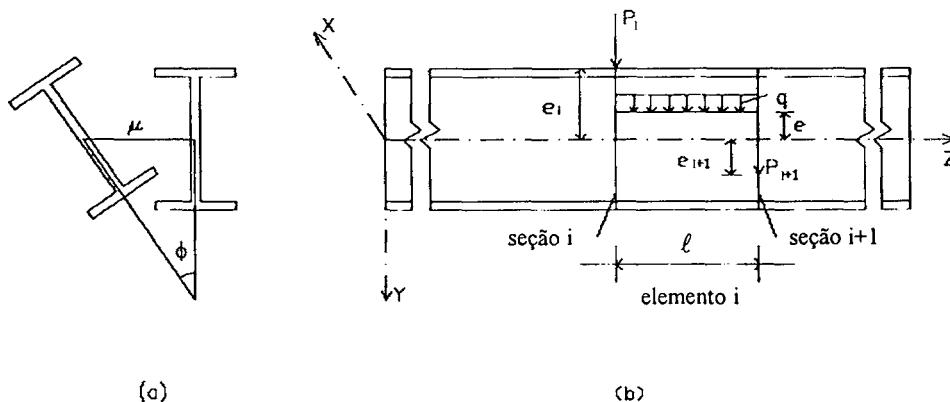


Figura 2. Subdivisão da viga em elementos

O emprego do método dos elementos finitos para determinação do momento crítico elástico tem como premissa básica a subdivisão da viga, ao longo do vão, em um conjunto de n elementos, de comprimentos iguais ou não, separados entre si obrigatoriamente em seções onde ocorre variação abrupta de inércia e em seções em que atua uma carga concentrada, e em outras seções escolhidas aleatoriamente. Desta forma, pode-se estabelecer que em um elemento genérico i de comprimento l , situado entre as seções i e $i+1$ (Figura 2b), a energia potencial total é dada por

$$\begin{aligned} \Pi_i = & \frac{1}{2} \int_0^l [El_y \mu''^2 + EC_w \phi''^2 + Gl_t \phi'^2 + 2M_x (k_y - y_D) \phi'^2 + 2M_x \mu'' \phi - q y_e \phi^2] dz + \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{i+1} P_k e_k \phi_k^2 \end{aligned} \quad (5)$$

onde M_x é o momento fletor em relação ao eixo x , q a carga uniformemente distribuída no elemento e y_e sua coordenada na direção y em relação ao centro de torção, P_i e P_{i+1} são cargas concentradas nas seções extremas do elemento i , e_i e e_{i+1} suas coordenadas na direção do eixo y e ϕ_i e ϕ_{i+1} suas rotações (Figura 2b). As propriedades geométricas I_y , C_w e I_t são, respectivamente, o momento de inércia em relação ao eixo y , a constante de empenamento e o momento de inércia à torção da seção transversal do elemento, e k_y e y_D são as coordenadas do ponto de Kindem e do centro de torção, respectivamente, na direção

do eixo y . As grandezas E e G são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal do aço. O momento fletor M_x é uma função de z e é definido pela seguinte expressão

$$M_x = M_{xi} + V_i z - q \frac{z^2}{2} \quad (6)$$

onde M_{xi} e V_i são, respectivamente, o momento fletor em relação ao eixo x e a força cortante na extremidade i do elemento.

São adotados os seguintes polinômios do terceiro grau em z como funções aproximadoras para os deslocamentos μ e ϕ

$$\mu = \left[\frac{(\mu'_i + \mu'_{i+1})}{l^2} - \frac{2(\mu_{i+1} - \mu_i)}{l^3} \right] z^3 + \left[\frac{3(\mu_{i+1} - \mu_i)}{l^2} - \frac{2(\mu'_i + \mu'_{i+1})}{l} \right] z^2 + \mu'_i z + \mu_i \quad (7)$$

$$\phi = \left[\frac{(\phi'_i + \phi'_{i+1})}{l^2} - \frac{2(\phi_{i+1} - \phi_i)}{l^3} \right] z^3 + \left[\frac{3(\phi_{i+1} - \phi_i)}{l^2} - \frac{2(\phi'_i + \phi'_{i+1})}{l} \right] z^2 + \phi'_i z + \phi_i \quad (8)$$

Desta forma, os parâmetros que definem a configuração deformada são a translação do centro de torção na direção perpendicular ao plano de flexão nas duas extremidades do elemento i (μ_i e μ_{i+1}), a rotação da seção também nas duas extremidades do elemento i (ϕ_i e ϕ_{i+1}), e suas respectivas derivadas de primeira ordem. Estabelecendo-se condições de contorno adequadas para estes parâmetros, obtêm-se equações que definem μ_i e ϕ em função de z e, conseqüentemente, equações que definem suas derivadas de primeira e segunda ordens. Estas equações são levadas à equação (5), chegando-se assim à expressão final da energia potencial total no elemento i .

A energia potencial total da barra é dada pelo somatório das energias potenciais totais dos n elementos componentes, ou seja

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i \quad (9)$$

Assim, a energia passa a ser uma função quadrática dos parâmetros μ_j , μ'_j , ϕ_j , ϕ'_j com $j = 1, 2, \dots, n+1$, referentes às seções transversais que delimitam os n elementos. Quando o carregamento atinge seu valor crítico, a energia é estacionária, e pode-se estabelecer que

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mu_j} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mu'_j} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \phi_j} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \phi'_j} = 0 \quad (13)$$

Constitui-se desta forma um sistema de $4(n+1)$ equações lineares e homogêneas nos parâmetros citados, e o carregamento que conduz ao valor nulo do determinante da matriz dos coeficientes é aquele que causa a flambagem lateral com torção da viga. Trata-se de um problema de auto-valor caracterizado pela indeterminação dos parâmetros que definem a posição deslocada da barra.

Montagem da matriz dos coeficientes

A matriz dos coeficientes de um elemento i é simétrica, de tamanho 8×8 . As quatro primeiras linhas correspondem às equações (10) a (13) aplicadas à extremidade i do elemento e as quatro últimas linhas correspondem a estas mesmas equações aplicadas à extremidade $i + 1$. Cada coluna contém os coeficientes de um mesmo parâmetro.

Para a montagem da matriz da viga, é feita uma superposição das matrizes dos n elementos componentes, de maneira que os nós correspondentes às seções intermediárias se compatibilizem (Figura 3). A matriz formada tem tamanho $4(n + 1) \times 4(n + 1)$, e todos os integrantes que não se originam das matrizes dos elementos são nulos.

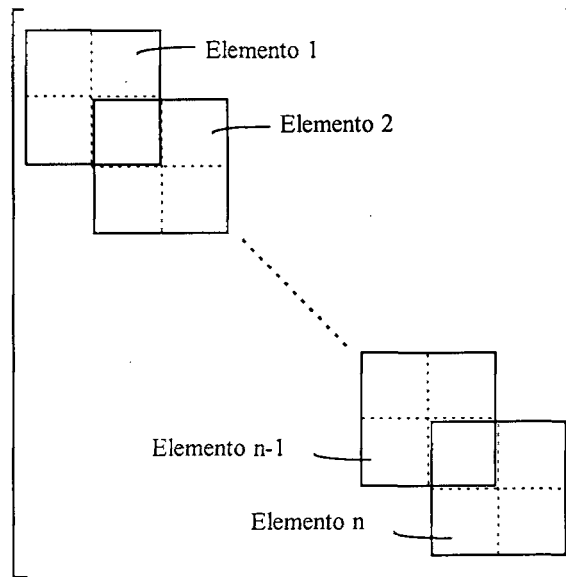


Figura 3. Montagem da matriz da viga

Automatização

O procedimento apresentado foi estruturado em linguagem computacional, de modo a necessitar como dados de entrada das dimensões da seção transversal, do vão da viga, da posição e do tipo dos apoios no plano de flexão, da posição das seções contidas lateralmente e das condições de contorno dessas seções (os parâmetros μ , μ' , ϕ e ϕ' , podem ser ou não nulos), da posição e da geometria relacionadas às descontinuidades, da intensidade relativa entre as cargas transversais e momentos aplicados (a menor força ou momento fica com valor unitário), e das localizações destas ações ao longo do vão da viga e em relação ao nível do centro de torção da seção transversal.

O programa determina as propriedades geométricas das seções transversais dos n elementos. Possui um processo iterativo em que as ações são continuamente majoradas, os esforços solicitantes nas extremidades de cada elemento são determinados, a matriz dos coeficientes da viga é montada a partir das matrizes dos elementos componentes, e o determinante desta matriz é calculado. O processo se encerra quando este determinante se anula, indicando que foi atingido o carregamento crítico e, conseqüentemente o momento crítico elástico.

Para reduzir a quantidade de memória alocada, optou-se por armazenar a matriz dos coeficientes em banda, reduzindo-se seu tamanho de $4(n + 1) \times 4(n + 1)$ para $4(n + 1) \times 8$. É aplicada uma rotina de fatoração baseada em Gere e Weaver⁹, que utiliza o processo de

Cholesky modificado. O valor do determinante é fornecido pela multiplicação dos integrantes da primeira coluna da matriz em banda fatorada.

O programa fornece o valor do carregamento crítico, na forma de um multiplicador para as ações aplicadas, o momento crítico M_{cr} e ainda um coeficiente de momento equivalente C_{bs} dado pela relação

$$C_{bs} = \frac{M_{cr}}{M_{0cr}} \quad (14)$$

onde M_{0cr} é o momento fletor que provoca a flambagem lateral com torção para uma situação de flexão pura, com as extremidades do comprimento destravado impedidas contra translação lateral e rotação, mas livres para fletir lateralmente e empenar. Nas vigas com inércia variável, M_{0cr} relaciona-se à seção transversal de maior rigidez no plano de flexão. De acordo com Timoshenko e Gere¹⁰, tem-se

$$M_{0cr} = \frac{\pi}{L_b} \sqrt{EI_y GI_t + \left(\frac{\pi E}{L_b}\right)^2 I_y C_w} \quad (15)$$

onde L_b é o comprimento destravado.

RESULTADOS

Vigas de seção I duplamente simétrica com inércia constante

Usando o procedimento apresentado, os valores do coeficiente C_{bs} foram determinados para os casos de carregamento e condições de contorno no plano de flexão mostrados na Tabela I.

Os casos 1 a 9 foram subdivididos nas alternativas S e R, onde a alternativa S refere-se à situação em que as extremidades do comprimento destravado estão impedidas contra translação lateral e rotação, mas livres para fletir lateralmente e empenar, e a alternativa R à situação em que todos estes deslocamentos estão impedidos. Para as vigas em balanço (casos 10 a 12), a extremidade engastada tem condições de contorno correspondentes à alternativa R e a extremidade livre encontra-se sem qualquer tipo de restrição. Para o carregamento aplicado respectivamente no nível do centro de torção da seção transversal, na face externa da mesa superior e na face externa da mesa inferior, os valores de C_{bs} são mostrados graficamente nas Figuras 4, 5 e 6 em função da grandeza $(\pi^2 EC_w / LGI_t)$.

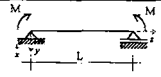
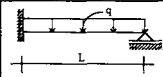
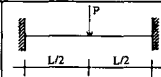
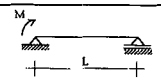
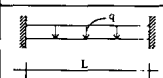

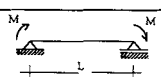
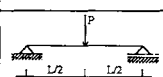

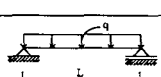
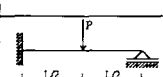
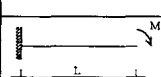
01		05		09	
02		06		10	
03		07		11	
04		08		12	

Tabela I. Casos considerados

O ENV 1993-1-1¹ fornece valores do momento crítico elástico para os casos 01, 02, 03, 04, 06, 07 e 09 da Tabela I, para as condições de contorno correspondentes às alternativas S e R (para os casos 04, 06, 07 e 09, são fornecidos valores para carregamento aplicado também em nível não coincidente com o do centro de torção). Trahair e Bradford¹¹ apresentam valores do momento para as vigas em balanço, casos 10 a 12 da Tabela I, sendo que para os casos 10 e 11, as cargas podem atuar também em nível não coincidente com o centro de torção. Os resultados são praticamente coincidentes com os valores de M_{cr} obtidos por meio do processo proposto neste trabalho e mostrados nas Figuras 4 a 6, por meio de C_{bs} .

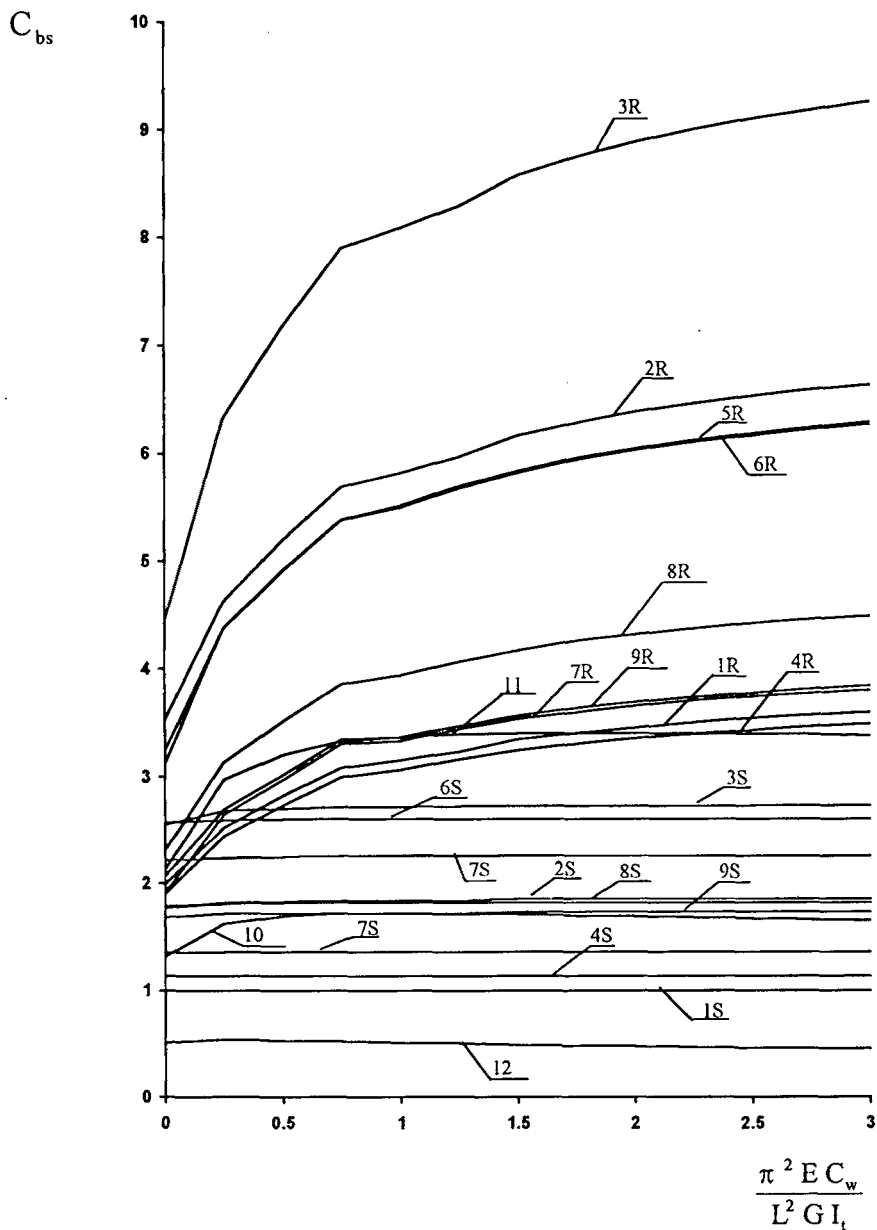


Figura 4. C_{bs} para carregamento aplicado no nível do centro de torção

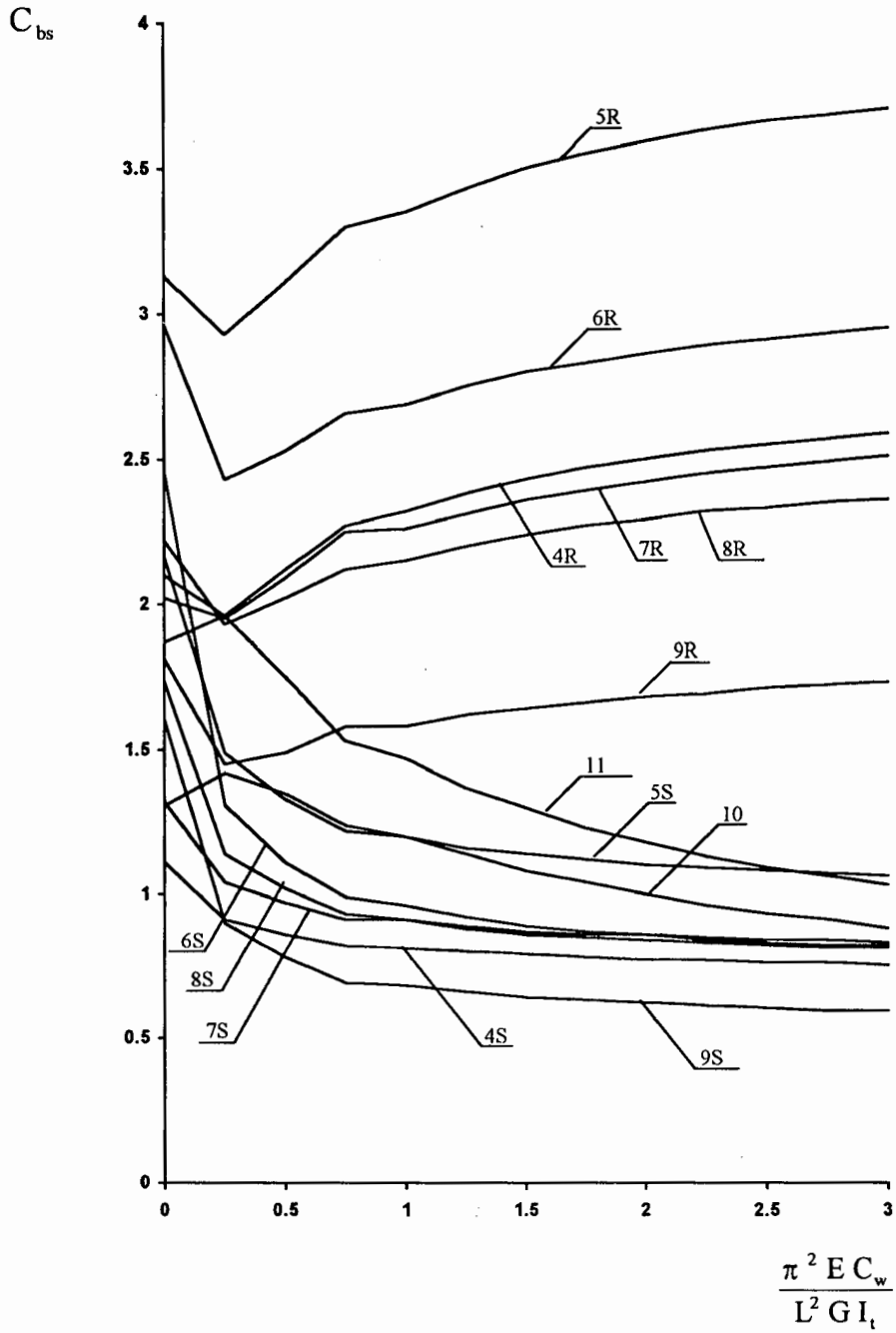


Figura 5. C_{bs} para carregamento aplicado no nível da mesa superior

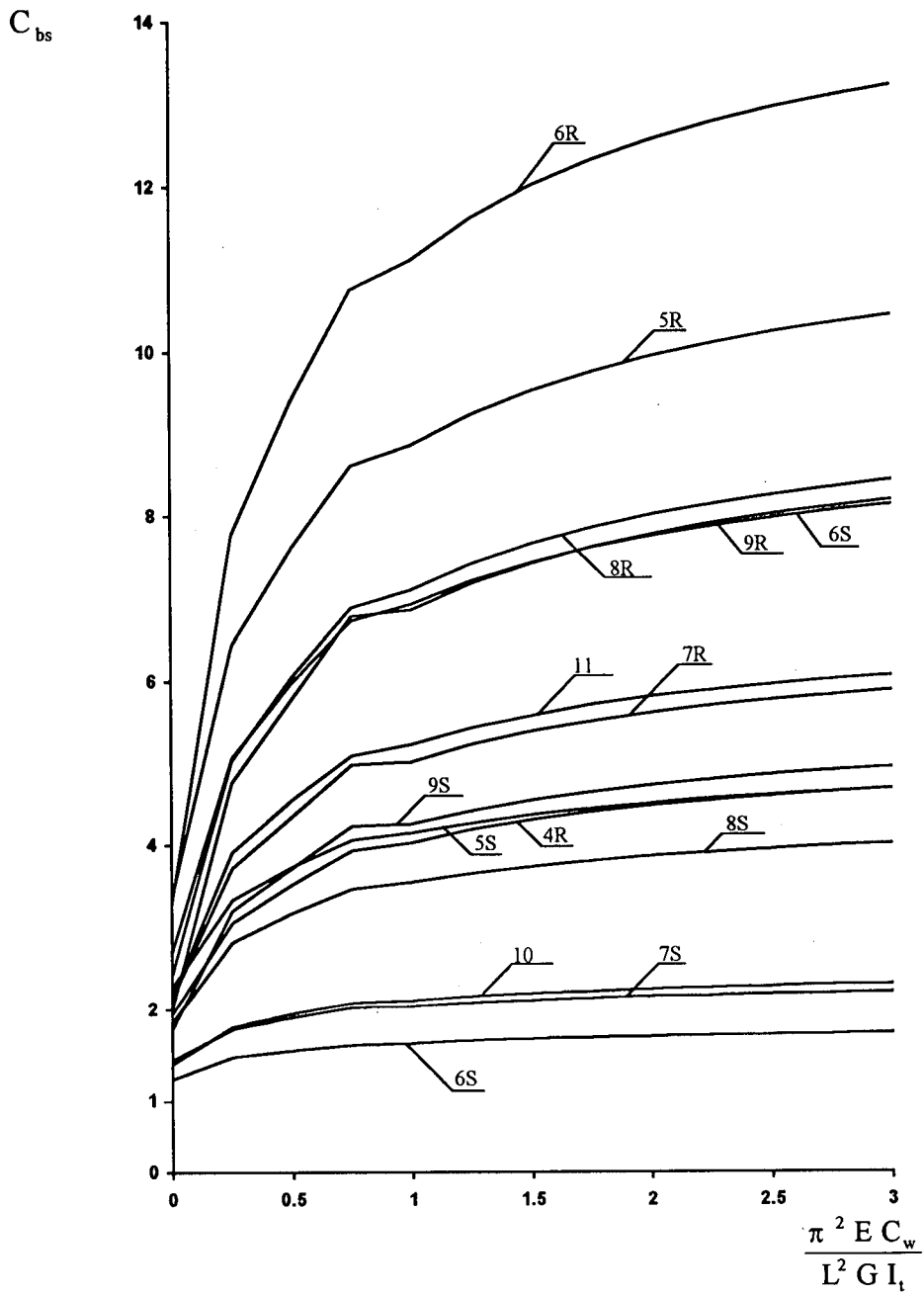


Figura 6. C_{bs} para carregamento aplicado no nível da mesa inferior

Vigas com recortes nas mesas

Os recortes nas mesas nas extremidades de vigas com seção transversal em forma de I são feitos com objetivo de facilitar sua ligação a outros elementos da construção.

A Figura 7 mostra os valores críticos de uma carga transversal aplicada na seção central de uma viga biapoada com vão de 6,1 m, em perfil W 16x26, no nível do centro de torção, com recorte na mesa superior de altura constante igual a 38 mm e comprimento variável. Em ambas as extremidades da viga, a translação lateral e a rotação são impedidas, mas a flexão lateral e o empenamento podem ocorrer. Os resultados são comparados com aqueles obtidos por Cheng e Yura¹².

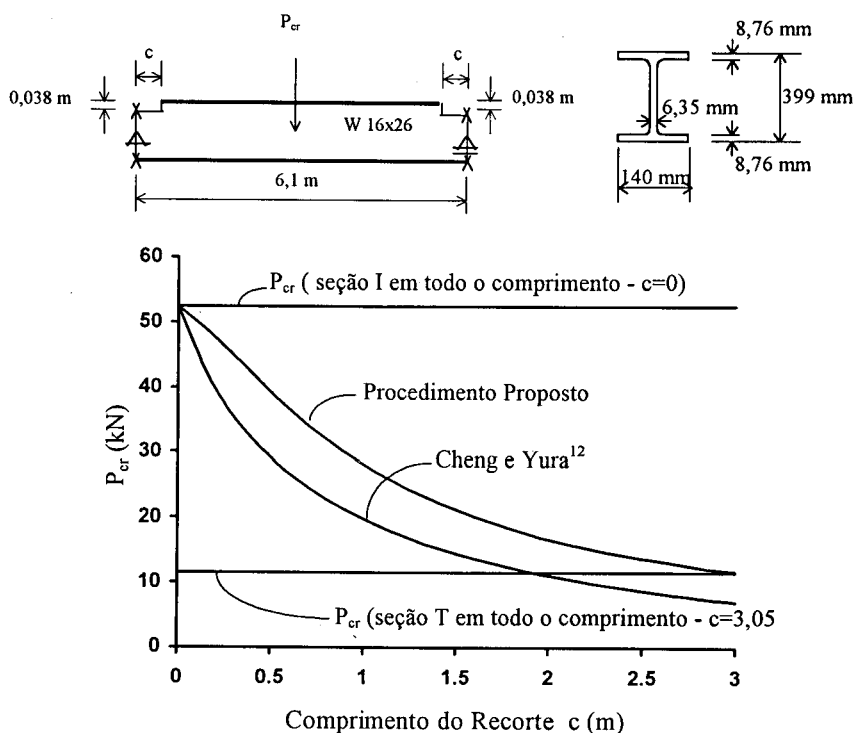


Figura 7. Carga crítica para uma viga com recorte na mesa superior

Vigas com aberturas na alma

As aberturas na alma das vigas são feitas geralmente para permitir a passagem dos dutos de serviço do edifício.

De acordo com Darwin¹³, em vigas de seção I duplamente simétrica, com aberturas na alma sem reforço ou com reforços colocados de ambos os lados da alma, a resistência nominal à flambagem lateral com torção pode ser determinada da forma usual, apenas multiplicando o momento de inércia à torção I_t por

$$\left[1 - \left(\frac{a_0}{L_b} \right) \frac{h_0 t_w - 2A_r}{t_w (d + 2b_f)} \right] \quad (16)$$

onde a_0 e h_0 são o comprimento e a altura da abertura, respectivamente, t_w é a espessura da alma, d a altura da viga, b_f a largura das mesas e A_r é a área do reforço (se não houver reforço $A_r = 0$) e L_b o comprimento destravado.

Foi analisada uma viga em perfil IPE 450 com vão de 12,60 m, submetida a um carregamento uniformemente distribuído atuando no nível do centro de torção. Em ambas as extremidades, a translação lateral e a rotação estão impedidas, e a flexão lateral e o empenamento liberados. Foram previstas 9 aberturas na alma em posições diferentes, porém simétricas em relação ao meio do vão, colocadas separadamente ou em conjunto (Figura 8), em dois tamanhos: $0,45 \times 0,20$ m e $0,90 \times 0,30$ m. O centro das aberturas coincidem com o eixo longitudinal da viga.

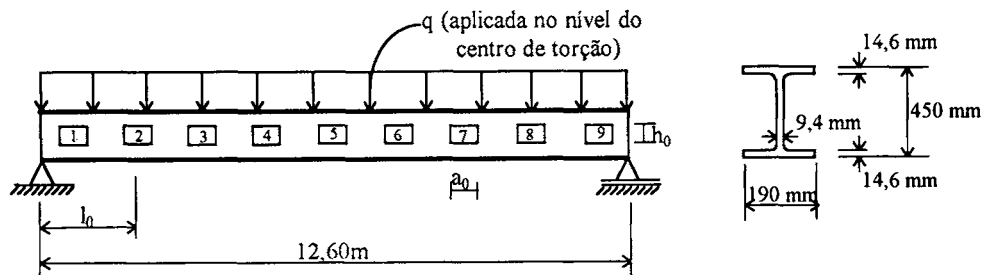


Figura 8. Aberturas consideradas para o cálculo

Os resultados obtidos com o procedimento proposto estão apresentados na Tabela II, onde também são mostrados os resultados obtidos ao se utilizar a equação (16), que corrige o momento de inércia à torção.

		Momento crítico elástico (kN.m)	
		Aberturas $0,45 \times 0,30$ m	Aberturas $0,90 \times 0,30$ m
Procedimento proposto	Sem abertura	116,45	116,45
	Aberturas 1 a 9	115,79	114,47
	Aberturas 1 a 3 e 7 a 9	114,95	111,91
	Aberturas 1 a 9	114,84	111,57
Equação (16)		103,45	102,91

Tabela II. Valores do momento crítico elástico para diversos casos de aberturas na alma

Vigas com contenção lateral interna

Foi analisada uma viga com 12,6 m de vão em perfil IPE 450, com uma seção interna e extremidades com translação lateral e rotação impedidas e flexão lateral e empenamento liberados. A posição da seção interna contida, definida por a , a partir do apoio esquerdo, variou ao longo do comprimento da viga, de modo a se determinar como tal restrição afeta o valor do momento crítico elástico (Figura 9).

Foram considerados os seguintes carregamentos: flexão pura, carga distribuída ao longo do vão da viga e carga concentrada no meio do vão. Para os dois últimos casos, as cargas foram supostas aplicadas no nível do centro de torção. Os valores obtidos para o momento crítico M_{cr} são mostrados na Figura 9, em função da posição da seção interna com contenção lateral a .

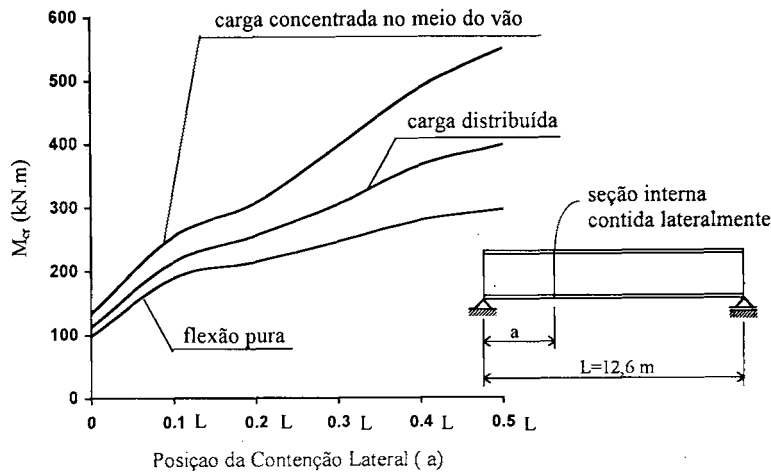


Figura 9. Momento crítico M_{cr} em função da posição da contensão lateral interna

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um procedimento numérico, baseado no método dos elementos finitos, para determinação da resistência nominal ao momento fletor de vigas de aço, em regime elástico, para o estado limite último de flambagem lateral com torção. Trata-se de um procedimento bastante geral, que permite analisar vigas com qualquer seção transversal, os mais diversos carregamentos, incluindo a presença de ações estabilizantes e desestabilizantes, condições de contorno variadas, e também vigas com variações abruptas de seção transversal. Foi mostrada a importância da determinação deste valor para o dimensionamento das vigas de aço, tomando-se como referência a especificação europeia de projeto ENV 1993-1-1¹.

Diversos casos em que a viga possui seção transversal em forma de I duplamente simétrico foram analisados e muitos resultados comparados com os propostos pela especificação europeia ENV 1993-1-1¹ e com os obtidos por vários pesquisadores. Constatou-se uma grande concordância, o que assegura a validade e a precisão do procedimento proposto.

Com os exemplos apresentados, como era previsto, verificou-se que:

- quando as cargas transversais são estabilizantes e aplicadas no nível da face inferior da viga, os valores do momento crítico elástico crescem enormemente, e se são desestabilizantes e aplicadas no nível da face superior da viga, os valores do momento crítico ficam bastante reduzidos;
- o comprimento dos recortes nas mesas pode reduzir significativamente o valor do momento crítico;
- as aberturas na alma da viga influem muito pouco no valor do momento crítico;
- contensões internas contra a flambagem lateral com torção podem fazer aumentar bastante o valor do momento crítico, dependendo da posição destas contensões ao longo do vão.

REFERÊNCIAS

- 1 ENV 1993-1-1¹ - Eurocode 3: "Design of steel structures", Part 1.1: "General rules and rules for building", CEN, April (1992).
- 2 "Manual of steel construction, load and resistance factor design", American Institute of Steel Construction, Chicago, (1994).
- 3 Canadian Standards Association (CSA), "Limit states design of steel structures", CSA Standard CAN/CSA-S16. pp. 1-94. Canadian Standards Association, Rexdale, Ontario, Canada, (1994).
- 4 J.W. Clark e H.N. Hill, "Lateral buckling of beams", *Journal of Structural Division*, Vol. **86**, Nº 7, pp. 175-196, (1960).
- 5 T.V. Galambos (Ed.), "*Guide to stability design criteria for metal structures*", 4 ed., Structural Stability Research Council, Wiley, New York, (1988).
- 6 B.G. Johnston (Ed.), "*Guide to stability design criteria for metal structures*", 3 ed., Structural Stability Research Council, John Wiley & Sons Inc., New York, (1976).
- 7 W.F. Chen e E.M. Lui, "*Structural stability-theory and implementation*", Elsevier Applied Science Publishers, London and New York, (1987).
- 8 European Convention for Constructional Steelwork, ECCS, Manual on the stability of steel structures, Committee 8, 2 ed., Stability, (1976).
- 9 J.M. Gere e W. Weaver Jr., "*Matrix analysis of framed structures*", 3 ed., Van Nostrand Reinhold, New York, (1990).
- 10 S.P. Timoshenko e J.M. Gere, "*Theory of elastic stability*", McGraw-Hill, New York, (1961).
- 11 N.S. Trahair e M.A. Bradford, "*The behaviour and design of steel structures*", 2 ed. rev., Chapman & Hall, London, p. 391, (1988).
- 12 J.R. Cheng e J.A. Yura, "Lateral buckling of coped Beams", *Journal of Structural Engineer*, Vol. **114**, Nº 1, pp. 1-15, (1988).
- 13 D. Darwin, "Steel and composite beams with web openings". *Steel Design Series*, 2, American Institute of Steel Construction, Chicago, (1990).