

# Evolução linear de dano em materiais elásticos e frágeis: modelagem e simulação numérica

Stella Maris Domingues e Heraldo da Costa-Mattos

Laboratório de Mecânica Teórica e Aplicada  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal Fluminense  
24210-240 Niterói-RJ, Brasil  
Tel.: 55-21-620 70 70, Fax: 55-21-717 44 46  
e-mail: maris@caa.uff.br

Fernando Rochinha

Programa de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal Rio de Janeiro  
EE-COPPE/UFRJ  
Departamento de Engenharia Mecânica  
21945-970 Rio de Janeiro, Brasil  
Tel.: 55-21-560 88 32, Fax: 55-21-290 66 26  
e-mail: faro@serv.com.ufrj.br

## Sumário

Nos últimos anos, foram propostas várias teorias de dano contínuo para descrever o comportamento de materiais elásticos. Entre essas teorias algumas introduzem gradientes da variável associada ao dano, de modo a evitar problemas de perda de unicidade após o início do amolecimento. Embora estas teorias permitam uma modelagem matematicamente correcta do fenómeno de localização, do ponto de vista numérico elas são geralmente consideradas muito complexas. O trabalho aqui apresentado trata da implementação numérica de uma teoria dependente do gradiente para o estudo do dano em materiais elásticos. É utilizada para aproximação da solução do problema matemático não-linear resultante uma técnica numérica simples, baseada no método de elementos finitos. O acoplamento entre as variáveis dano e deformação nas equações resultantes é contornado através da técnica de partição dos operadores, que permitem transformar o problema não-linear acoplado em uma sequência de problemas lineares mais simples.

## NONLINEAR DAMAGE EVOLUTION IN ELASTIC BRITTLE MATERIALS: MODELLING AND NUMERICAL SIMULATION

## Summary

In the last years different continuum damage theories have been proposed to describe the behavior of elastic materials. Among these theories, some introduce higher order gradients of the damage variable in the constitutive model, in order to avoid the loss of well-posedness in the post-localization stage. Although such theories allow a mathematically correct modelling of the strain localization phenomena, they are usually considered very complex to handle from the numerical point of view. The present work is concerned with the numerical implementation of a gradient-enhanced damage theory for elastic materials. A simple numerical technique, based on the finite element methods, is proposed to approximate the solution of the resulting nonlinear mathematical problems. The coupling between damage and strain variables is circumvented by means of a splitting technique, which permit to transform the nonlinear coupled problem in a sequence of simpler linear problems.

## INTRODUÇÃO

Nos últimos anos diferentes teorias de dano contínuo foram propostas para descrever o processo de degradação em materiais elásticos. Inicialmente foram propostas teorias baseadas em aproximações locais, conhecidas como teorias locais de dano, que freqüentemente resultam em uma descrição fisicamente não realista do fenômeno de localização de deformação<sup>1,2</sup>. Geralmente, este problema é devido a perda de unicidade de soluções a partir do começo do amolecimento. Em consequência, aproximações através do Método dos Elementos Finitos passam a apresentar sensibilidade a discretização geométrica utilizada ("mesh dependence")<sup>3,7</sup>. Para evitar os problemas de perda de unicidade encontrados nas teorias locais e desse modo obter uma modelagem do dano fisicamente mais realista e aproximações numéricas mais confiáveis, algumas aproximações alternativas têm sido propostas<sup>8,12</sup>. Nesse contexto surgiram as teorias não locais de dano, que introduzem gradientes da deformação no modelo constitutivo. Apesar de contornar o problema de unicidade, a implementação dessas teorias pode levar a algoritmos que, entre outras coisas, exigem uma modificação radical do código de elementos finitos, dificultando sua utilização.

Neste trabalho é considerada uma teoria dependente do gradiente do dano, capaz de descrever macroscopicamente a degradação de materiais elásticos frágeis. A abordagem utilizada no presente trabalho resulta em uma teoria de microestrutura, onde considera-se uma variável  $\beta$ , relacionada à ligação entre os pontos materiais, que funciona como um reductor de energia livre devido a degradação do material. Como o dano resulta de movimentos microscópicos, é proposta uma reformulação da cinemática e de alguns princípios básicos de Mecânica do Contínuo clássica de modo a levar em conta esses "micro-movimentos". A variável  $\beta$  é introduzida no princípio das potências virtuais como uma variável cinemática adicional, onde a potência dos esforços internos não depende somente da velocidade e de seu gradiente, mas também da velocidade do dano e de seu gradiente. Além disso, as equações constitutivas são desenvolvidas em um contexto termodinâmico, onde é suposto que a energia livre depende não apenas da deformação e da variável dano mas também do gradiente do dano. Desse modo, o estado termodinâmico de um ponto material, em um dado instante, passa a ser descrito pelas variáveis de temperatura e deformação, bem como pela variável  $\beta$  e seu gradiente.

## MODELAGEM

Um corpo é definido como um conjunto de pontos materiais  $B$  que ocupa uma região  $\Omega$  do espaço euclidiano na sua configuração de referência. Nesta teoria, além das variáveis clássicas que caracterizam a cinemática de um meio contínuo (deslocamento e velocidade de pontos materiais), uma variável escalar adicional  $\beta \in [0, 1]$  é introduzida. Esta variável está relacionada com a ligação entre os pontos materiais e pode ser interpretada como uma medida do estado de coesão local do material. Se  $\beta = 1$ , todas as ligações são preservadas e as propriedades iniciais do material estão preservadas. Se  $\beta = 0$ , uma ruptura local ocorreu, já que todas as ligações entre os pontos materiais foram quebradas. A variável  $\beta$  está associada a variável dano  $D$  através da seguinte relação:  $\beta = 1 - D$ . Já que a degradação é um fenômeno irreversível, a taxa  $\dot{\beta}$  deve ser negativa ou igual a zero. Uma apresentação detalhada dos princípios básicos que governam a evolução desses tipos de contínuo podem ser encontradas em las referências<sup>11,12</sup>. Um resumo dos princípios básicos são apresentados nesta seção. Por simplicidade, a hipótese de processos quasi-estáticos e isotérmicos é adotada ao longo deste trabalho. Além disso, também é admitida a hipótese de pequenas deformações e consequentemente o princípio de conservação de massa é automaticamente satisfeito.

## O princípio das potências virtuais

Seja um corpo que ocupa uma região  $\Omega \subset R^3$  com um contorno suficientemente regular  $\Gamma$  sujeito às forças externas  $g(t): \Gamma_2 \subset \Gamma \rightarrow R^3$  e  $b(t): \Omega \rightarrow R^3$ , às forças microscópicas externas  $p(t): \Omega \rightarrow R$  e  $q(t): \Gamma_2 \subset \Gamma \rightarrow R$  e aos deslocamentos prescritos  $u(t) = \hat{u}(t)$  em  $\Gamma_1 \subset \Gamma$ , onde  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$  e  $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Phi$ . Sob as hipótese de processos quasi-estáticos, os efeitos de inércia podem ser desprezados e o princípio das potências virtuais (PPV) pode ser expresso como

$$\pi_{\text{int}} + \pi_{\text{ext}} = 0 \quad (1)$$

para qualquer variação admissível dos campos ( $u$  e  $\beta$ ) que caracterizam a cinemática do contínuo. A potência  $\pi_{\text{int}}$  das forças internas generalizadas pode ser escrita como

$$\pi_{\text{int}} = - \int_{\Omega} (\sigma \cdot \nabla \hat{u}) dV - \int_{\Omega} (F \hat{\beta} + H \cdot \nabla \hat{\beta}) dV \quad (2)$$

onde  $\sigma$  é o tensor das tensões,  $F$  e  $H$  as forças microscópicas internas,  $\hat{u}: \Omega \rightarrow R^3$  um elemento do conjunto  $V_v$  das velocidades virtuais  $\hat{u}$  tal que  $\hat{u}|_{\Gamma_1} = 0$  e  $\hat{\beta}: \Omega \rightarrow R$  é um elemento do conjunto  $V_{\beta}$  dos valores admissíveis de  $\beta$ .

A potência correspondente  $\pi_{\text{ext}}$  das forças externas generalizadas ( $b, g, p$  e  $q$ ) tem a seguinte forma

$$\pi_{\text{ext}} = \int_{\Omega} (b \cdot \hat{u}) dV + \int_{\Gamma_2} (g \cdot \hat{u}) dA + \int_{\Omega} (p \hat{\beta}) dV + \int_{\Gamma} (q \hat{\beta}) dA \quad (3)$$

onde  $p: \Omega \rightarrow R$  é definida<sup>10</sup> como uma força microscópica de volume que age sobre  $\Omega$  e  $q: \Gamma \rightarrow R$  é definida como uma força microscópica de contato que age sobre  $\Gamma$ , ambas em dualidade com  $\beta$ . Essas forças microscópicas estão relacionadas às ações não mecânicas, tais como ações químicas e electromagnéticas, que podem afetar o estado de coesão da matéria.

A partir das equações (2) e (3), da hipótese de deformações quasi-estáticas e admitindo que os efeitos de inércia possam ser desprezados, o PPV pode ser reescrito como

$$\int_{\Omega} [\sigma \cdot (\nabla \hat{u}) - b \cdot \hat{u}] dV - \int_{\Gamma_2} g \cdot \hat{u} dA + \int_{\Omega} [H \cdot (\nabla \hat{\beta}) + F \hat{\beta} - p \hat{\beta}] dV - \int_{\Gamma} q \hat{\beta} dA = 0, \quad \forall \hat{u} \in V_v, \forall \hat{\beta} \in V_{\beta} \quad (4)$$

## Equações constitutivas

Sob as hipóteses de pequenas deformações e de processos isotérmicos, supõe-se que a energia livre é função da deformação  $\varepsilon$ , da temperatura  $\theta$ , da variável de coesão  $\beta$  e de seu gradiente  $V\beta$ . O contexto termodinâmico utilizado na obtenção das equações constitutivas não é apresentado neste trabalho, maiores detalhes são encontrados em<sup>11,12</sup>. As expressões resultantes são as seguintes

$$\sigma = \beta [\lambda (\text{tr } \varepsilon) \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon] \quad (5)$$

$$F = \left[ \frac{1}{2} \lambda (\text{tr } \varepsilon)^2 + \mu \varepsilon \cdot \varepsilon \right] - w + \lambda_{\beta} + C \dot{\beta} + \lambda_{\dot{\beta}} \quad (6)$$

$$H = k (\nabla \beta) \quad (7)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de elasticidade de Lamé,  $C$  um coeficiente relacionado com a viscosidade,  $k$  uma constante difusiva e  $w$  está associado à energia de deformação elástica (é igual à área sob a parte linear da curva tensão versus deformação).  $C, k$  e  $w$  são constantes positivas do material. Os termos  $\lambda_{\beta}$  e  $\lambda_{\dot{\beta}}$  representam os multiplicadores de Lagrange associados respectivamente às restrições  $\beta \geq 0$  e  $\dot{\beta} \leq 0$ , elas obedecem as seguintes relações de complementaridade  $h_{\beta} \leq 0, \beta \lambda_{\beta} = 0$  e  $\lambda_{\dot{\beta}} \leq 0, \beta \lambda_{\dot{\beta}} = 0$ .

## O problema matemático

Substituindo as equações constitutivas (5), (6) e (7) em (4), desprezando as forças microscópicas externas e considerando a condição inicial:  $\beta(x, t = 0) = 1, \forall x \in \Omega$ , o seguinte problema matemático não-linear e com restrições é obtido: ache  $u(x, t)$   $\beta(x, t)$  respectivamente os campos de deslocamento  $u(t): \Omega \rightarrow R^3$ , tal que  $u(t)|_{\Gamma_1} = \hat{u}(t)$  e de coesão  $\beta(x, t): \Omega \rightarrow R$  tal que para todo instante de tempo  $t \in [0, \tau]$

$$\int_{\Omega} \beta(t) [\lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} \hat{u} + 2\mu \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(\hat{u})] dV - \int_{\Omega} b(t) \cdot \hat{u} dV - \int_{\Gamma_2} g \cdot \hat{u} dA = 0, \quad \forall \hat{u} \in V_u \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} (k \nabla \beta) \cdot \nabla \hat{\beta} dV + \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \lambda (\operatorname{div} u)^2 + \mu \varepsilon \cdot \varepsilon - w \right] \hat{\beta} dV + \int_{\Omega} C \dot{\beta} \hat{\beta} dV = 0, \quad \forall \hat{\beta} \in V_{\beta} \quad (9)$$

Sujeito às seguintes restrições e condições iniciais, respectivamente

$$0 \leq \beta \quad \text{e} \quad \dot{\beta} \leq 0 \\ \beta(x, t = 0) = 1 \quad \text{e} \quad u(x, t = 0) = u_0$$

## ANÁLISE NUMÉRICA

A partir do modelo proposto anteriormente, foi obtido um problema no qual os campos de dano e deslocamento aparecem acoplados. Este problema não-linear acoplado é discretizado espacialmente a partir do método de elementos finitos (MEF), dando origem a um problema semi-discreto, ou seja discreto no espaço e contínuo no tempo. Este problema pode ser aproximado numericamente através de um esquema monolítico ou através de um esquema particionado. No esquema monolítico, o algoritmo de discretização temporal é aplicado ao problema completo, onde os campos de deslocamento e dano são calculados simultaneamente. No esquema particionado é adotada uma estratégia na qual o problema semi-discreto é resolvido por meio de algoritmos em estágios, onde o sistema acoplado é particionado de acordo com os diferentes campos a serem calculados (deslocamento e dano) e cada partição pode ser tratada por meio de técnicas usuais de integração temporal, eventualmente até diferentes. Este esquema em estágios pode ser interpretado como um algoritmo de fórmula de produto, exatamente como no método clássico de passos fracionados<sup>13</sup>. Em síntese, o sistema de equações diferenciais não-lineares associado ao problema de evolução do dano, resultante da discretização espacial, é aproximado através de uma seqüência de problemas lineares mais simples, que por sua vez são resolvidos através de técnicas usuais de integração temporal, tais como Euler implícito, Euler explícito e a regra do Trapézio. Esta seqüência de problemas lineares consiste de duas fases: a fase de evolução do dano e a fase de evolução do deslocamento. A primeira está associada ao esquema numérico de evolução da variável  $\beta$  entre os instantes de tempo  $(n)$  e  $(n + 1)$  e mantendo-se a variável de deslocamento  $u$  constante, ou seja igual a calculada no instante  $n$ . A segunda é representada pelo algoritmo que soluciona o problema de equilíbrio, considerando o carregamento externo e o valor do campo  $\beta$  no instante  $(n + 1)$ , resultando no campo de deslocamentos em  $(n + 1)$ .

### Problema semi-discreto: método dos elementos finitos

Sejam as funções de base tradicionalmente fornecidas pelo MEF<sup>15</sup>,  $N_i(x) \in V_v^h$ , onde  $V_v^h$  é um sub-espaço finito do espaço  $V_v$  e  $\varphi_i \in V_\beta^h$ , onde  $V_\beta^h$  é um sub-espaço finito do espaço  $V_\beta$ . Essas funções de base permitem a construção das seguintes aproximações

$$u_h(x, t) = \sum_{i=1}^{m_h} u_i(t) N_i(x), \quad i = 1, \dots, m_h \quad \text{e} \quad \beta_h(x, t) = \sum_{i=1}^{m_h} \beta_i(t) \varphi_i(x) \quad i = 1, \dots, m_h \quad (10)$$

onde  $m_h$  é o número de pontos nodais da discretização de elementos finitos e  $h$  o parâmetro de malha, um escalar associado ao tamanho do elemento utilizado, e portanto ao grau de refinamento da discretização. O problema semi-discreto é obtido substituindo-se  $u$  por  $u_h$  e  $\beta$  por  $\beta_h$ , definidos na equação (10), nas equações (8) e (9). O problema semi-discreto é formado por um sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e restrições de desigualdade incidindo sobre a coesão descritos abaixo

$$\mathbf{K}[(\beta_h)]\mathbf{u} = \mathbf{R} \quad (11)$$

$$\mathbf{C}\dot{\beta} + \mathbf{A}\beta + \mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0 \quad (12)$$

Com as seguintes condições iniciais e de restrição, respectivamente

$$\beta_h(x, 0) = 1 \quad \text{e} \quad u_h(x, 0) = 0 \quad 0 \leq \beta_h(x, t) \leq 1 \quad \text{e} \quad \dot{\beta}_h(x, t) \leq 0$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{K}[(\beta_h)]_{ij} &= \int_{\Omega} \beta_h [\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}]_{ij} dV, \quad i, j = 1, \dots, 3 * m_h \\ [\mathbf{R}]_i &= \int_{\Omega} b_k N_1 dV - \int_{\Gamma} g_k N_1 dA \\ [\mathbf{C}]_{ij} &= \int_{\Omega} C \varphi_i \varphi_j dV \\ [\mathbf{A}]_{ij} &= \int_{\Omega} (k \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j) dV \\ [\mathbf{F}(\mathbf{u})]_i &= \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - w \right] \varphi_i dV, \quad i, j = 1, \dots, 3 * m_h \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{B}$  denota o operador diferencial discretizado usual e  $\mathbf{D}$  é a matriz dos coeficientes elásticos<sup>15</sup>.

### Técnica de partição do operador aplicado ao problema semi-discreto

A técnica de partição do operador é utilizada como estratégia numérica no sentido de resolver o problema semi-discreto não linear através de uma seqüência de problemas lineares mais simples. O operador original é particionado em dois: o primeiro relacionado ao campo de deslocamentos  $u_k$  (problema de equilíbrio) e o outro ao  $\beta_h$  (problema de evolução do dano). O esquema proposto pode resultar em dois algoritmos diferentes dependendo da ordem de seqüência dos operadores. Esses algoritmos, resumidos abaixo, serão chamados DANO\_1 e DANO\_2.

O algoritmo utilizado neste artigo, DANO\_1, inicialmente trata o problema de evolução do dano, mantendo o campo de deslocamentos inalterado. Em um primeiro estágio as

equações diferenciais ordinárias associadas são resolvidas utilizando-se o método de integração temporal, que pode ser genericamente descrito através de

$$\mathbf{C}[\theta\beta^{n+1} + (1 - \theta)\hat{\beta}^n] + \Delta t[\theta\mathbf{A}\beta^{n+1} + (1 - \theta)\mathbf{A}\beta^n] + \Delta t[\theta\tilde{\mathbf{F}}^{n+1} + (1 - \theta)\mathbf{F}^n] = 0 \quad (13)$$

onde  $\theta$  define o método de integração (Euler explícito = 0, Euler implícito = 1 e regra de Trapézio = 1/2). O índice  $h$  foi omitido e  $n$  significa que a função é aproximada no instante  $t_n$ . Além disso  $\tilde{\mathbf{F}}^{n+1}$  não representada a função  $F$  é calculada em  $t_{n+1}$ , já que  $u_{n+1}$  não é conhecida. Na primeira fase ( $\dot{u} = 0$ )  $\tilde{\mathbf{F}}^{n+1}$  é calculada usando-se  $u_n$ .

Na segunda fase de DANO\_1 resolve-se o problema de equilíbrio

$$\mathbf{K}[(\beta_{n+1})]\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1} \quad (14)$$

sendo  $[\mathbf{R}_{n+1}]_i = \int_{\Omega} (b_k)_{n+1} N_i dV - \int_{\Gamma} (g_k)_{n+1} N_i dA$

O algoritmo DANO\_2 consiste na inversão dos estágios de DANO\_1. A implementação computacional dos dois algoritmos é considerada simples, pois ambos podem ser obtidos de um esquema de elementos finitos usual. Pode ser observado que a fase de evolução de dano é similar ao problema de condução de calor, enquanto a fase problema de equilíbrio é similar ao problema elástico clássico. Na comparação entre os resultados obtidos a partir desses dois algoritmos, ou seja de ordens diferentes de operadores, não foi encontrada nenhuma diferença significativa nos resultados. Desse modo, utilizou-se neste trabalho o algoritmo denominado DANO\_1.

### Exemplos numéricos

Para avaliar as características do modelo e do algoritmo analisa-se o problema de uma placa quadrada com um furo circular central. A placa quadrada de  $200 \times 200 \times 1$  mm com um furo circular central de 50 mm de raio, está apoiada em uma das extremidades e é solicitada através de um deslocamento prescrito  $u(t)$  na outra extremidade, conforme está esquematizado na Figura 1. Por causa de sua simetria a análise do problema pode ser realizada somente em um quarto da placa, o que está representado pela região hachurada na Figura 1.

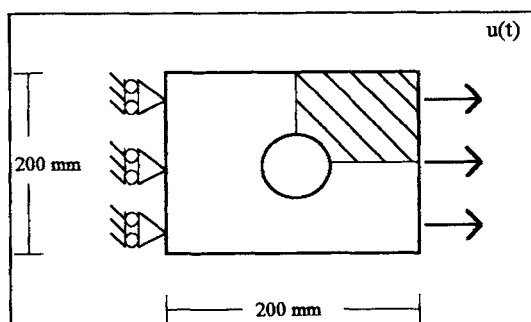


Figura 1. Placa com furo circular central

Nesta análise considerou-se uma placa de concreto, que possui as seguintes características físicas<sup>10</sup>:  $E = 27,0$  GPa,  $w = 5,0 \times 10^{-5}$  MPa,  $C = 1,0 \times 10^{-3}$  MPa s e  $k = 0,2$  MPa mm<sup>2</sup>. O deslocamento prescrito e o incremento de tempo adotado são dados respectivamente por  $u(L, t) = \alpha t$ , ( $\alpha = 5,0 \times 10^{-3}$  mm/s) e  $\Delta t = 10 \times 10^{-4}$  s.

## Degradação do material

Na discretização espacial adotou-se o elemento bi-linear quadrilátero usual. Empregou-se uma malha de 594 pontos nodais e 544 elementos conforme o apresentado na Figura 9. O algoritmo utilizado é do tipo DANO\_1. O método de integração numérica utilizado no cálculo do problema referente à evolução do dano é o método de Euler implícito.

A evolução da variável dano  $D = (1 - \beta)$  na placa é analisada em três instantes distintos de tempo  $t = 2,5$  s,  $t = 3,0$  s e  $t = 3,35$  s, que são apresentados respectivamente nas Figuras 2, 4 e 6. Essas figuras demonstram que a medida que o dano evolui surge uma região de concentração de dano e em seguida uma trinca que se propaga na direção da superfície livre da placa, perpendicular à direção do carregamento, até que atinge-se o rompimento definitivo da placa. As Figuras 3, 5 e 7 apresentam os níveis de tensão na placa nos mesmos instantes de tempo. É possível perceber que os maiores valores para a tensão se encontram na região localizada imediatamente acima da ponta da trinca. Também observa-se, abaixo do local de maiores valores de tensão, uma faixa estreita com tensão praticamente nula, significando que houve rompimento do material. Na Figura 7 a placa está completamente quebrada, não há mais tensões agindo em nenhuma região.

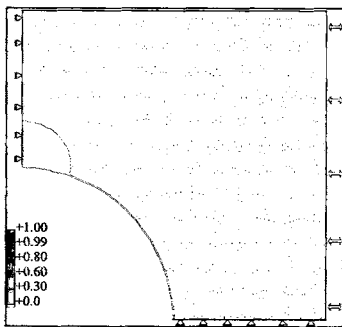


Figura 2. Níveis de dano  $t = 2,5$  s

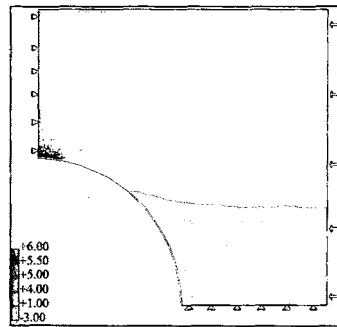


Figura 3. Níveis de tensão  $t = 2,5$  s

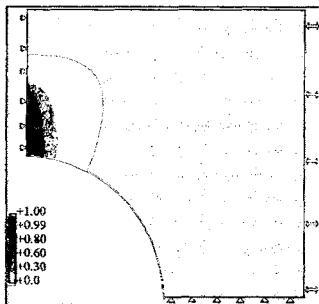


Figura 4. Níveis de dano  $t = 3,0$  s

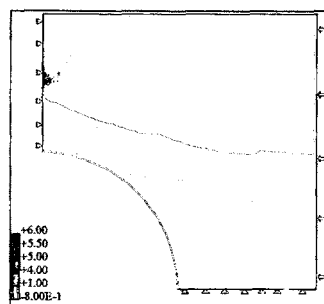


Figura 5. Níveis de tensão  $t = 3,0$  s

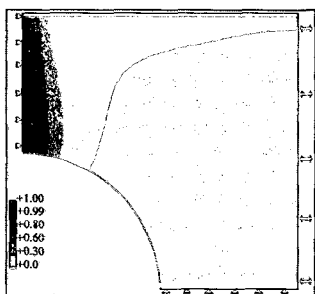


Figura 6. Níveis de dano  $t = 3,35$  s

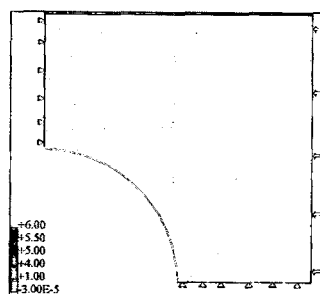
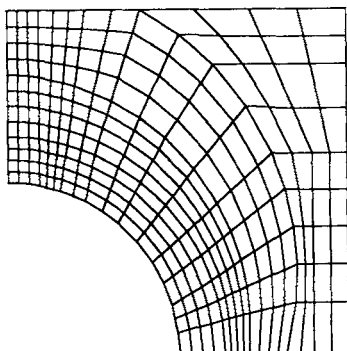


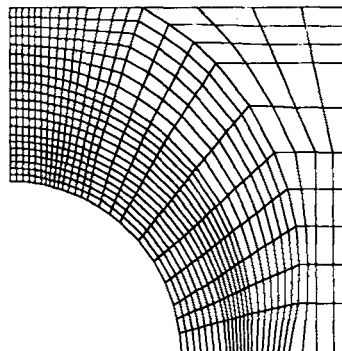
Figura 7. Níveis de tensão  $t = 3,35$  s

## Sensibilidade à malha

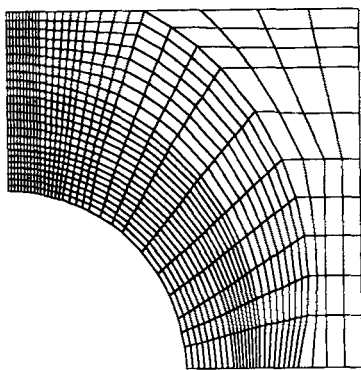
Para demonstrar que a solução do problema não é sensível à malha, foram utilizadas malhas com diferentes discretizações espaciais, apresentadas nas Figuras 8, 9 10 e 11. A diferença entre essas malhas é grau de discretização (refinamento) na região onde os maiores níveis de dano devem ocorrer. Apesar de ser formada pelo mesmo número do nós e elementos que a malha 1 (Figura 8), a malha 4 se diferencia desta devido a regiões distorcidas.



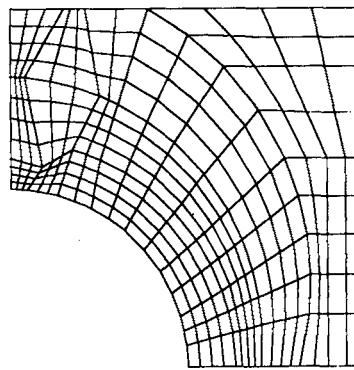
**Figura 8.** Malha 1 (274 nós e 240 elementos)



**Figura 9.** Malha 2 (594 nós e 544 elementos)



**Figura 10.** Malha 3 (819 nós e 760 elementos)



**Figura 11.** Malha 4 (274 nós e 240 elementos)

No estudo foram observados os valores do dano e do deslocamento, obtidos a partir das diferentes malhas, em diferentes pontos sobre a placa. Através das Figuras 13 e 14 é possível perceber o comportamento do dano ao longo das linhas longitudinais  $A(y = 53,0 \text{ mm})$  e  $B(y = 60,0 \text{ mm})$  (Figura 12). A forma das curvas e o valor do dano nos diferentes pontos ao longo das linhas são praticamente os mesmos. Além disso, os níveis e o formato das regiões de dano sobre a placa também são iguais para diferentes malhas. O mesmo comportamento é observado para campos de tensão e deslocamento. Um estudo semelhante foi realizado em<sup>16</sup>.

Para completar a verificação de sensibilidade à malha apresentam-se na Figura 15 as curvas de força aplicada versus deslocamento prescrito, obtida usando essas diferentes discretizações. O resultado representa o comportamento global de estrutura. Mais uma vez, é possível notar que a forma da solução não é significativamente afetada pela discretização espacial. Esta Figura também permite observar o fenômeno de amolecimento. O mesmo



tipo de não-sensibilidade a malha foi encontrado em muito exemplos apresentados em<sup>12</sup>. Embora nenhum resultado teórico seja apresentado, a formulação apresentada demonstra não possuir qualquer tipo de patologia numérica que indique sensibilidade à malha.

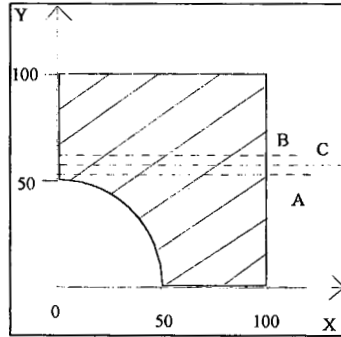


Figura 12. Linhas longitudinais A, B e C

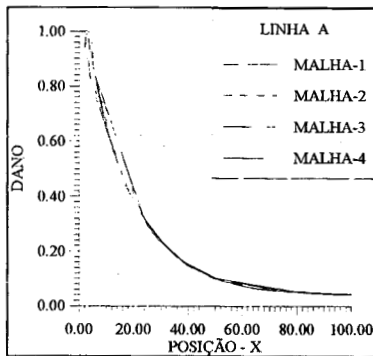


Figura 13. Dano ao longo das linhas A

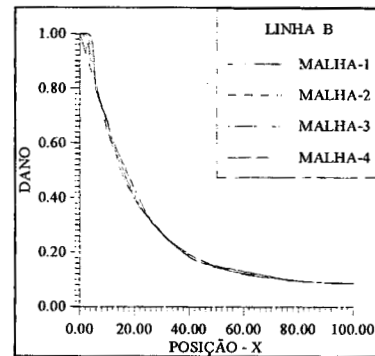


Figura 14. Dano ao longo das linhas B

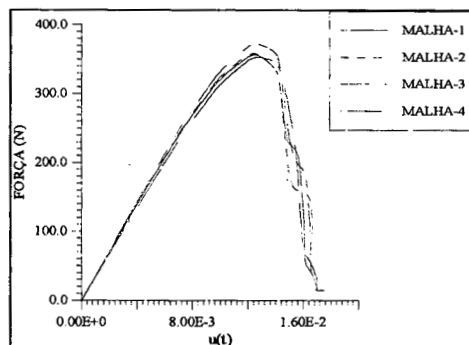


Figura 15. Força versus deslocamento prescrito. Diferentes malhas

### Estabilidade e precisão do algoritmo proposto

A análise da estabilidade do algoritmo proposto consiste da comparação entre os resultados das variáveis do problema  $\beta$  e  $u$ , obtidos a partir de diferentes incrementos de tempo  $\Delta t$  e considerando uma mesma discretização espacial, ou seja a mesma malha de elementos finitos (Figura 9). Neste estudo empregou-se o algoritmo do tipo DANO\_1, já apresentado na seção anterior. No cálculo do problema referente à evolução do dano utilizou-se o método de integração numérica de Euler implícito.

Os incrementos de tempo  $\Delta t$  utilizados são: 0,1 s; 0,01 s; 0,001 s; 0,0005 s e 0,0001 s. As Figuras 16 e 17 apresentam curvas com resultados da variável  $\beta$  obtidos em dois instantes de tempo diferentes, a saber:  $t = 2,5$  s e  $t = 3,0$  s. As Figuras 18 e 19 apresentam os resultados do deslocamento  $u_y$  nos mesmos instantes. Os pontos observados estão sobre a linha longitudinal  $B$  (Figura 12). A partir dessas figuras é possível observar que os resultados das variáveis referentes aos incrementos de tempo  $\Delta t = 0,0005$  s e  $\Delta t = 0,0001$  s são os mesmos em todos os pontos observados.

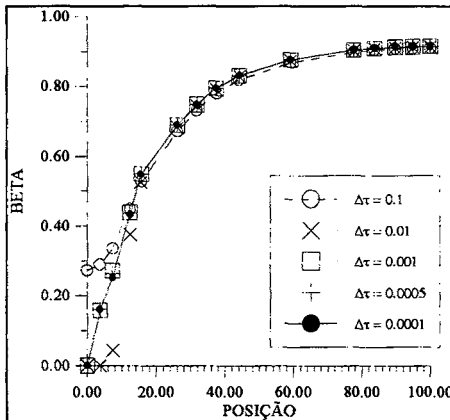


Figura 16. Valores de  $\beta$  obtidos a partir de diferentes  $\Delta t$ , em  $t = 2,5$  s

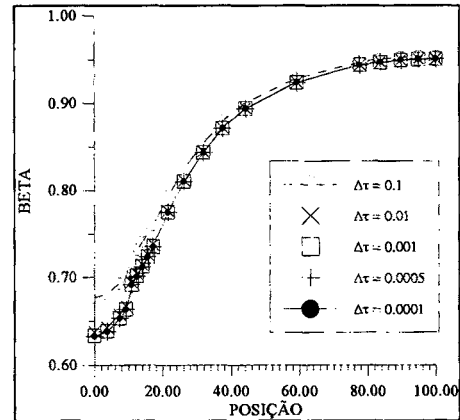


Figura 17. Valores de  $\beta$  obtidos a partir de diferentes  $\Delta t$ , em  $t = 3,0$  s

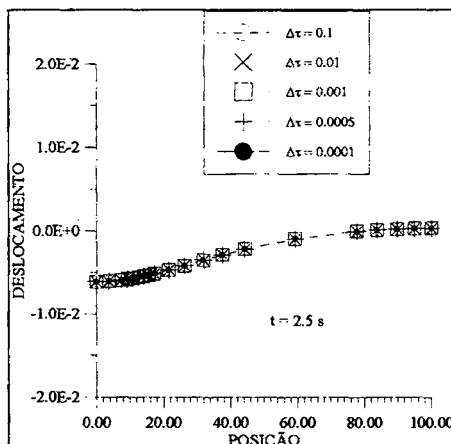


Figura 18. Valores de  $u_y$  obtidos a partir de diferentes  $\Delta t$  em  $t = 2,5$  s

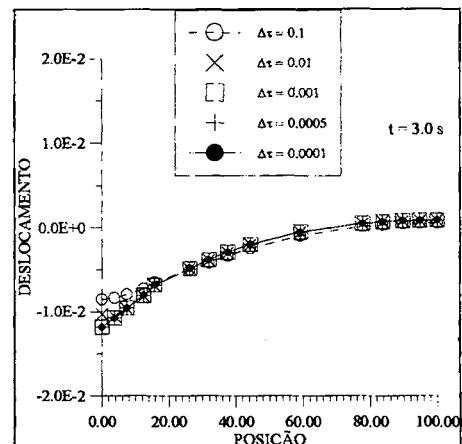


Figura 19. Valores de  $u_y$  obtidos a partir de diferentes  $\Delta t$  em  $t = 3,0$  s

A análise de precisão do algoritmo proposto consiste da comparação entre os resultados obtidos usando o problema particionado, que pode utilizar diferentes métodos de integração numérica (Euler explícito e implícito e regra do Trapézio) e os do problema acoplado (monolítico), onde os métodos de Euler e regra do Trapézio são empregados conjuntamente com o método de Newton que resolve o sistema não-linear resultante. Através das Figuras 20, 21, 22 e 23 é possível observar que os resultados obtidos para  $\beta = (1 - D)$  e deslocamento em dois instantes de tempo diferentes  $t = 3,2$  s e  $t = 3,3$  s, são praticamente iguais. A malha utilizada neste estudo é a malha 1 (Figura 8), já o incremento de tempo do problema particionado é  $\Delta t = 10 \times 10^{-4}$  s e do problema acoplado é  $\Delta t = 10 \times 10^{-5}$  s. Os pontos observados são os pontos nodais localizados ao longo da linha longitudinal  $C(y = 56,0$  mm) (Figura 12).

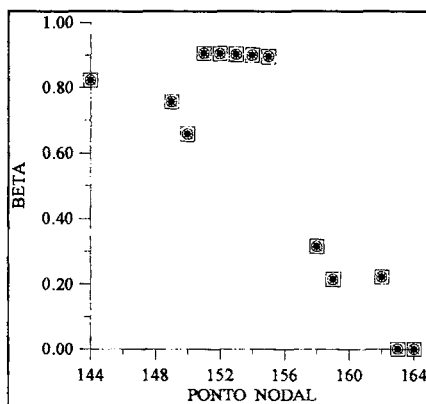


Figura 20. Valores de  $\beta = (1 - D)$   $t = 3,2$  s

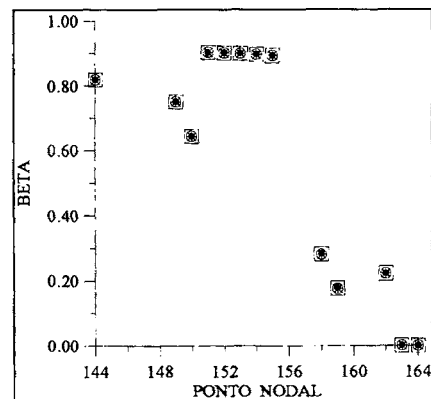


Figura 21. Valores de  $\beta = (1 - D)$   $t = 3,3$  s

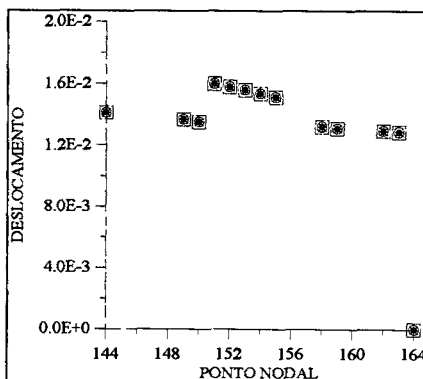


Figura 22. Valores de deslocamento  $t = 3,2$  s

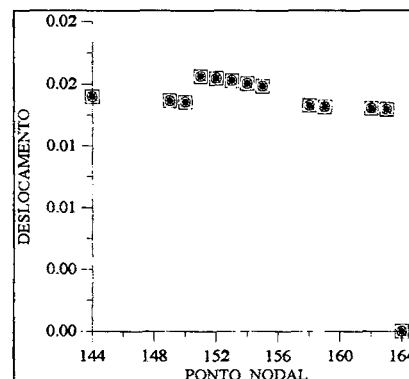


Figura 23. Valores de deslocamento  $t = 3,3$  s

Os símbolos se representam o seguinte: (o) Euler implícito, (●) Euler explícito, (□) regra de Trapézio e (\*) problema monolítico.

Desse modo, os resultados apresentados nesta seção demonstram que o método de partição do operador é capaz de fornecer resultados com a mesma ordem de precisão que os outros métodos que resolvem o problema acoplado. Deve-ser ressaltar que o último método é computacionalmente mais caro, já que exige entre outras coisas mais tempo de processamento.

## CONCLUSÕES

A teoria de dano dependente do gradiente proposta neste trabalho é capaz de descrever a evolução não-linear do dano, bem como os campos de tensão e deslocamento sobre uma placa formada por material elástico frágil, como por exemplo, concreto, vidro cerâmica e geomateriais.

Um método numérico simples foi utilizado na aproximação do problema matemático não-linear resultante sem a necessidade de uma modificação radical de um código de elementos finitos usual. Esse método numérico é formado pela combinação do método de elementos finitos e da técnica de partição do operador, que transforma o problema não-linear global em uma seqüência de problemas lineares mais simples. Além disso, o método numérico proposto tem boa estabilidade e precisão. Permite também uma descrição matematicamente correta dos fenômenos de localização e de amolecimento sem apresentar problemas característicos de sensibilidade à malha (mesh dependence)<sup>16</sup>. Tais fenômenos podem ser representados, através do modelo, a partir dos valores dos coeficientes  $k$  e  $C$ , que juntamente com valores de  $w$  simulam os diversos tipos de materiais elásticos frágeis. Informações adicionais sobre o método numérico utilizado podem ser encontradas em<sup>12</sup>.

## AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer à FAPERJ - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro, ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico e à PUC-Rio - Pontifca Universidade Católica do Rio de Janeiro.

## REFERÊNCIAS

- 1 L.M. Kachanov, "Introduction to continuum damage mechanics", Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Netherland, (1986).
- 2 J. Lemaitre e J.L. Chaboche, "Mechanics of solid materials", Cambridge University Press, (1990).
- 3 J.K. Knowles e E. Sternberg, "On the failure of ellipticity and the emergence of discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics", *J. Elasticity*, Vol. 8, pp. 329-378, (1978).
- 4 S.T. Pietruszczak e Z. Mróz, "Finite element analysis of deformation of strain softening materials", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 17, pp. 327-334, (1981).
- 5 A. Needleman, "Material rate dependence and mesh sensitivity in localisation problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 67, pp. 69-87, (1987).
- 6 Z.P. Bažant e G. Pijandier Cabot, "Non-local continuum damage, localisation, instability and convergence", *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 55, pp. 287-293, (1988).
- 7 J.H.P. de Vree, W.A.M. Brekelmans e M.A.J. van Gils, "Comparison of non-local approaches in continuum damage mechanics", *Computer and Structures*, Vol. 55, N° 4, pp. 581-588, (1995).
- 8 Z.P. Bažant e L. Cedolin, "Stability of structures-elastic, inelastic and damage theories", Oxford University Press, (1991).
- 9 H. Costa-Mattos, M. Frémond e E.N. Mamiya, "A simple model of the mechanical behaviour of ceramic-like material", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 20, N° 24, pp. 3185-3200, (1992).

- 10 M. Frémond e B. Nedjar, "Damage gradient of damage and principle of virtual power", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. **33**, Nº 8, pp. 1083-1103, (1996).
- 11 H. Costa-Mattos e R. Sampaio, "Analysis of the fracture of brittle elastic materials using a continuum damage model", *Structural Engng. and Mech.*, Vol. **3**, Nº 5, pp. 411-428, (1995).
- 12 S.M. Pires Domingues, "Análise de materiais elásticos frágeis através de um modelo de dano contínuo", Tesis Doctoral, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio, (1996).
- 13 N.N. Yanenko, "*The method of fractional steps*", Springer Verlag, New York, (1980).
- 14 J.C. Simo e C. Miehe, "Associative coupled thermoplasticity at finite strains formulation, numerical analysis and implementation", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **98**, pp. 41-104, (1992).
- 15 T.J. Hughes, "*The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*", Prentice Hall, (1987).
- 16 J. Carmeliet e R. de Borst, "Stochastic Approaches for damage evolution in standard and  $N$  continua", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. **32**, Nº 8/9, p. 1160, (1995).