

REPRESENTACION DE MATERIALES VISCOELASTICOS CON APLICACION A ESTRUCTURAS DE HORMIGON. PARTE I: VISCOELASTICIDAD LINEAL.

GUILLERMO J. CREUS

*Departamento de Ingeniería Civil
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre, RS, BRASIL*

RESUMEN

Se presenta una formulación para las relaciones constitutivas viscoelásticas de sólidos estructurales basada en el concepto de variables de estado, enfatizando algunas características particulares del hormigón. Combinando estas ecuaciones con un método variacional adecuado para representar procesos incrementales en deformaciones finitas se obtiene la correspondiente formulación de elementos finitos que es aplicada a problemas de estabilidad, de estructuras no homogéneas y de relajación térmica.

SUMMARY

A unified formulation for the viscoelastic constitutive relations of structural solids based in the state space concept with emphasis in concrete-like materials is presented. The equations are combined with a variational principle adequate for finite deformations in order to obtain a Finite Elements formulation, which is applied to stability problems, to non-homogeneous structures and to the analysis of thermal relaxation.

INTRODUCCION

Las técnicas de análisis viscoelástico pueden ser reunidas en tres grupos principales:

- i) soluciones cuasi-estáticas
- ii) técnicas operacionales
- iii) métodos discretos

Las soluciones cuasi-estáticas utilizan propiedades elásticas "equivalentes a" o "reducidas de" las propiedades viscoelásticas reales, para ciertas condiciones de carga, tiempo o temperatura. Al desconocer los detalles de las historias de carga y condiciones ambientales, estos métodos introducen aproximaciones en general no acotadas, pero son muy útiles en circunstancias especiales o para análisis preliminares¹

Recibido: Junio 1988

Las técnicas operacionales y en particular las transformadas de Laplace y Fourier son aplicables a materiales lineales y sin envejecimiento. La inversión de las transformadas puede ser realizada en forma numérica².

Las formulaciones directas, que llevan en consideración la historia del proceso, son generales y pueden expresar las relaciones constitutivas en forma diferencial o en forma integral. Los métodos numéricos y programas computacionales para el análisis de estructuras complejas sometidas a cargas arbitrarias han tenido en los últimos veinte años un desarrollo explosivo. Muchos programas de interés práctico para el análisis de problemas reales pueden ser utilizados en ordenadores de bajo costo; de esta manera resulta actualmente más expeditivo realizar un análisis con procedimientos numéricos en base a teorías "exactas" que intentar alguna solución simplificada - generalmente correspondiente a las aproximaciones denominadas cuasi-estáticas.

En este trabajo que es una extensión de la referencia 3 presentamos una formulación unificada para el análisis computacional de estructuras construidas con materiales viscoelásticos lineales (en particular hormigón bajo cargas de servicio), basada en el método de los elementos finitos y en el formalismo de las variables de estado.

En la segunda Sección partimos de la formulación funcional que para el caso lineal es introducida a través del teorema de Riesz como una relación integral, que tomamos como referencia, pero dando mayor énfasis a la representación diferencial en base a variables de estado, basada en trabajos de Onat⁴ y que puede ser obtenida de la anterior en forma matemática y termodinámicamente consistente y es más adecuada para el análisis incremental en el tiempo. Esta formulación contiene como caso particular las representaciones clásicas en base a modelos reológicos pero es más amplia y puede ser generalizada al caso de la viscoelasticidad no lineal. Son incluidas algunas expresiones usadas para representar la fluencia del hormigón y conceptos básicos sobre análisis en presencia de deformaciones finitas.

En la Sección siguiente se generaliza la formulación viscoelástica introduciendo como variables adicionales medidas del estado higrométrico, a fin de modelar efectos como retracción y fluencia de secado ("drying creep"). Se muestra nuevamente la conveniencia de utilizar desde un principio formulaciones con variables de estado, para su posterior generalización inclusive al caso no lineal. Desde el punto de vista numérico esta formulación conduce a problemas similares a los estudiados en consolidación de materiales porosos con difusión, bastante comunes en ingeniería de terrenos. En el caso del hormigón, investigaciones pioneras en ese sentido han sido realizadas por el grupo de Argyris⁵.

En la cuarta Sección presentamos la formulación en elementos finitos utilizando un principio variacional debido a Hill⁶ que es particularmente conveniente para análisis incrementales. Se muestra que de esta manera los efectos viscoelástico y no lineal se desacoplan permitiendo una solución simple del problema.

Finalmente, en la última Sección se presentan varios ejemplos resueltos con diversos programas, pero siempre con el método incremental y aplicación de cargas viscoelásticas. Estos ejemplos incluyen análisis de estabilidad en el tiempo de reticulados planos con deformaciones finitas, análisis de estructuras de porticos homogéneos y no homogéneos (con vigas mixtas acero-hormigón) y estados planos de tensión con no homogeneidad decorrente de distribución no uniforme de temperatura.

RELACIONES BASICAS DE LA VISCOELASTICIDAD LINEAL

La forma más general de relación constitutiva para un material inelástico es

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \mathcal{D} \int_{\tau = \tau_0}^t [\sigma(\mathbf{x}, \tau)] \quad (1)$$

que simplemente indica que la deformación $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ en el punto \mathbf{x} y en el instante t depende de la historia de tensiones $\sigma(\mathbf{x}, \tau)$ aplicada en ese punto desde un tiempo τ_0 inicial asumido como referencia y el instante actual t .

σ, ε pueden ser interpretados como tensores (con componentes cartesianos $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}; i, j = 1, 2, 3$) o como componentes aislados. Qué caso corresponde quedará claro por el contexto y cuando sea necesario, los subíndices serán usados explícitamente. Asimismo, la dependencia sobre la partícula \mathbf{x} será en general sobrentendida.

Esta representación se torna simple y útil en el caso de la viscoelasticidad lineal. El conjunto de todas las historias de tensión es un espacio de Hilbert y de acuerdo con el teorema de Frechet-Riesz cada funcional lineal acotado en un espacio de Hilbert tiene una representación como producto interno^{7,8}.

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t D(t, \tau) d\sigma(\tau) \quad (2)$$

o bien

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t D(t, \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau + \sum_i D(t, \tau_i) \Delta\sigma(\tau_i)$$

El segundo término en el segundo miembro lleva en consideración el efecto de variaciones bruscas de tensión para las cuales la derivada $\dot{\sigma}$ no está definida, y es normalmente sobrentendido.

Consideremos ahora una historia especial, el caso de un impulso de tensión, dado por

$$H(t - \tau_0) \equiv \begin{cases} 0 & , t < \tau_0 \\ 1 & , t > \tau_0 \end{cases} \quad (3)$$

En esta historia el material es mantenido descargado hasta un cierto tiempo τ cuando es súbitamente cargado con una tensión unitaria que es mantenida constante de allí en adelante. En (1) tenemos ahora una función de dos variables en lugar de un funcional porque esta historia es completamente especificada por dos valores, el valor del impulso de deformación σ_0 y el tiempo τ_0 en que tomó lugar. Substituyendo la (3) en la (2) tenemos

$$\varepsilon(t) = D(t, \tau_0)$$

donde la función de fluencia $D(t, \tau)$ puede ser interpretada como $D(t - \tau, \tau)$ en el caso general (con envejecimiento) y como $D(t - \tau)$ en el caso invariable. Otras formas útiles pueden ser fácilmente obtenidas. Por ejemplo, integrando (2) por partes tenemos

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{\tau_0}^t d(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (4)$$

donde

$$E(t) = 1/D(t, t)$$

$$d(t, \tau) = -\frac{\partial D(t, \tau)}{\partial \tau}$$

También puede ser útil la relación

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t)} + \int_{\tau_0}^t \dot{D}(t, \tau) d\sigma(\tau) \quad (5)$$

obtenida derivando (2) con relación al límite superior mediante la fórmula de Leibnitz. Existe una formulación dual equivalente, que coloca las deformaciones como variables de control. Así tenemos, por ejemplo

$$\sigma(t) = \int_{\tau_0}^t E(t, \tau) d\varepsilon(\tau) \quad (6)$$

donde $E(t, \tau)$ es denominada función de relajación. De (2) y (6) podemos establecer

$$\int_{\tau_0}^t D(t, \tau) dE(\tau, \tau_0) = H(t - \tau_0)$$

que permite calcular una de las funciones básicas una vez conocida la otra. Vemos que en general (caso de materiales con envejecimiento) D y E dependen de dos argumentos: el tiempo t de observación y el tiempo τ en que es aplicada la sollicitación. En algunos casos (materiales sin envejecimiento o invariantes) dependen sólo de la diferencia $(t - \tau)$.

Representación mediante variables de estado

Representaciones funcionales del tipo (1), etc. demandan el conocimiento de toda la historia pasada de deformación a fin de predecir la respuesta futura. Esta es una demanda filosóficamente exagerada y físicamente irrealizable. Algunos materiales reales pueden ser representados mediante expresiones del tipo (2), si se introduce el concepto de memoria evanescente ("fading memory"), como postulado adicional que establece que las sollicitaciones ocurridas en el pasado más lejano no tienen importancia. Aún así, la necesidad de considerar largas historias en cada uno de sus detalles significativos resulta costoso desde el punto de vista computacional. Particularmente para análisis numéricos resulta conveniente el uso de una representación en función de variables de estado. Para fundamentar heurísticamente esta representación se debe aceptar que las propiedades inelásticas del material pueden ser descritas (al menos aproximadamente)

por medio de un conjunto de cantidades tensoriales que en un sentido de promedio global miden las mudanzas microestructurales que toman lugar en un dado material durante una dada historia de deformación. El estado de una partícula material es definido a través de la tensión y de otras funciones de estado y variables internas, consideradas como variables de estado.

Este concepto es aplicable a materiales que en el curso de su deformación sufren cambios microestructurales que resultan en propiedades mecánicas que dependen de la historia porque la historia altera el material; es evidente que en estos casos la estructura interna debe contener a cada instante información sobre la parte significativa de la historia de deformación pasada. Los metales en relación a la plasticidad y el hormigón en relación a la plasticidad y la viscoelasticidad pertenecen a esta categoría. Podemos esperar entonces que el efecto macroscópico de estas modificaciones microscópicas pueda ser representado por medio de un conjunto de n variables internas ξ que en un cierto sentido promedio representan los cambios microscópicos. Las ξ son en general cantidades tensoriales de diferentes órdenes. El espacio de los estados es $S = \{\sigma, \xi\} \subset R^N$. Un punto en S es indicado por un conjunto ordenado de N números reales. Se asume que el estado de una partícula es completamente determinado por un punto en S . Un proceso de deformación anelástico es representado por una trayectoria en el espacio de estados. En este caso σ y ξ son las variables de estado. Otras cantidades, como el tensor de deformaciones ε son funciones de estado definidas sobre S . Al igual que en el caso de la representación funcional podemos usar a ε como variable de estado en lugar de σ .

Lo anterior es expresado formalmente

$$\varepsilon = f(\sigma, \xi)$$

$$\dot{\xi} = g(\sigma, \xi)$$

donde la segunda expresión es conocida como ley de evolución. Notamos que las ecuaciones clásicas de la plasticidad incremental vienen dadas en esta forma. La elasticidad corresponde al caso en que no existen variables de estado aparte de ε o de σ . Una transición elástica es la que toma lugar para valores constantes de ξ (sobre el hiperplano $\xi = \text{const.}$ en S). Muchos materiales viscoelásticos bajo cargas o descargas rápidas y materiales elastoplásticos bajo cargas reducidas se comportan (al menos en un sentido aproximado) elásticamente. En el caso lineal, las relaciones anteriores toman la forma

$$\begin{aligned} \varepsilon &= a_1 \sigma + a_2 \xi \\ b_1 \sigma + b_2 \xi + b_3 \dot{\sigma} + b_4 \dot{\xi} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

A continuación veremos como se puede colocar a una formulación viscoelástica de tipo (4) en la forma (7).

Relación con la representación integral

Consideremos por simplicidad el caso invariante de la expresión uniaxial (4). Desarrollando el núcleo $d(t - \tau)$ en la forma

$$d(t - \tau) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-(t-\tau)/T_i}$$

de serie exponencial podemos obtener una aproximación tan buena como sea necesario incluyendo suficiente número de términos. Si definimos las n cantidades

$$\xi_i = \int_0^t a_i e^{-(t-\tau)/T_i} \sigma(\tau) d\tau \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$

podemos ver que

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (9)$$

Por otro lado, derivando la (8) con relación al extremo superior tenemos

$$\dot{\xi}_i + \frac{\xi_i}{T_i} = a_i \sigma \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

Vemos que (9) y (10) junto con condiciones iniciales obvias equivalen a la representación (4). Cabe notar con relación a esta representación que:

- i) Hemos reducido una ecuación integral a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales desacopladas; este cambio es favorable, especialmente desde el punto de vista computacional, siempre que n no sea demasiado grande; como veremos más abajo éste es el caso del hormigón.
- ii) La (10) representa un modelo reológico de tipo Kelvin-Voigt con muelle $(a_i T_i)^{-1}$ y amortiguador a_i^{-1} . Otras representaciones similares correspondientes al modelo de Maxwell pueden ser fácilmente obtenidas.
- iii) El conocimiento de, o hipótesis sobre la microestructura del material pueden ser utilizadas para escribir directamente ecuaciones del tipo (7) (Ver la próxima Sección).

Para el caso de materiales con envejecimiento podemos partir de la (5) y con un procedimiento similar llegaremos a ecuaciones del tipo

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \frac{\dot{\sigma}}{E(t)} + \sum_{i=1}^n \dot{\xi}_i \\ \dot{\xi}_i + \frac{\xi_i}{T_i} &= a_i \dot{\sigma} \end{aligned}$$

Fundamentación termodinámica

La energía libre complementaria en un elemento material, indicada por $G(\sigma, \xi)$ es definida como una función de la tensión σ y de las variables internas ξ . Puede ser demostrado en base a consideraciones termodinámicas⁹, que es

$$\varepsilon(t) = \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (11)$$

y que cada proceso de deformación admisible debe satisfacer la desigualdad

$$\frac{\partial G}{\partial \xi_i} \cdot \dot{\xi}_i \geq 0 \quad (12)$$

Si postulamos para G la expresión cuadrática

$$G = \frac{\sigma^2}{2E} + A_i \xi_i \sigma + \frac{1}{2} B_i \xi_i^2 \quad (13)$$

y si adoptamos

$$\frac{\partial G}{\partial \xi_i} = H \dot{\xi}_i \quad , \quad H \geq 0 \quad (14)$$

a fin de satisfacer la (12), tendremos de (11)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + A_i \xi_i$$

en tanto que (13) y (14) determinan

$$H_i \dot{\xi}_i + B_i \xi_i = A_i \sigma$$

De esta manera hemos obtenido nuevamente las relaciones básicas mostrando que éstas cumplen con las limitaciones impuestas por las condiciones de disipación termodinámica. La forma lineal deriva del uso de una función cuadrática en (13), y puede ser generalizada.

Generalización al caso de tensiones multiaxiales y temperatura no homogénea

En la representación integral (2) la generalización al caso en que σ es una tensión multiaxial se obtiene substituyendo $D(t, \tau)$ por un operador tensorial de cuarto orden con las simetrías correspondientes. Con la representación en base a variables de estado podemos escribir, para el caso isotrópico

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{\sigma_0}{3K} + \sum_{i=1}^n \xi_i^0 & ; & & \xi_i^0 + \frac{\xi_i^0}{T_i^0} &= a_0 \tau_0 \\ e_{ij} &= \frac{s_{ij}}{2G} + \sum_{i=1}^n \xi_i^d & ; & & \xi_i^d + \frac{\xi_i^d}{T_i^d} &= a_i s_{ij} \end{aligned} \quad (15)$$

donde σ_0 , s y ε_0 , e indican las tensiones y deformaciones esféricas y desviadoras respectivamente. Más usual, al menos en aplicaciones en estructuras de hormigón en el rango lineal, es asumir con buena aproximación que el módulo de Poisson ν es constante, y que podemos escribir en la ecuación (4) $d_{ijkl} = E d(t, \tau) D_{ijkl}$ donde D_{ijkl} es la matriz constitutiva elástica. Por ejemplo, para una situación de estado plano de tensiones tenemos

$$d_{ijkl}(t, \tau) = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \nu \end{bmatrix} d(t, \tau) \quad (16)$$

Con el método de las variables de estado podemos utilizar simplemente las (10) y las pseudo-tensiones

$$\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11} - \nu \sigma_{22}$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \sigma_{22} - \nu \sigma_{11}$$

$$\bar{\sigma}_{12} = 2(1 + \nu) \sigma_{12}$$

El concepto de variables de estado permite también la representación de los efectos térmicos de una manera bastante natural. Así, es posible hacer que tanto el tiempo de retardación T_i como la viscosidad η_i sean funciones de la temperatura θ . Ajustando convenientemente esta dependencia, podemos obtener variaciones en los valores iniciales y finales y en las tasas de deformación de acuerdo con los datos experimentales. En el caso del hormigón es conveniente recordar que cuando existe una historia variable de temperatura ésta influye en el proceso de envejecimiento del material, que puede ser acelerado o retardado. Por tanto, es más conveniente usar, en lugar de la edad o la temperatura, a la "madurez" m como variable de estado adicional, escribiendo

$$\dot{m} + \frac{m}{T_m} = a \theta$$

donde a y T_m son constantes. En lugar de la (10) tendremos ahora

$$\dot{\xi}_i + \frac{\xi_i}{T_i(m, \theta)} = a_i(m, \theta) \sigma \quad (17)$$

Relaciones empleadas para el hormigón en estructuras simples

Obviamente, las ecuaciones anteriores comprenden como casos particulares a las fórmulas de Dischinger y Arutyunian que corresponden respectivamente a un modelo de Maxwell y a un modelo standard con coeficientes variables⁷.

En el análisis de estructuras simples son corrientemente utilizadas relaciones dadas por normas, basadas en resultados experimentales sobre gran cantidad de especímenes y que llevan en cuenta de manera aproximada las características generales de los materiales empleados y las condiciones ambientales. Naturalmente, no cabe esperar

una aproximación exacta de los resultados reales, más pueden ser usadas para proyecto, particularmente si se trabaja considerando hipótesis de máxima y mínima deformación asumiendo un intervalo de confianza estadístico adecuado. El Código Modelo CEB-FIP establece una relación basada en la fórmula de Dischinger mejorada¹⁰, que puede ser aproximada con la formulación presentada en este trabajo de la forma

$$D(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau_0)} + \sum_{i=1}^n \int_{\tau_0}^t \frac{1}{E_i} (1 - e^{-(t-\tau_0)/T_i}) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{\tau_0}^t \Psi(\tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (18)$$

El primer término del segundo miembro corresponde a la deformación inicial. Este término incluye una parte no reversible que puede ser considerada como una deformación viscoelástica con tiempo de retardación muy reducido, para acomodarla dentro de una ley lineal.

El segundo término es la deformación elástica diferida. Para representarla fueron utilizados elementos Kelvin, con constantes determinadas en forma computacional. Para garantizar un error máximo del 5% con relación a los valores del CEB es suficiente utilizar una cadena con dos elementos Kelvin¹⁵. Un ejemplo de esta aproximación es indicada en la Figura 1. El último término de la (18) corresponde a las deformaciones irreversibles correspondientes aun elemento tipo Maxwell con viscosidad variable.

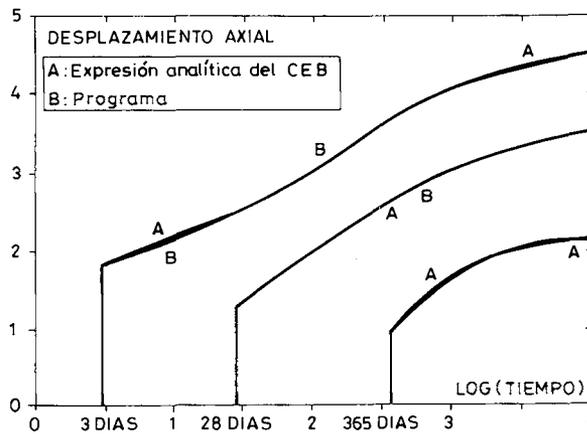


Figura 1. Comparación de los resultados computacionales con las curvas del CEB.

Deformaciones finitas

Las formulaciones anteriores pueden ser generalizadas al caso de deformaciones finitas con relativa facilidad definiendo las variables adecuadas⁸. Este tipo de generalización formal debe ser validado con verificaciones experimentales para los materiales de interés. Consideramos procesos de deformación caracterizados por la relación

$$x(t) = \hat{x}(X)$$

donde x indica la posición actual (deformada) de una partícula originalmente en posición X . La velocidad correspondiente es indicada con $\dot{x} = v$. Localmente aproximamos la deformación mediante el gradiente de deformación

$$F = \frac{\partial x}{\partial X}$$

y el gradiente de velocidad

$$L = \frac{\partial v}{\partial x} = \dot{F}F^{-1}$$

El gradiente de deformación puede ser descompuesto multiplicativamente en la forma

$$F = RU = VR$$

donde U y V representan cambios de forma referidos a la configuración original y deformada respectivamente y R es la correspondiente rotación rígida. Los tensores de Cauchy-Green C y B y el tensor de deformación específica de Green E están dados respectivamente por

$$C = F^T F = U^2$$

$$B = FF^T = V^2$$

$$2E = (C - I)$$

donde I es el tensor unitario.

En este trabajo estamos interesados en formulaciones de tipo lagrangiano actualizado que son convenientes del punto de vista numérico. Estas formulaciones toman el estado actual de deformación (en el instante t) como configuración de referencia. En estas circunstancias

$$F_t = R_t = U_t = V_t = I$$

y las partes simétrica y antisimétrica de L ,

$$2D = (L + L^T) = \dot{U}_t$$

$$2W = (L - L^T) = \dot{R}_t$$

coinciden con los valores instantáneos de la velocidad de deformación y la velocidad de rotación.

Indicamos con σ el tensor de tensiones reales (Cauchy) en la configuración actual y con P y S el primero y segundo tensores de tensión de Piola-Kirchhoff respectivamente:

$$\begin{aligned} P &= (\det F) \sigma F^{-T} \\ S &= (\det F) F^{-1} \sigma F^{-T} \end{aligned} \quad (19)$$

Derivando (19) con relación al tiempo y haciendo $F = I$ para la configuración de referencia obtenemos las tasas

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \sigma \operatorname{tr} D - L \sigma + \dot{\sigma} \\ \dot{S} &= \sigma \operatorname{tr} D - L \sigma - \sigma L^T + \dot{\sigma} \end{aligned}$$

de donde

$$\dot{P} = \dot{S} + \sigma L^T \quad (20)$$

Observamos que para la configuración de referencia $\sigma = P = S$ pero las tasas de tensiones correspondientes no son iguales.

Con esta notación las relaciones viscoelásticas pueden ser colocadas en la forma¹³

$$E(t) = \int_{\tau_0}^t D(t, \tau) dS$$

o en una forma equivalente en función de variables de estado. En cualquier caso podremos colocar, en forma incremental

$$\dot{S} = E (D - D_v) \quad (21)$$

donde D_v corresponde a las deformaciones diferidas y la matriz constitutiva elástica M será en general diferente de la usual.

EL HORMIGON COMO MATERIAL ADSORBENTE-POROSO

Es bien conocido el hecho de que las deformaciones lentas del hormigón tienen características que las diferencian del comportamiento viscoelástico de los materiales simples. Para comenzar, existen deformaciones lentas que toman lugar en ausencia de tensiones externas y son debidas a mudanzas en el estado higrométrico de la atmósfera que rodea al hormigón: fenómenos de retracción e hinchamiento (entumecimiento). Estas deformaciones son no homogéneas y dependen del tamaño del espécimen. Las deformaciones bajo carga también dependen del tamaño del espécimen cargado y de sus condiciones higrométricas. Este tipo de comportamiento es característico de materiales denominados en general "adsorbentes porosos". Existen numerosas hipótesis microestructurales que intentan explicarlo y un cierto consenso de que es resultado de la interacción de varios mecanismos no bien comprendidos. Un estudio completo de

esos procesos debe incluir las interacciones con moléculas del sólido y el fluido y la geometría de las interfases. En estas circunstancias, parece conveniente desarrollar una formulación fenomenológica que no dependa de cualquier teoría microestructural en particular, pero permita formular ecuaciones adecuadas a ciertos mecanismos particulares conocidos o supuestos. En lo que sigue, estableceremos relaciones constitutivas generales en forma funcional, basadas únicamente en ciertas hipótesis muy generales. A continuación las colocaremos en el formalismo de las variables de estado. Finalmente mostraremos como puede ser modelado el comportamiento correspondiente a un modelo microestructural específico.

Hipótesis y variables básicas

Consideraremos las deformaciones isotérmicas y cuasi-estáticas de un cuerpo poroso en presencia de un fluido (gas o líquido) adsorbible de concentración no homogénea, en general variable con el tiempo. En esta situación, el cuerpo en general se deformará de manera no homogénea, la distribución de fluido dentro del sólido será inhomogénea y existirá difusión dentro de los poros. Este esquema parece incluir todas las ideas generalmente aceptadas con relación al fenómeno en estudio. Para describir esta situación debemos introducir ecuaciones constitutivas y leyes de conservación en función de las variables apropiadas. Estas variables serán introducidas como campos continuos, en la hipótesis que el tamaño de los poros es mucho menor que la dimensión del cuerpo. Además estaremos interesados en medir y predecir cantidades que representan localmente promedios tomados sobre un volumen V que es mucho menor que la dimensión del cuerpo y cuya variación sobre el volumen V es suave.

La formulación será restringida al caso de deformaciones pequeñas. El contenido específico de fluido es indicado con $w(\mathbf{x}, t)$ y es la relación entre la masa del fluido y la masa del esqueleto sólido que ocupa el mismo volumen V en la vecindad de \mathbf{x} . El fluido contenido en V está parcialmente adsorbido y parcialmente libre. Contenidos parciales de fluido adsorbido y fluido libre pueden ser definidos cuando sea necesario.

La concentración $h(\mathbf{x}, t)$ del fluido libre dentro del sólido es definida como la masa de fluido por unidad de volumen de fluido libre. En el caso particular del hormigón, h será en general una función de la humedad. Para definir de manera operacional la concentración dentro del sólido, podemos usar un método similar al empleado para definir el estado de tensiones. Así, podemos imaginar aislado un cubo elemental dentro de la masa del sólido, centrado en el punto \mathbf{x} , sujeto a las tensiones que mantienen su equilibrio estático y sujeto a una concentración h que determina balance de concentración en ese punto. Dado que los poros están en contacto con el fluido, la concentración en el contorno del sólido es la concentración del fluido que lo rodea.

El flujo de masa del fluido es representado por un campo vectorial $q(\mathbf{x}, t)$, sujeto a la ley de conservación usual.

Finalmente, consideramos fuerzas de contacto sobre el sólido, que pueden ser aplicadas sin interferir con el flujo de gas. El tensor de tensiones de Cauchy $\sigma(\mathbf{x}, t)$ es definido dentro del dominio ocupado por el cuerpo, satisfaciendo las condiciones de equilibrio interno y la condición de equilibrio con las fuerzas exteriores sobre el contorno. Asumimos la hipótesis de que el movimiento del sólido es cuasi-estático y que las fuerzas de inercia asociadas con el movimiento del fluido son también despreciables.

Relaciones básicas

Las consideraciones físicas y fenomenológicas anteriores conducen a la hipótesis de que, para los materiales considerados la tensión $\sigma(\mathbf{x}, t)$ y el contenido específico de fluido $w(\mathbf{x}, t)$ son función de las historias de deformación y concentración, es decir¹²

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F} \left[\begin{array}{c} t \\ \varepsilon(\mathbf{x}, \tau); h(\mathbf{x}, \tau) \\ \tau = \tau_0 \end{array} \right] \quad (22)$$

$$w(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G} \left[\begin{array}{c} t \\ \varepsilon(\mathbf{x}, \tau); h(\mathbf{x}, \tau) \\ \tau = \tau_0 \end{array} \right]$$

donde \mathcal{F} y \mathcal{G} son funcionales de los argumentos indicados. Las ecuaciones (22) pueden ser consideradas como una generalización de la (1). La dependencia sobre la deformación $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ introduce el efecto de acoplamiento observado en fenómenos reales. La dependencia sobre la historia aparece por causa de la presencia de fenómenos de relajación interna y/o por causa de la existencia de procesos irreversibles. Para completar esta formulación debemos considerar el flujo de fluido. Aquí introducimos la hipótesis de que

$$q(\mathbf{x}, t) = C \text{ grad } h(\mathbf{x}, t) \quad (23)$$

donde C es un funcional de las historias de deformación y concentración. Para un material dado debemos especificar los funcionales de interés, \mathcal{F} , \mathcal{G} y C . Para este propósito debemos hacer algunas hipótesis adicionales. Comenzaremos por analizar el caso de materiales con respuesta lineal e isotrópica.

Materiales isótropos lineales

Asumimos ahora que el material es isótropo en su estado inicial y también que la dependencia de la tensión $\sigma(t)$ y el contenido de fluido $w(\mathbf{x}, t)$ sobre las historias de $\varepsilon(t)$ y $h(t)$ es lineal. Puede ser mostrado que con esta hipótesis y para el caso de materiales invariables los funcionales en (22) aceptan la representación

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t 2M(t-\tau) d\tau + I \int_0^t L(t-\tau) tr \dot{\varepsilon}(\tau) + I \int_0^T A_1(t-\tau) \dot{h}(\tau) d\tau \\ w(\mathbf{x}, t) - w_0 &= \int_0^t A_2(t-\tau) tr \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau + \int_0^t a_3(t-\tau) \dot{h}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (24)$$

donde los núcleos son función de los argumentos indicados e I es el tensor identidad. La forma isótropa lineal de la ecuación de flujo (23) es obtenida simplemente substituyendo C con una constante. Notamos que si la (24) hubiera sido establecida en la forma dual con tensiones como input, establecería en forma natural la separación de la deformación

total en componentes que pueden ser interpretadas como fluencia básica y fluencia de secado ("basic creep" y "drying creep").

Representación mediante variables de estado

Aplicaremos la misma metodología de la sección anterior, asumiendo que los núcleos en (24) pueden ser representados por una suma de exponenciales. El primer núcleo, por ejemplo, con la forma

$$M(t) = \sum_{\alpha=1}^j M_{\alpha} e^{-t/T_{\alpha}}$$

Definimos un conjunto de variables

$$\xi_{\alpha} = \int_0^t e^{-(t-\tau)/T_{\alpha}} \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, j$$

y procedemos de la misma manera con los otros núcleos, introduciendo los conjuntos de variables ξ_{β} ($\beta = j + 1, \dots, k$); ξ_{γ} ($\gamma = k + 1, \dots, L$); ξ_{δ} ($\delta = L + 1, \dots, m$); ξ_{ν} ($\nu = m + 1, \dots, n$). Entonces las (24) pueden ser escritas, en función de las nuevas variables, en la forma

$$\begin{aligned} \sigma &= 2 \sum_{\alpha=1}^j M_{\alpha} \xi_{\alpha} + I \left(\sum_{\beta=j+1}^k L_{\beta} \xi_{\beta} + \sum_{\gamma=k+1}^L A_{\gamma} \xi_{\gamma} \right) \\ w - w_0 &= 2 \sum_{\delta=L+1}^m A_{2\delta} \xi_{\delta} + \sum_{\nu=m+1}^n A_{3\nu} \xi_{\nu} \end{aligned} \quad (25)$$

Las correspondientes leyes de evolución son obtenidas, de nuevo, diferenciando (25) con relación al tiempo, por ejemplo

$$\dot{\xi}_{\alpha} = -\frac{\xi_{\alpha}}{T_{\alpha}} + \dot{\epsilon}$$

Ecuaciones similares pueden ser obtenidas para las otras variables. Cuando las variables de estado son introducidas sin referencia a una representación integral, obtendremos en lugar de las formas canónicas una ley de evolución que incorpora ecuaciones lineales acopladas de las coordenadas de los vectores de estado y las cantidades que definen la tasa de la variable input.

Material adsorbente poroso con relajación interna

Cuando se usa una representación basada en el concepto de estado, el conocimiento de la estructura interna del material o las hipótesis hechas con relación a esa estructura permiten estimar la forma de la representación y el número de variables internas a considerar. Para mostrar esto postularemos un material con una dada estructura interna y procederemos a la obtención de las correspondientes ecuaciones constitutivas.

Sea un material adsorbente poroso compuesto de un esqueleto sólido elástico que contiene poros de dos tipos diferentes. Asumimos que una red de poros relativamente grandes se extiende sobre el cuerpo; la mayor parte del flujo de fluido adsorbible a través del cuerpo y entre el cuerpo y el exterior toma lugar en esos poros. Además, postulamos la existencia de un gran número de poros menores que son tributarios de los mayores. Esta hipótesis microestructural sugiere que las siguientes variables pueden ser apropiadas para la descripción del estado local del material en un instante dado t : $h(t)$, la concentración promedio del fluido libre dentro de los poros mayores; $w_a(t)$, el contenido específico de fluido adsorbido; $\varepsilon(t)$, la deformación específica del material sólido. $h(t)$ y $w_a(t)$ definen el estado del fluido en los poros grandes y pequeños respectivamente. En un elemento que ha alcanzado el estado de equilibrio, $w_a(t)$ será una función de los valores actuales de $h(t)$. Pero en un elemento que no está en equilibrio (de difusión y adsorción) la difusión del fluido de los poros grandes a los pequeños continúa, dando lugar a un proceso de relajación interna. Esta observación indica que $w_a(t)$ debe ser considerada una variable de estado independiente.

Considerando entonces que en $t = 0$ el material es isótropo y está en equilibrio rodeado por un fluido de concentración $h(t)$, que los correspondientes valores en equilibrio para los contenidos total y adsorbido de fluido son w_0 y w_{a0} respectivamente y que estamos interesados en el estudio de pequeñas desviaciones desde ese estado de equilibrio, podemos escribir, en base a (7)

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda(\text{tr } \varepsilon)I + Ib_1(w_a - w_{a0}) + Ic_1(h - h_0) \quad (26)$$

$$w - w_0 = (w_a - w_{a0}) + b_2 \text{tr } \varepsilon + b_3(h - h_0)$$

y como ecuaciones de evolución

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}$$

$$\dot{h} = \dot{h} \quad (27)$$

$$\dot{w}_a = -\frac{w_a - w_{a0}}{T} + b_4 \text{tr } \dot{\varepsilon} + b_5(h - \dot{h}) + c_2 \text{tr } \dot{\varepsilon} + c_3 \dot{h}$$

Notamos que las constantes λ, μ y $b_1, \dots, b_5, c_1, \dots, c_3$ son en general funciones del estado inicial. En particular, si $h_0 = 0$ y $w_0 = 0$ entonces los coeficientes b_2 y b_4 deben ser nulos pues de otro modo las ecuaciones (26) y (27) predecirían el incremento de contenido de fluido para un material "seco" en atmósfera "seca". Podemos todavía reducir el número de constantes en las relaciones constitutivas (26) y (27) tomando $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Las hipótesis adicionales introducidas de esta manera son consistentes con las hipótesis originales relativas a la estructura del material y al tipo de problema considerado. Por ejemplo, $c_1 = 0$ corresponde al hecho que la presión del fluido libre es del orden de la presión atmosférica y por lo tanto su efecto mecánico directo es despreciable. Por otro lado, $c_2 = c_3 = 0$ indican que un cambio brusco en h y ε no producen un cambio brusco en w_a . Esto es consistente con nuestras hipótesis, dado que un aumento de w_a toma lugar mediante la difusión a través de los poros pequeños

y este proceso necesita de un período de tiempo del orden de T .

Integrando (27) para un par de historias ε y h y con las correspondientes condiciones iniciales y combinando las expresiones resultantes con (26) obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{x}, t) = & 2\mu\varepsilon(\mathbf{x}, t) + I(\lambda \operatorname{tr} \varepsilon(\mathbf{x}, t) + b_1 b_4 T \int_0^t (1 - e^{-(t-\tau)/T}) \operatorname{tr} \dot{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau) d\tau) \\ & + I(b_1 b_5 T \int_0^t (1 - e^{-(t-\tau)/T}) \dot{h}(\mathbf{x}, \tau) d\tau) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}, t) - w_0 = & b_2 \operatorname{tr} \varepsilon(\mathbf{x}, t) + b_3(h(\mathbf{x}, t) - h_0) \\ & + T \int_0^t (1 - e^{-(t-\tau)/T}) b_4 \operatorname{tr} \dot{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau) + b_5 \dot{h}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \end{aligned}$$

Notamos que las (28) son de la forma (24), indicando que las hipótesis hechas con relación a la estructura interna del material nos han permitido construir los núcleos de la correspondiente representación integral. Estructuras internas más complicadas que asignen comportamiento viscoelástico al material del esqueleto e introduzcan varios tipos de relajación adicional para la difusión del fluido en los poros producirán ecuaciones constitutivas del tipo (24) con núcleos más complejos. La formulación anterior puede también ser extendida al campo no lineal físico, considerando por ejemplo un esqueleto de material elastoplástico y/o leyes no lineales de difusión. En este caso no obtendremos relaciones del tipo (24), pero podremos trabajar directamente con la representación en variables de estado.

FORMULACION PARA ELEMENTOS FINITOS

A continuación presentamos en forma resumida la formulación correspondiente al análisis por elementos finitos. Para aplicarla en un ejemplo que considera deformaciones finitas, estableceremos las ecuaciones para este caso general, cuando la estrategia de solución es del tipo denominado "lagrangiano actualizado", que toma la configuración actual como configuración de referencia. La formulación normal, correspondiente a deformaciones pequeñas aparece como caso particular.

Principio variacional incremental

La condición de equilibrio en la configuración de referencia puede ser colocada en función del primer tensor de tensiones de Piola- Kirchhoff en la forma

$$\operatorname{div} P + b = 0$$

Integrando esta relación sobre un campo de velocidades compatible obtenemos el principio variacional propuesto por Hill⁶ que para el caso en que la configuración de referencia coincide con la actual puede ser escrito

$$\int_v \dot{P} \cdot \delta L dv = \int_{s_\sigma} \dot{t} \cdot \delta v ds + \int_v \dot{b} \cdot \delta v dv \quad (29)$$

o en vista de la (20)

$$\int_v \left\{ \dot{S} \cdot \delta D + \frac{1}{2} \dot{\sigma} \cdot \delta (L^T L) \right\} dv = \int_{s_\sigma} \dot{t} \cdot \delta v ds + \int_v \dot{b} \cdot \delta v dv \quad (30)$$

El punto superpuesto indica como de costumbre tasas con relación al tiempo, b es el vector de fuerzas de cuerpo por unidad de volumen y f es el vector de fuerzas de contacto por unidad de superficie, siempre para la configuración de referencia. En el caso de pequeñas deformaciones substituyendo $\dot{P} = \dot{\sigma}$ en la (29) tenemos la relación usual

$$\int_v \dot{\sigma} \cdot \delta \dot{\epsilon} dv = \int_{s_\sigma} \dot{t} \cdot \delta v ds + \int_v \dot{b} \cdot \delta v dv \quad (31)$$

Elementos finitos

Interpolando las velocidades dentro del elemento en función de las correspondientes incógnitas nodales V en la forma

$$v(x) = N(x) V$$

podemos también escribir

$$D = B V$$

$$L = N V$$

Substituyendo éstas y la (21) en la (30) obtenemos, para un elemento genérico, una matriz de rigidez de la forma

$$K^e = \int_{v_e} B^T E B dv_e + \int_{v_e} \overline{N}^T \sigma \overline{N} dv_e \quad (32)$$

El primer término K_L^e representa la parte lineal y el segundo término K_G^e la parte no lineal corrientemente denominada matriz de rigidez geométrica. El vector de fuerzas nodales es dado por

$$P_i^e = \int_{V_i} \left(B^T E D_v + N^T \dot{b} \right) dV_e + \int_{s_\sigma} N^T \dot{t} ds \quad (33)$$

donde están incluídas las fuerzas derivadas de la deformación viscoelástica. La ventaja de este planteamiento es que separa los efectos de tipo geométrico de los efectos viscoelásticos y por lo tanto puede ser resuelto computacionalmente con métodos convencionales.

Integración en el tiempo

Consideremos ecuaciones de evolución del tipo

$$\dot{\xi} + \frac{\xi}{T} = g \quad (34)$$

El algoritmo de integración más simple es el proceso directo de Euler:

$$\xi_{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{T_n}\right) \xi_n + g_n \Delta t$$

que necesita únicamente de los valores de las variables de estado al principio de cada intervalo, que son al mismo tiempo las condiciones iniciales. Su principal inconveniente es que para garantizar estabilidad de la solución el máximo intervalo de integración debe ser del orden del menor tiempo de retardación. Por otro lado, considerando a la función $g(t)$ como sectorialmente lineal podemos integrar (34) en forma analítica exacta, encontrando la relación

$$\xi_{n+1} = e^{-\Delta t/T_n} \xi_n + \left(1 - e^{-\Delta t/T_n}\right) g_n T + \left(\frac{\Delta t}{T_n} + e^{-\Delta t/T_n} - 1\right) \frac{g_{n+1} - g_n T_n^2}{\Delta t}$$

Para valores constantes de $g(t)$ en cada etapa podemos también escribir

$$\xi_{n+1} = e^{-\Delta t/T_n} \xi_n + \left(1 - e^{-\Delta t/T_n}\right) g_n \quad (35)$$

Otros métodos de integración más sofisticados pueden ser encontrados en la referencia 13 entre otras.

EJEMPLOS

Deformaciones finitas y estabilidad de reticulados viscoelásticos

Para el caso de una barra de longitud L , área A y módulo elástico E , originalmente en la dirección del eje x , las funciones de interpolación están dadas en la forma

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - x/L & 0 & x/L & 0 \\ 0 & (1 - x/L) & 0 & x/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = N U^e$$

donde u y v son las velocidades en las direcciones x, y y U_1, V_1 y U_2, V_2 son los correspondientes valores nodales. Determinando las correspondientes matrices B y N , substituyendo en (32) e integrando tenemos las matrices de rigidez

$$K_L^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad K_G^e = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde σ fue substituído por N , fuerza axial en la barra (tracción positiva). Aplicando la (33) obtenemos la carga viscoelástica

$$\dot{P}_v = E A D_v \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

“Snap through” de un sistema de dos barras

Este ejemplo, indicado en Figura 2 es corrientemente empleado para la validación de métodos de análisis no lineal; aquí compararemos nuestros resultados con la solución viscoelástica de Hult¹⁴, que usa una aproximación en que se substituyen las funciones trigonométricas por el primer término de sus desarrollos en serie y por tanto sólo es válida para valores pequeños del ángulo θ .

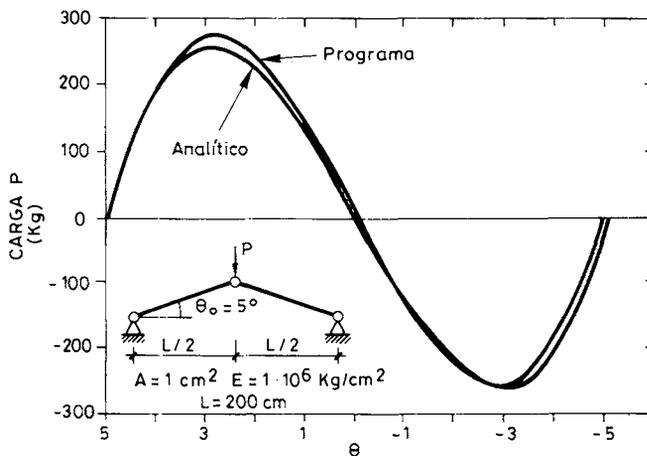


Figura 2. Estructura analizada y comportamiento elástico.

La Figura 2 indica los resultados correspondientes al comportamiento elástico, obtenida por un proceso incremental (sin iteraciones) comparados con los resultados teóricos.

La solución viscoelástica teórica puede ser obtenidos con relativa facilidad en el caso del comportamiento correspondiente al modelo de Maxwell con ecuación $D = \frac{\sigma}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{\eta}$, en la forma de una relación entre el tiempo t y el correspondiente valor de θ

$$t = T \ln \frac{\theta}{\theta_e} - \frac{2\eta A}{3P} (\theta^3 - \theta_e^3) \quad (36)$$

donde T y η son el tiempo de relajación y el coeficiente de viscosidad del modelo y θ_e es la deformación elástica dada por $AE\theta_e(\theta_0^2 - \theta_e^2) = P$.

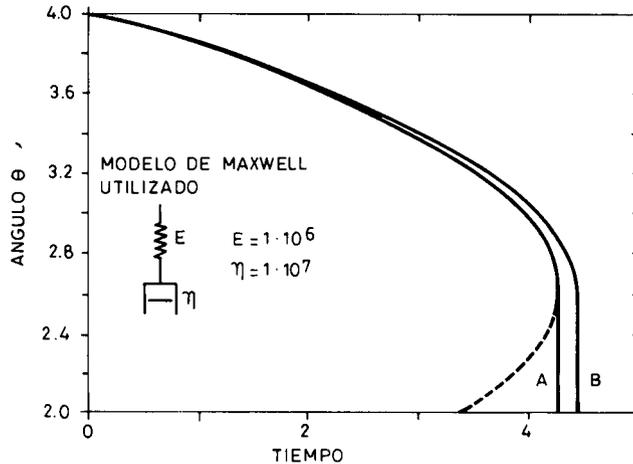


Figura 3. Comportamiento para el caso viscoelástico. A: solución exacta, B: Solución numérica.

Los resultados numéricos obtenidos y los correspondientes a (36) son comparados en la Figura 3. El análisis de esta estructura para el caso de un elemento tipo Kelvin así como el de estructuras reales con modelos reológicos más complejos puede ser encontrado en¹⁵.

Análisis de estructuras con viga mixta

Podemos analizar estructuras con barras mixtas¹⁶ (acero-hormigón) como la indicada en la Figura 4, con las hipótesis normales en el análisis técnico de vigas: deformaciones y desplazamientos pequeños, hipótesis de Navier (excluyendo el deslizamiento entre acero y hormigón, lo que es razonable en el período lineal), secciones y propiedades constantes entre puntos nodales. En este caso la relación variacional se reduce al caso usual de pequeñas deformaciones; por otro lado debemos llevar en consideración la presencia de dos materiales, uno solo de los cuales tiene deformaciones viscoelásticas.

Para determinar las matrices de rigidez correspondientes al acero y al hormigón interpolamos los desplazamientos llevando en cuenta las distancias al eje baricéntrico de la sección compuesta. Para la placa de hormigón, por ejemplo, es

$$\begin{bmatrix} u_c \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -y_c \frac{d}{dx} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (37)$$

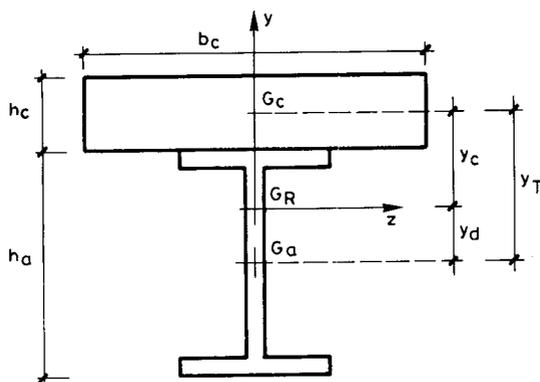


Figura 4. Parámetros para el análisis de la viga mixta.

donde y_c es la distancia entre el centro de gravedad de la placa y el del conjunto.

Interpolando los desplazamientos a lo largo del eje baricéntrico en la forma usual

$$u = \Psi U^e \quad , \quad v = \Phi V^e$$

donde Ψ y Φ son las funciones de interpolación "exactas" para barras prismáticas obtenemos de (37)

$$u_c = N_c U^e$$

donde

$$u_c = \begin{bmatrix} u_c \\ v_c \end{bmatrix} \quad ; \quad N_c = \begin{bmatrix} \Psi & -y_c \Phi' \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \quad ; \quad U^e = \begin{bmatrix} U^n \\ V^n \end{bmatrix}$$

y de ahí

$$\epsilon_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_c}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 v_c}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{O_c} \\ \chi_c \end{bmatrix} = B_c U^e \quad ; \quad B_c = \begin{bmatrix} \Psi' & -y_c \Phi'' \\ 0 & -\Phi'' \end{bmatrix} \quad (38)$$

donde ϵ_{O_c} es la deformación axial baricéntrica y χ es la curvatura del eje de la sección de la placa.

Substituyendo el valor de B_c en la expresión de la matriz de rigidez lineal e integrando obtenemos

$$K_c^e = E_c \begin{bmatrix} \frac{A_c}{L} & -\frac{A_c}{L} & 0 & -\frac{y_c A_c}{L} & 0 & \frac{y_c A_c}{L} \\ -\frac{A_c}{L} & -\frac{A_c}{L} & 0 & \frac{y_c A_c}{L} & 0 & -\frac{y_c A_c}{L} \\ 0 & 0 & 12 \frac{\bar{I}_c}{L^3} & 6 \frac{\bar{I}_c}{L^2} & -12 \frac{\bar{I}_c}{L^3} & 6 \frac{\bar{I}_c}{L^2} \\ -\frac{y_c A_c}{L} & \frac{y_c A_c}{L} & 6 \frac{\bar{I}_c}{L^2} & 4 \frac{\bar{I}_c}{L} & -6 \frac{\bar{I}_c}{L^2} & 2 \frac{\bar{I}_c}{L} \\ 0 & 0 & -12 \frac{\bar{I}_c}{L^3} & -6 \frac{\bar{I}_c}{L^2} & 12 \frac{\bar{I}_c}{L^3} & 6 \frac{\bar{I}_c}{L^2} \\ \frac{y_c A_c}{L} & -\frac{y_c A_c}{L} & 6 \frac{\bar{I}_c}{L^2} & 2 \frac{\bar{I}_c}{L} & -6 \frac{\bar{I}_c}{L^2} & 4 \frac{\bar{I}_c}{L} \end{bmatrix}$$

donde E_c es el módulo de elasticidad del hormigón e $\bar{I}_c = I_c + y_c^2 A_c$.

De la misma manera podemos obtener la matriz de rigidez para el acero que es semejante a la anterior sólo difiriendo en los índices c y a . La suma de las matrices de rigidez K_c y K_a es la matriz de rigidez total. Para el caso de una sección homogénea recuperamos como es natural la matriz normal de barras homogéneas.

Las cargas viscoelásticas son calculadas de acuerdo con la (33), donde para el caso de barras en flexión es $\sigma = \{M, N\}$. Interpolando los valores de M y N en función de los valores nodales

$$N = \Delta N^e$$

$$M = \Gamma M^e$$

donde

$$\Delta = [-1 + x/L, x/L]$$

$$N^e = [N_1, N_2]^T$$

$$\Gamma = [-x/2, 1/2, -1/2(L-x), -1/2]$$

$$M^e = [Q_1, M_1, Q_2, M_2]^T$$

Con estas substituciones y el valor de B_c de la (38) tenemos

$$X_v = C_v \int_L \begin{bmatrix} \Psi'^T & 0 \\ -y_c \Phi''^T & -\Phi''^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} dx$$

Realizando las operaciones indicadas obtenemos $P_v = C_v X_u$ donde

$$X_u = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} N_{1s} - N_{2s} \\ -(N_{1s} - N_{2s}) \\ Q_{1s} - Q_{2s} \\ M_{1s} - Q_{2s} L - M_{2s} \\ -(Q_{1s} - Q_{2s}) \\ -(M_{1s} - Q_{1s} L - M_{2s}) \end{bmatrix}$$

Los esfuerzos que entran en el cálculo de X_u son determinados con la en la forma

$$X_{cs} = K_c U - X_{cv} - X_{cr} - X_{ct}$$

donde el subíndice s indica esfuerzos debidos a los desplazamientos descontando la parte viscoelástica, de retracción y de temperatura.

Durante el análisis incremental en tiempo, la rigidez de la barra varía por causa del cambio en la localización de la línea neutra, debido a las deformaciones lentas del hormigón. Este cambio determina la aparición de esfuerzos normales parásitos (no reales) debidos a los términos no equilibrados en K_a y K_c . En cada paso del análisis temporal ese esfuerzo normal parásito debe ser anulado mediante un proceso iterativo. La convergencia de este proceso es rápida y en todos los ejemplos analizados dos iteraciones fueron suficientes.

Efecto viscoelástico en una viga mixta con carga constante: Este ejemplo, indicado en la Figura 5 fue tomado de la referencia 16, y analizado mediante un modelo standard sin envejecimiento para poder comparar los resultados, que en la referencia son obtenidos en forma asintótica. El análisis numérico da los resultados indicados en la Figura 5b, con dos iteraciones en cada intervalo, para el movimiento del plano neutro.

Viga continua homogénea con descenso progresivo del apoyo central: Este ejemplo fue tomado de la referencia 17 y está indicado en la Figura 6 donde se indica la variación en el tiempo de la reacción en el apoyo central dividido por el valor F_s , que es el valor de la reacción instantánea cuando el desplazamiento es introducido súbitamente considerando el material como elástico. En la referencia este ejemplo es analizado por un método aproximado del tipo cuasi-estático.

Consideramos dos casos: cuando el desplazamiento δ es introducido súbitamente en $\tau_0 = 7$ días y mantenido constante hasta $t_2 = 1000$ días, y cuando ese desplazamiento es introducido gradualmente entre t_0 y el valor δ en $t_1 = 24, 104$ y 379 días y mantenido luego constante hasta t_2 . Las propiedades mecánicas del material fueron tomadas del CEB para una condición ambiental CA=3 y espesor efectivo $h_0=40$ cm, y un módulo elástico de 250000 Kg/cm². Se asume que la variación del desplazamiento del apoyo con el tiempo sigue la ley

$$\frac{\delta_0}{\delta_\infty} = 1 - e^{\frac{-3(t-t_0)}{(t_{0.95}-t_0)}}$$

siendo $t_1 = t_{0.95}$ el valor en que es completado el 95% del desplazamiento.

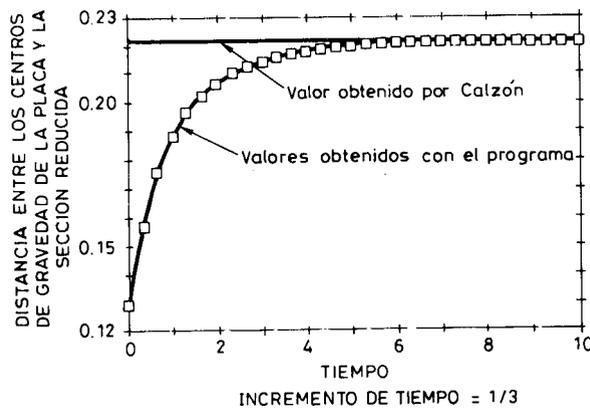
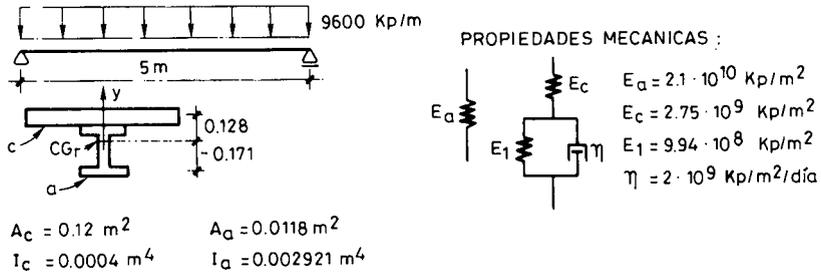


Figura 5. Viga mixta simplemente apoyada con carga constante.

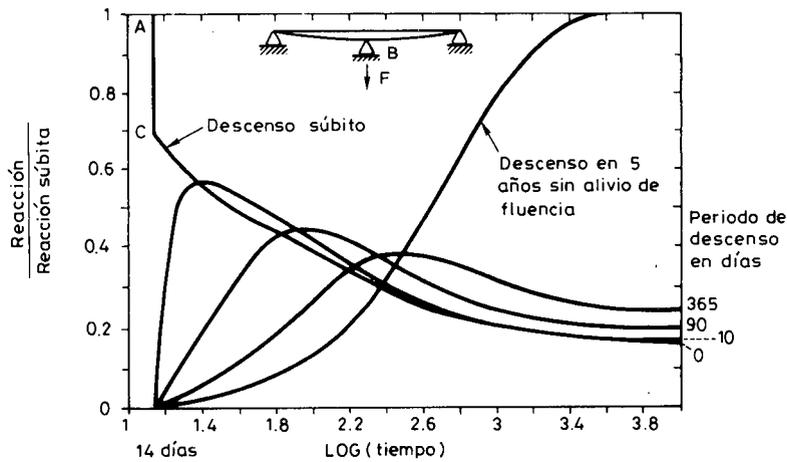


Figura 6. Viga con descenso del apoyo central.

Los resultados del análisis son indicados en la Figura 6b en que el período $t_1 - t_0$ es igual a 0, 10, 90, 365 días y 5 años. El gráfico muestra la variación de F/F_s con el tiempo, donde F_s es la reacción instantánea para un desplazamiento aplicado integrante a los 14 días. La curva superior representa el caso en que $t_1 - t_0$ es 5 años y no hay deformaciones viscoelásticas.

Estado plano de tensiones

Redistribución de tensiones en la tapa de un reactor: La Figura 8 muestra la importancia de la no homogeneidad en la distribución de temperaturas, indicada en la Figura 7.

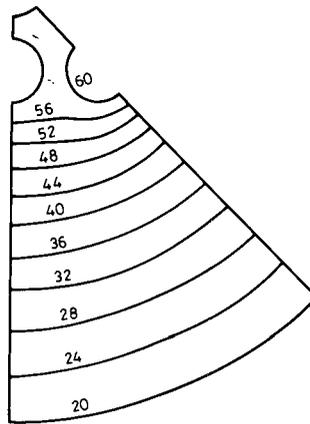


Figura 7. Distribución de temperatura.

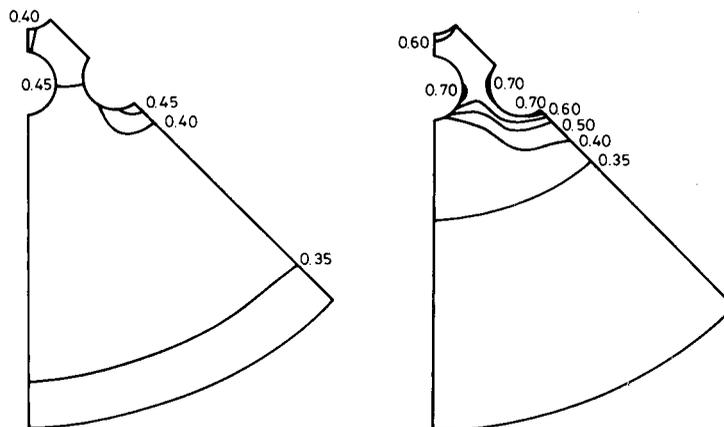


Figura 8. Distribución de tensiones equivalentes con y sin redistribución viscoelástica.

Se trata de la tapa de un vaso de presión, sometida a una carga repartida de 30 kg/cm² sobre el perímetro exterior. Los valores graficados corresponden a tensiones equivalentes (criterio de von Mises). Este ejemplo fue resuelto utilizando el mismo método incremental con la matriz de ecuación (16) y los efectos de temperatura modelados con ecuación (18). Mayores detalles pueden ser encontrados en la referencia 17.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo forma parte de un plan de investigación sobre problemas no lineales en estructuras, que se desarrolla en la Escuela de Ingeniería, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil, con la coordinación del autor. La colaboración de los miembros del equipo, en particular A. G. Groehs y E. Daroit y la ayuda financiera de FINEP, CAPES y CNPq son sinceramente reconocidas. Agradecemos también la invitación de E. Oñate para escribir este artículo y para permanecer en la Escuela Técnica Superior de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Cataluña, donde tuvimos la oportunidad de presentar y discutir algunos de los temas de este trabajo y de apreciar la hospitalidad catalana.

REFERENCIAS

1. H. Trost, "Auswirkungen der Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton", *Beton und Stahlbetonbau*, Vol. 61, pp. 230-238, (1967).
2. R.A. Adey y C. A. Brebbia, "Efficient method for the solution of viscoelastic problems", *Journal Eng. Mechs. Division, ASCE*, Vol. 99, pp. 1119-1127, (1973).
3. G.J. Creus, "Análisis de estructuras viscoelásticas lineales y no lineales", *II Simposio sobre aplicaciones del método de los elementos finitos en ingeniería*, Barcelona, 1986.
4. E.T. Onat, "Representation of inelastic mechanical behavior by means of state variables", *IUTAM Symposium on Thermoelasticity*, Berlin, Springer-Verlag. (1970).
5. J.H. Argyris, L.E. Vaz, K.J. Willam, "Higher order methods for transient diffusion analysis", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 12, pp. 243-278, (1977).
6. R. Hill, "Some basic principles in mechanics of solids without a natural time", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 7, pp. 209-25, (1959).
7. G.J. Creus, "*Viscoelasticity: Basic theory and applications to concrete structures*", Springer-Verlag, (1986).
8. C. Truesdell, "*The Elements of Continuum Mechanics*", Springer-Verlag, (1985).
9. J. Lubliner, "On the thermodynamic foundation of non-linear solid mechanics", *Int. Journal Non-Linear Mechanics*, Vol. 2, pp. 237-254, (1972).
10. Comité Euro-International du Béton, "Structural Effects of Time Dependent Behavior of Concrete", *Bulletin d'information*, No.142/142 bis, (1984).
11. J.T. Oden, T.L. Lin, "On the general rolling contact problem for finite deformations of a viscoelastic cylinder", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 57, pp. 297-367, (1986).
12. G.J. Creus, E.T. Onat, "Mechanics of porous-adsorbent materials", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, pp. 149, (1972).

13. K.J. Willam, "Numerical solution of inelastic rate processes", *Computers and Structures*, Vol. 8, pp. 511-532, (1978).
14. J. Hult, "Oil canning problems in creep", in *Creep in Structures*, Ed. N.I. Hoff, Academic Press, (1962).
15. E. Daroit, "Análise de treliças planas viscoelásticas com deformações finitas e pórticos planos viscoelásticos com vigas mixtas", *Tesis de Mestrado*, Escola de Engenharia Civil, UFRGS, Brasil.
16. J.M. Calzón, J.O. Herrera, "*Construcción Mixta Hormigón-acero*", Rueda, (1979).
17. A. Ghali, R. Favre, "*Concrete Structures: stresses and deformations*", Chapman and Hall, (1986).
18. G.J. Creus, A.J. Ferrante, "Análisis viscoelástico lineal y no lineal de estructuras de hormigón en régimen de temperatura no uniforme", *II Simposio sobre sistemas computacionales para ingeniería civil*, São Paulo, Brasil, (1978).