

OPTIMIZACION DE SECCIONES ORTOTROPAS SOMETIDAS A TORSION MEDIANTE EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

L. GRACIA
y
M. DOBLARE

*Departamento de Ingeniería Mecánica
Escuela Técnica Superior de
Ingenieros Industriales
María Zambrano, s/n
50015 ZARAGOZA, ESPAÑA*

RESUMEN

El propósito del presente trabajo es la resolución del problema de optimización de forma de secciones ortótropas, simple y múltiplemente conexas, sometidas a torsión de Saint-Venant, mediante el método de los elementos de contorno. La función objetivo es el área de la sección, mientras que la única restricción corresponde a una rigidez torsional especificada. Se detalla el algoritmo utilizado para resolver el problema de optimización no lineal resultante, así como los diferentes criterios utilizados para conseguir una redefinición automática de la malla entre dos iteraciones consecutivas. Por último, se incluye una breve descripción del programa desarrollado y varios ejemplos.

SUMMARY

The aim of this paper is the solution of the shape optimization problem for simply and multiply-connected orthotropic sections under Saint-Venant torsion by using the Boundary Element Method. The objective function is the area of the section, while the only constraint corresponds to a given torsional stiffness. The nonlinear optimization algorithm is also discussed, so they are the different criteria used to get a consistent and automatic boundary redefinition looking for a minimum number of iterations in the optimization process. Finally, a brief description of the program and several examples are also included.

INTRODUCCION

Las técnicas de optimización han sido uno de los más populares y mejor estudiados campos a lo largo de la historia de las Matemáticas. Sin embargo, no ha sido hasta muy recientemente que dichas técnicas se han aplicado a la solución del diseño óptimo de las muchas partes que componen un sistema mecánico^{1,2,3}, (estructuras, mecanismos, trayectorias óptimas, etc.).

Recibido: Noviembre 1987

Diferentes razones cabe considerar en el creciente interés sobre este tema: el desarrollo de técnicas generales y potentes para el análisis de problemas complejos (M.E.F., M.E.C.); la aparición de nuevos algoritmos numéricos para optimización lineal y no lineal con una gran variedad de restricciones; y el uso de técnicas experimentales que permiten el chequeo de los resultados numéricos previos⁴.

Un problema particularmente importante incluido en este contexto es el de la optimización de la forma de sólidos elásticos sometidos a diferentes cargas, y más específicamente la optimización de forma de ejes elásticos sometidos a torsión. Esta es una situación muy común en el diseño de máquinas y en la ingeniería civil, y también puede ser considerado como un primer paso, para adquirir experiencia, hacia más complejas generalizaciones a otros materiales con comportamiento no lineal bajo situaciones de carga más generales.

A lo largo de estos últimos años, se ha detectado un creciente interés sobre el tema; Kijuchi⁵, Kurshin⁶ y Dems⁷ acometen el mismo problema pero utilizando elementos finitos. Este método, sin embargo, presenta serias desventajas en la optimización de formas. En primer lugar, es necesario mallar todo el dominio, mientras que las variables de diseño pertenecen al contorno, lo cual implica un importante aumento del tiempo necesario para generar los datos y resolver el problema, obteniendo una gran cantidad de resultados innecesarios. En segundo lugar, y mucho más importante, la redefinición de la malla es muy costosa y con múltiples problemas en orden a evitar interpenetraciones y conseguir una malla regular.

Recientemente, Mota et al.^{8,10} han abordado el mismo problema utilizando elementos de contorno. Sin embargo, su método presenta también algunas desventajas: la discretización es muy rígida porque mantiene constante el ángulo entre los radiovectores que definen los nodos del contorno a partir del origen. Así mismo, el uso de las longitudes de dichos radiovectores como variables de diseño, manteniendo constantes los ángulos, impide la posibilidad de un acercamiento real de los nodos, que retrasa el proceso de optimización cuando este acercamiento es conveniente.

En este trabajo se formula el problema de optimización de formas para regiones simple y múltiplemente conexas con forma y tamaño iniciales arbitrarios, sometidas a torsión de Saint-Venant, en orden a obtener una rigidez torsional especificada con un área mínima. La expresión de esta rigidez torsional se establece como función de integrales de contorno, en las cuales aparecen nuevas variables de estado, que dependen también de las coordenadas de los nodos del contorno, y que están relacionadas directamente con las tensiones tangenciales. Estas variables deben ser obtenidas previamente utilizando algún método numérico, en este caso el método de los elementos de contorno. Con esta aproximación, se obtiene una completa generalidad, tanto para la geometría inicial como para las sucesivas geometrías que van apareciendo a lo largo del proceso de optimización. Desde luego, deben incluirse algunas salvaguardas en orden a evitar interpenetraciones entre elementos. Después de este análisis, y para cada iteración, todas las variables del problema (tensiones, área, rigidez torsional, ...) están disponibles. Igualmente, pueden calcularse valores en puntos interiores en caso de considerarse oportuno.

El método de optimización utilizado sigue la idea de los métodos de "direcciones posibles", intentando que el punto de diseño permanezca dentro de la región de diseño,

y a la vez, que estas direcciones sean lo más cercanas posibles al menos gradiente de la función objetivo, en orden a disminuir el número de iteraciones. El tamaño de cada etapa durante el proceso de optimización es calculado por el programa, utilizando la condición de que el nuevo punto de diseño debe caer dentro de la "banda de restricción", la cual se define como un porcentaje de la rigidez torsional de la sección.

Finalmente, hacer notar el hecho de que, como es bien conocido, el problema de torsión en medios ortótropos puede ser convertido en uno equivalente isótropo utilizando un cambio de coordenadas conveniente (ver parágrafo siguiente). Este proceso es llevado a cabo automáticamente por el programa, siendo posible obtener como resultado final la forma óptima de secciones ortótropas con un mínimo de trabajo extra.

FORMULACION DEL PROBLEMA DE TORSION MEDIANTE EL M.E.C.

El problema de torsión de Saint-Venant para sólidos ortótropos puede formularse en términos de la llamada función de Prandtl, obteniéndose una ecuación de Poisson¹¹:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = -2 \quad \text{en } \Omega' \tag{1}$$

$$\phi^i = K_i \quad \text{en } \Gamma'_i \quad i = 0, \dots, N \tag{2}$$

$$\int_{\Gamma'_i} \phi_{,n'} \cdot dl' = -2A'_i \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{3}$$

donde

$$\xi = \sqrt{\frac{G_y}{G_x}} \cdot x \quad \eta = y \tag{4}$$

Ω' , Γ' , A' , l' son las transformaciones de Ω , Γ , A , l al pasar de las coordenadas x , y a ξ , η (Figura 1), y $\phi_{,n'}$ es la derivada normal de ϕ a lo largo del contorno Γ'_i , y A'_i el área encerrada por dicho contorno.

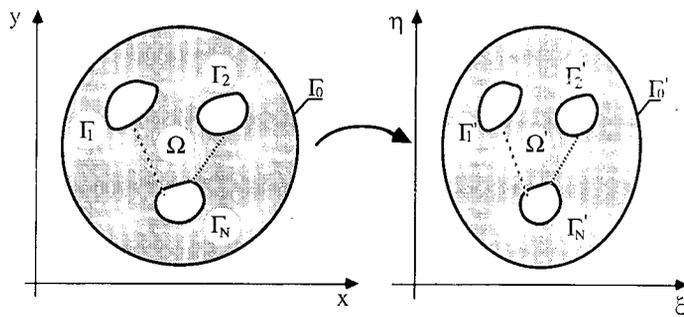


Fig. 1. Región múltiplemente conexa bidimensional

Las tensiones tangenciales en cualquier punto del dominio pueden expresarse como:

$$\tau_{xz} = G_x \cdot \theta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad \tau_{yz} = -\sqrt{G_x \cdot G_y} \cdot \theta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \tag{5}$$

con G_x, G_y los módulos de rigidez, y θ el ángulo por unidad de longitud. Finalmente, el momento torsor aplicado y la rigidez torsional son:

$$M = D \theta \tag{6}$$

$$\begin{aligned} D &= -G_x \cdot \sqrt{\frac{G_x}{G_y}} \cdot \int_{\Omega'} \left(\xi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \eta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = \\ &= 2 \cdot G_x \cdot \sqrt{\frac{G_x}{G_y}} \cdot \left[\int_{\Omega'} \phi \cdot d\xi \cdot d\eta - \sum_{i=0}^N K_i \cdot A'_i \right] \end{aligned} \tag{7}$$

Resolviendo las ecuaciones (1)-(3) se obtiene ϕ y entonces la rigidez torsional puede obtenerse mediante (7). Si el momento torsor es conocido, θ se obtiene a partir de (6), y luego las tensiones tangenciales a partir de (5).

Estableciendo el segundo teorema de Green entre la función de Prandtl y la solución fundamental de la ecuación de Laplace puede obtenerse una formulación alternativa a (1) en términos de integrales de contorno¹²:

$$\begin{aligned} c(P) \phi(P) + \int_{\Gamma'} \phi \frac{\partial}{\partial n'} \ln\left(\frac{1}{r'}\right) dl' = \\ = \int_{\Gamma'} \ln\left(\frac{1}{r'}\right) \frac{\partial \phi}{\partial n'} dl' - \int_{\Omega'} \nabla^2 \phi \ln\frac{1}{r'} dS' \end{aligned} \tag{8}$$

donde $c(P)$ para $P \in \Gamma'$ corresponde al valor principal de la integral

$$\int_{\delta B_\epsilon(P)} \frac{\partial}{\partial n'} \left[\ln\left(\frac{1}{r'}\right) \right] dl'$$

con $B_\epsilon(P)$ el círculo con centro en P y radio ϵ , y $\delta B_\epsilon(P)$ su contorno. Este valor principal es igual al ángulo subtendido por las tangentes a Γ' por la izquierda y por la derecha de P (Figura 2).

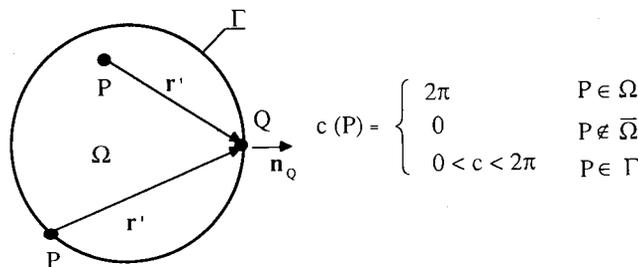


Figura 2. Valores de la constante c .

Teniendo en cuenta (1), es fácil transformar la última integral de (8), obteniendo finalmente la ecuación base del M.E.C.:

$$c(P) \cdot \phi(P) - \int_{\Gamma} \phi \cdot \frac{1}{r'^2} \cdot (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}') dl' = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \cdot \ln r' \cdot dl' + \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} - \ln r' \right) (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}') dl' \quad (9)$$

con \mathbf{r}' el radio vector que une cada punto del contorno con el origen de coordenadas (Figura 3).

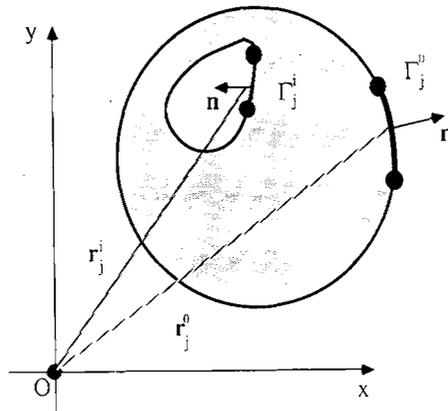


Figura 3. Definición de la Geometría.

El M.E.C.^{13,14} resuelve la ecuación integral singular tipo Cauchy (9) utilizando un esquema de aproximación de Fourier para las incógnitas, y un proceso de colocación con objeto de obtener un sistema de ecuaciones lineales.

Si las incógnitas $q^i = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^i$ de cada contorno se aproximan (recuérdese que ϕ^i es constante a lo largo de cada contorno) por:

$$q^i = \sum_{j=1}^{N^i} q_j^i \varphi_j \quad (11)$$

con φ_j generalmente splines polinómicos (en este trabajo se ha utilizado una aproximación lineal), q_j^i las nuevas incógnitas del problema y N^i el número de nodos del contorno Γ_j^i (Figura 4), las ecuaciones (9) y (10) pueden expresarse ahora como:

$$\begin{aligned} c(P) \cdot \phi(P) + \sum_{i=0}^N K_i \sum_{j=1}^{N^i} \int_{\Gamma_j^i} -\frac{1}{r'^2} \cdot (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}') dl' = \\ = - \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{N^i} q_j^i \left[\int_{\Gamma_{j-1}^i} \varphi_2 \cdot \ln r' dl' + \int_{\Gamma_j^i} \varphi_1 \cdot \ln r' dl' \right] + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{N^i} \int_{\Gamma_j^i} \left(\frac{1}{2} - \ln r' \right) (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}') dl' \tag{12}$$

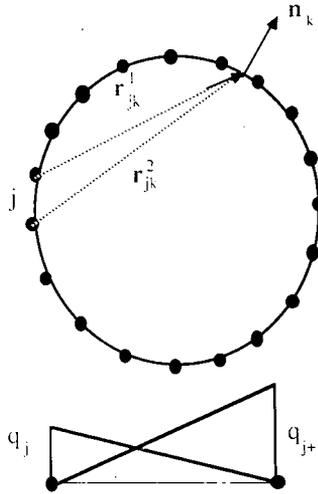


Figura 4. Nodos e incógnitas en el contorno.

Planteando la ecuación (12) en todos los nodos del contorno, se obtiene un sistema de $N + \sum N^i$ ecuaciones con el mismo número de incógnitas ($q_j^i, i = 0, 1, \dots, N; j = 1, \dots, N^i$ y $K_i, i = 1, \dots, N$, (K_0 toma el valor 0 arbitrariamente):

$$\mathbf{A} \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{K} = \mathbf{P} \tag{13}$$

Una vez resuelto el sistema (13), D se obtiene mediante (14):

$$D = -G_x \cdot \sqrt{\frac{G_x}{G_y}} \left[\frac{1}{4} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{N^i} \int_{\Gamma_j^i} r'^2 \cdot (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}') dl' + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{N^i} \left(\int_{\Gamma_{j-1}^i} \varphi_2 \cdot r'^2 \cdot dl' + \int_{\Gamma_j^i} \varphi_1 \cdot r'^2 \cdot dl' \right) \right] \tag{14}$$

o en forma compacta:

$$D = -G_x \cdot \sqrt{\frac{G_x}{G_y}} \left[\frac{1}{4} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{N^i} (I_j^i)_2 + \frac{1}{2} \mathbf{q} (I_j^i)_1 \right] \tag{15}$$

Hay que destacar dos aspectos. El primero corresponde al cálculo de A_j^i en (3). Esta es dada por la fórmula:

$$A'_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N^i} l'_j \cdot (\mathbf{r}'_j \cdot \mathbf{n}') \quad (16)$$

donde l'_j es la longitud del elemento j y $\mathbf{r}'_j \cdot \mathbf{n}'_j$ la distancia entre este elemento y el origen (Figura 3).

El segundo está relacionado con el caso de normal discontinua en cualquiera de los contornos. En este caso, dos incógnitas deben adscribirse al nodo correspondiente, las qs por la izquierda y por la derecha, con una única ecuación. Esta inconsistencia se resuelve estableciendo que ambas incógnitas son igual a cero, sin considerar la ecuación correspondiente a dicho nodo, obteniendo un sistema con un número menor de ecuaciones.

PROCESO DE OPTIMIZACION

El problema de optimización puede plantearse en este caso como:

“Dado un momento torsor y algunas restricciones en θ y τ , así como en variables geométricas, obtener la sección de área mínima que satisfaga dichas restricciones”.

Sin embargo, en gran cantidad de ocasiones, la restricción en θ (la cual es equivalente a especificar una determinada rigidez torsional) conduce, para área mínima, a una distribución de tensiones muy uniforme, siendo posible cumplir las restricciones en tensiones sin más que un escalado posterior si es necesario. Es por eso que en muchos trabajos, incluyendo éste, las restricciones en tensiones no se tienen en cuenta, y el problema de optimización se define como:

“Dada una rigidez torsional y algunas otras restricciones geométricas, obtener la forma de la sección con área mínima que cumpla dichas restricciones” (es conveniente observar que este problema es equivalente al de encontrar una sección de área dada con máxima rigidez torsional, el cual puede considerarse como su dual).

La función objetivo se puede definir entonces como:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{N^i} l'_j \cdot (\mathbf{r}'_j \cdot \mathbf{n}'_j) \quad (17)$$

y la restricción correspondiente a la rigidez torsional:

$$h(\mathbf{x}) = D_0 + G_x \cdot \sqrt{\frac{G_x}{G_y}} \cdot \left[\frac{1}{4} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{N^i} (I_j^2)_2 + \frac{1}{2} \mathbf{q}(I_j^i)_1 \right] = 0 \quad (18)$$

donde \mathbf{x} es el vector de las variables de diseño, correspondientes a las coordenadas de los nodos del contorno sin restricciones.

Las restricciones geométricas del problema que deben tenerse en cuenta además son:

- Los elementos de contorno no deben cortarse.

- Algunas coordenadas pueden estar acotadas.
- Algunos nodos del contorno pueden permanecer fijos a lo largo del proceso de optimización.
- Condiciones de simetría.

Las condiciones de Khun-Tucker deben cumplirse en el mínimo:

$$\text{grad } f(\mathbf{x}^*) + \lambda \text{ grad } h(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \lambda \geq 0 \quad (19)$$

o de otra forma:

$$\frac{\text{grad } f(\mathbf{x}^*) \cdot \text{grad } h(\mathbf{x}^*)}{|\text{grad } f(\mathbf{x}^*)| \cdot |\text{grad } h(\mathbf{x}^*)|} = -1 \quad (20)$$

Numéricamente, esta condición se establece fijando una cota de error en el mínimo, ε_m , de tal forma que si:

$$\frac{\text{grad } f(\mathbf{x}^*) \cdot \text{grad } h(\mathbf{x}^*)}{|\text{grad } f(\mathbf{x}^*)| \cdot |\text{grad } h(\mathbf{x}^*)|} \leq \cos(\pi - \varepsilon_m) \quad (21)$$

se cumple, \mathbf{x}^* se considera solución del problema de optimización.

El método de optimización utilizado necesita también la definición de otra cota de error para la restricción, ε_R , de tal forma que la restricción original se sustituye por una "banda de restricción", dentro de la cual se considera resuelto el problema si se cumple la condición (21) (Figura 5):

$$h_i = -\varepsilon_R D_0 \leq h(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_R D_0 = h_s \quad (22)$$

$$(1 - \varepsilon_R) \leq \frac{D}{D_0} \leq (1 + \varepsilon_R) \quad (23)$$

Sea \mathbf{x}_k el punto de diseño en la iteración k , el cual, como se ha explicado anteriormente corresponde a las coordenadas de los nodos. Pueden ocurrir tres situaciones diferentes:

1) \mathbf{x}_k está en el interior de la región de diseño (Punto 1 en Figura 5).

La dirección de optimización corresponde al menos gradiente de la función objetivo en \mathbf{x}_k . Por consiguiente, el nuevo punto de diseño viene dado por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha [-\text{grad } f(\mathbf{x}_k)] \quad (24)$$

Si se obliga a que \mathbf{x}_{k+1} cumpla la restricción h , y aproximamos ésta linealmente en \mathbf{x}_k , esta condición se expresa como:

$$h(\mathbf{x}_{k+1}) = h(\mathbf{x}_k) - \alpha \text{ grad } f(\mathbf{x}_k) \cdot \text{grad } h(\mathbf{x}_k) = 0 \quad (25)$$

y a partir de ella se obtiene el tamaño de etapa:

con

$$s = -\text{grad } h(\mathbf{x}_k) + \text{grad } h(\mathbf{x}_k) \cdot \text{grad } f(\mathbf{x}_k) \cdot \frac{\text{grad } f(\mathbf{x}_k)}{|\text{grad } f(\mathbf{x}_k)|^2} \quad (31)$$

y los tamaños de las etapas son:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{h - h_s}{\text{grad } f \cdot \text{grad } h} \\ \beta &= \frac{-h_s}{\text{grad } h \cdot s} \end{aligned} \right\} h < 0 \quad \left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{h_i}{\text{grad } f \cdot \text{grad } h} \\ \beta &= \frac{h_i - h}{\text{grad } h \cdot s} \end{aligned} \right\} h > 0 \quad (32)$$

En cada iteración se necesita calcular los gradientes de la restricción y de la función objetivo como en función de las variables de diseño. Esto se consigue por derivación de (17) y (18) con respecto a las coordenadas de los nodos:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2} \quad \frac{\partial}{\partial y_i} f(\mathbf{x}) = \frac{x_{i-1} - x_{i+1}}{2} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} h(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} ((I_i)_2 + (I_{i-1})_2) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{q}(\mathbf{I})_1 + \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{I})_1 \right) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{q} = \mathbf{A}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{P} - \mathbf{B} \mathbf{K}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{A} \mathbf{q} \right) \quad (35)$$

siendo entonces necesario calcular \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{P} en cada paso, y también las variables de estado \mathbf{q} , \mathbf{K} , para el subsiguiente cálculo de f y h .

REDEFINICION DE LA MALLA ENTRE DOS ITERACIONES

Además de la redefinición de la malla a que conduce el proceso de optimización, diferentes salvaguardas deben incluirse en el programa en orden a conseguir la convergencia y garantizar que las restricciones iniciales son satisfechas convenientemente. Algunas de ellas se explican a continuación:

Irregularidades geométricas

La presencia de ángulos agudos se detecta a lo largo del contorno y se eliminan (esta acción asume la existencia de una malla relativamente fina). Si $\cos \alpha \geq \cos \alpha_0$, se redefine la malla, eliminando el nodo j y uniendo los nodos $j - 1$ y $j + 1$ mediante un nuevo elemento (Figura 6).

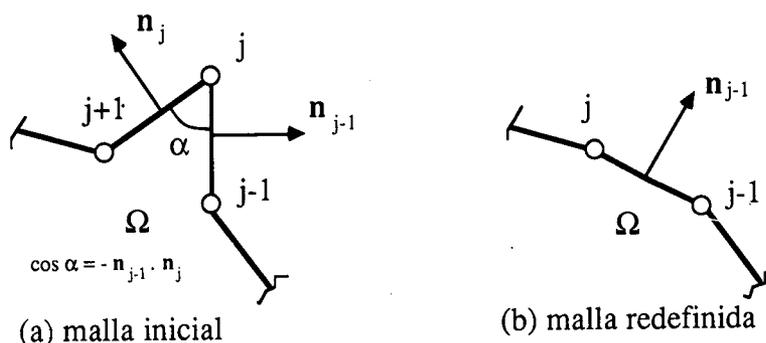


Figura 6. Irregularidades Geométricas.

Elementos largos y cortos

Como resultado del cambio de las coordenadas de los nodos, puede tener lugar una distorsión importante en la longitud de los elementos. Para evitar este problema, se lleva a cabo un estudio de la longitud de los elementos, y en caso necesario se redefine la malla.

Si la longitud del elemento es mayor que ($a \times$ longitud media), donde a es un valor predefinido (1.5 en el presente trabajo), se introducen nuevos nodos a lo largo del elemento, obteniendo nuevos elementos de longitud más próxima a la media (Figura 7a).

Si la longitud es menor que (longitud media / a), el elemento se elimina, y la longitud del nuevo elemento se chequea de nuevo (Figura 7b).

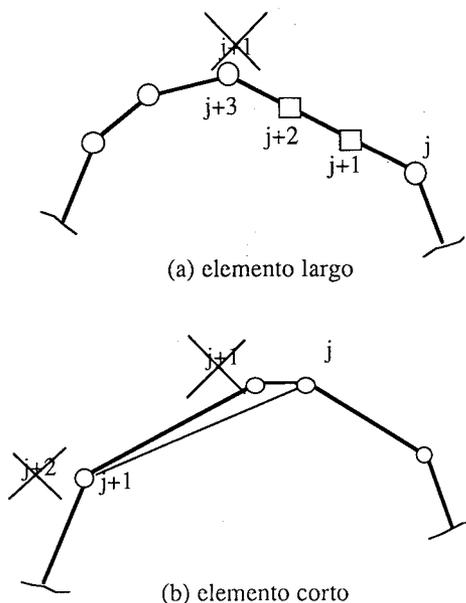


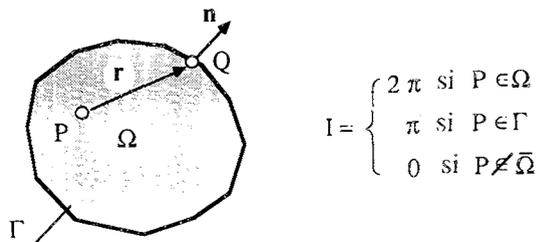
Fig. 7. Elementos largos y cortos

Detección de intersecciones entre contornos

El procedimiento se basa en la obtención del valor de la integral:

$$I = \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} d\Gamma$$

el cual, como es bien conocido, depende de la posición del punto de referencia P a partir del cual se define \mathbf{r} (Figura 8).



$$I = \begin{cases} 2\pi & \text{si } P \in \Omega \\ \pi & \text{si } P \in \Gamma \\ 0 & \text{si } P \notin \bar{\Omega} \end{cases}$$

Figura 8.

Pueden presentarse dos casos distintos:

- a) Intersección de un contorno consigo mismo (Figura 9)
 En tal caso, se detecta un cambio en el signo de la integral I cuando se calcula desde todos los nodos de dicho contorno:

$$I_P = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = \pi + 0 = \pi \quad I_Q = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = 0 + (-\pi) = -\pi$$

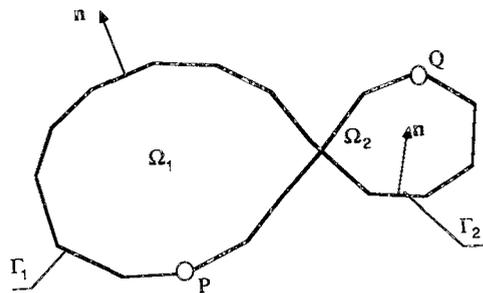


Figura 9. Intersección de un contorno consigo mismo.

- b) Intersección entre dos contornos distintos (Figura 10)
 En este caso, el valor de la integral I calculado en los nodos del contorno Γ_1 , con respecto al contorno Γ_2 , cambia de 2 a 2π :

$$I_P = \int_{\Gamma_2} = 0 \quad I_Q = \int_{\Gamma_2} = 2\pi$$

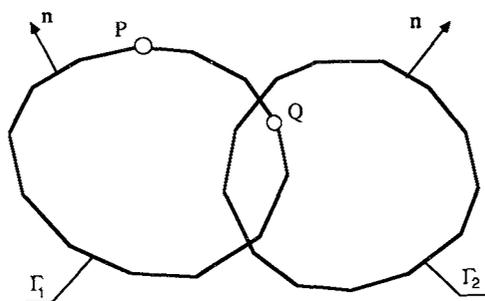


Figura 10. Intersección entre dos contornos.

Todas estas situaciones son chequeadas por el programa y la malla se redefine automáticamente.

DESCRIPCION DEL PROGRAMA DE ORDENADOR

El programa de ordenador desarrollado para comprobar la formulación anterior está escrito en FORTRAN 77, y ha sido implementado en un ordenador VAX/VMS 780. El diagrama de flujo se muestra en la Figura 11.

El programa incluye un cambio automático de coordenadas $(x, y) \Rightarrow (\xi, \eta)$, y el cambio final a (x, y) una vez que se ha obtenido la forma óptima.

RESULTADOS

Con objeto de verificar el método expuesto y el programa desarrollado, se han elaborado diferentes ejemplos, que se muestran a continuación. El primero corresponde a un chequeo del análisis de sensibilidad de la rigidez torsional con respecto al radio interior en una corona circular. La comparación entre los resultados obtenidos y la solución analítica en el caso isótropo se muestra en la Figura 12. Se observa una excelente aproximación excepto en la zona próxima a $R_i/R_e = 1$ donde haría falta una malla más fina. La malla utilizada consta de 36 elementos en cada contorno.

Los dos ejemplos siguientes corresponden a dos dominios simplemente conexos, cuya solución obvia es el círculo. Las formas iniciales son una cruz griega y una T, respectivamente. El primero es un caso con doble simetría, mientras que el segundo presenta simetría con respecto a un eje exclusivamente. Las mallas (sólo 6 elementos en el primer caso para un cuarto de la sección, y 14 en el segundo para media sección) utilizadas en los dos ejemplos se incluyen en las Figuras 13 y 14, respectivamente, así como las formas inicial y final, y la variación en la función objetivo y en la rigidez torsional a lo largo del proceso de optimización (14 y 13 iteraciones, respectivamente). Los valores utilizados son $\varepsilon_R = 0.1$; $\varepsilon_m = 3^0$; $D_0/G = 32$ en ambos casos.

Hay que destacar el hecho de que excepto en unas pocas iteraciones (en el primer caso, la 7; en el segundo, la 4 y la 11) en las que el punto de diseño cae fuera de la banda de restricción, en todas las demás permanece dentro de la banda, por lo que es posible detener el proceso en cualquier momento, por tratarse de diseños admisibles

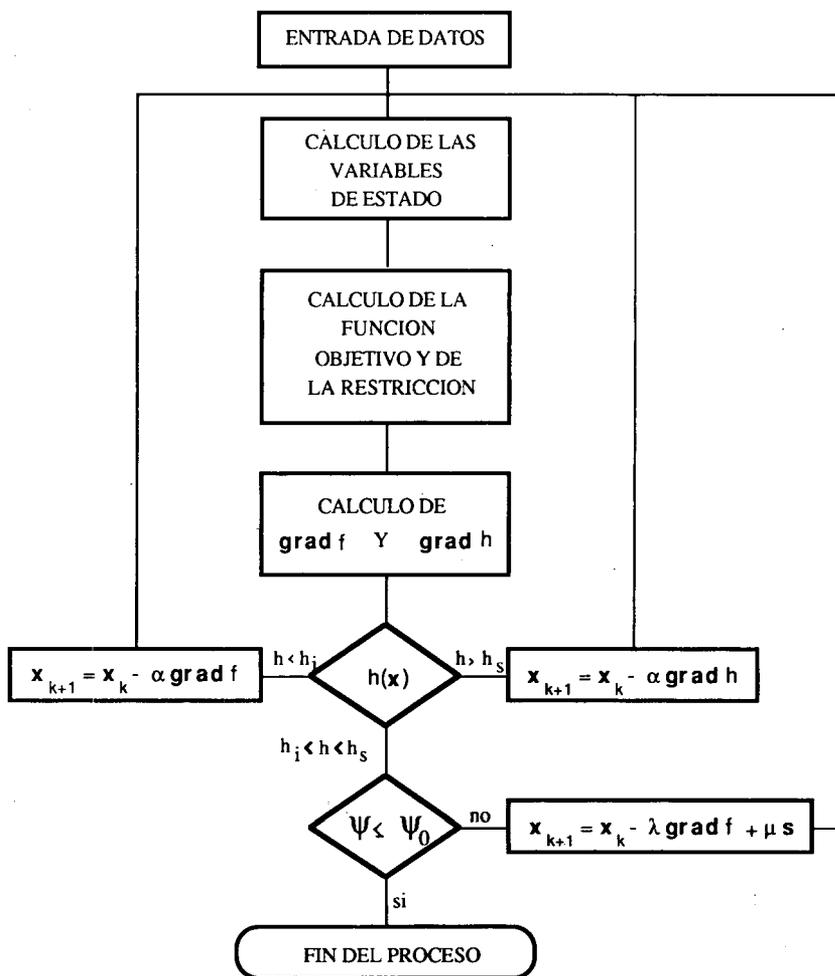


Figura 11. Diagrama de flujo del programa.

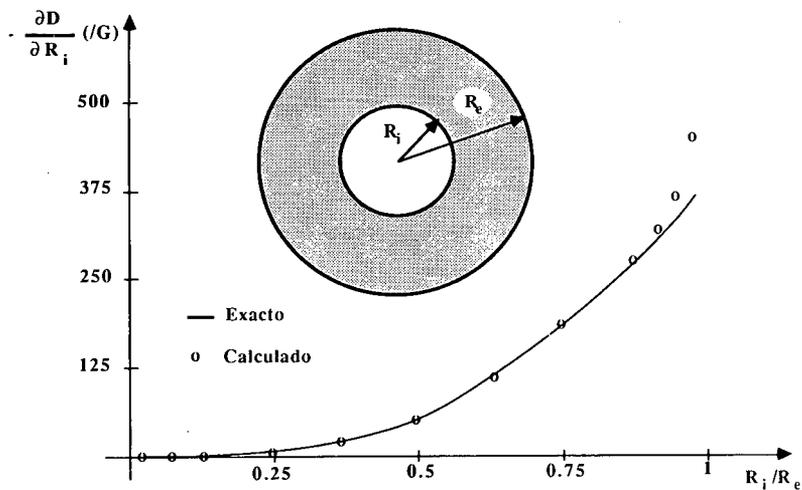
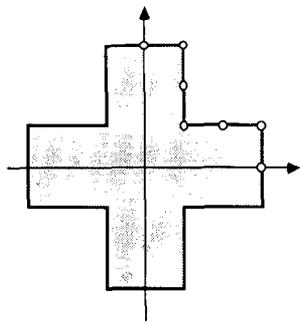
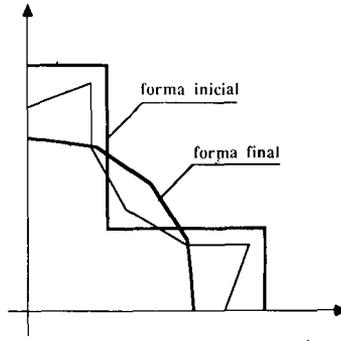


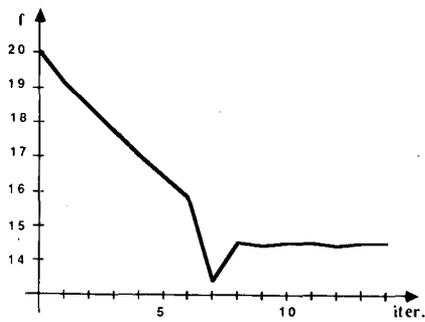
Figura 12. Ejemplo 1: análisis de sensibilidad de la restricción con respecto al radio interior.



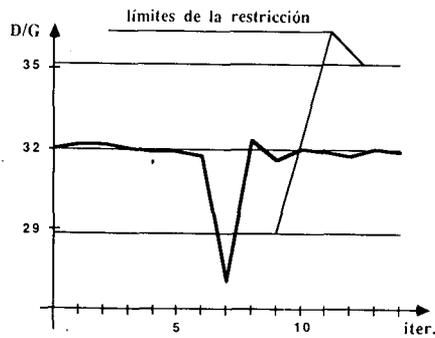
(a) geometría y malla iniciales



(b) formas inicial y final

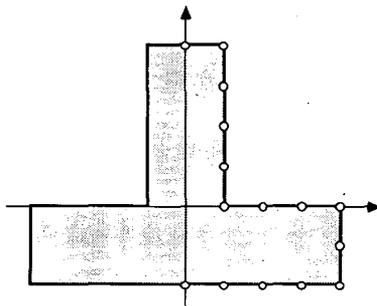


(c) variación de la función objetivo

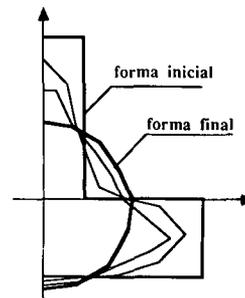


(d) variación de la rigidez torsional

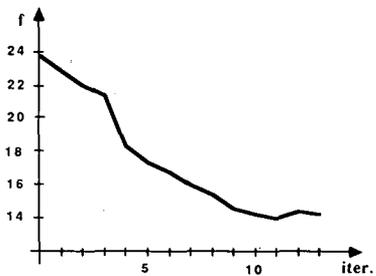
Figura 13. Ejemplo 2: sección en cruz griega.



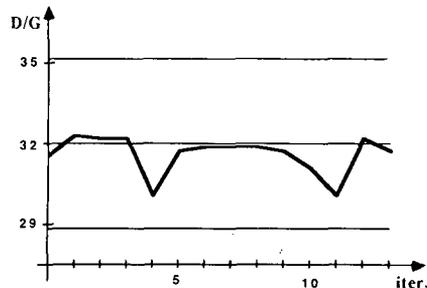
(a) geometría y malla iniciales



(b) formas inicial y final



(c) variación de la función objetivo



(d) variación de la rigidez torsional

Figura 14. Ejemplo 3: sección en T.

aunque no óptimos. En el mismo sentido, se puede observar que la función objetivo se reduce muy rápidamente hasta alcanzar un valor a partir del cual se necesita un gran número de iteraciones para producir una disminución significativa de la misma. Esta situación es una característica del método utilizado, como puede observarse en el resto de los ejemplos.

El cuarto ejemplo es un dominio doblemente conexo con un agujero interior rectangular que permanecerá fijo. La forma inicial del contorno exterior es un círculo, y debido a la doble simetría, sólo se ha discretizado un cuarto de la sección. La malla consta de 8 elementos en el contorno exterior y 6 en el interior. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 15. En este caso, el diseño inicial corresponde a un punto situado fuera de la banda de restricción. Los valores utilizados en este caso son $\varepsilon_R = 0.01$; $\varepsilon_m = 5^0$; $D_0/G = 600$.

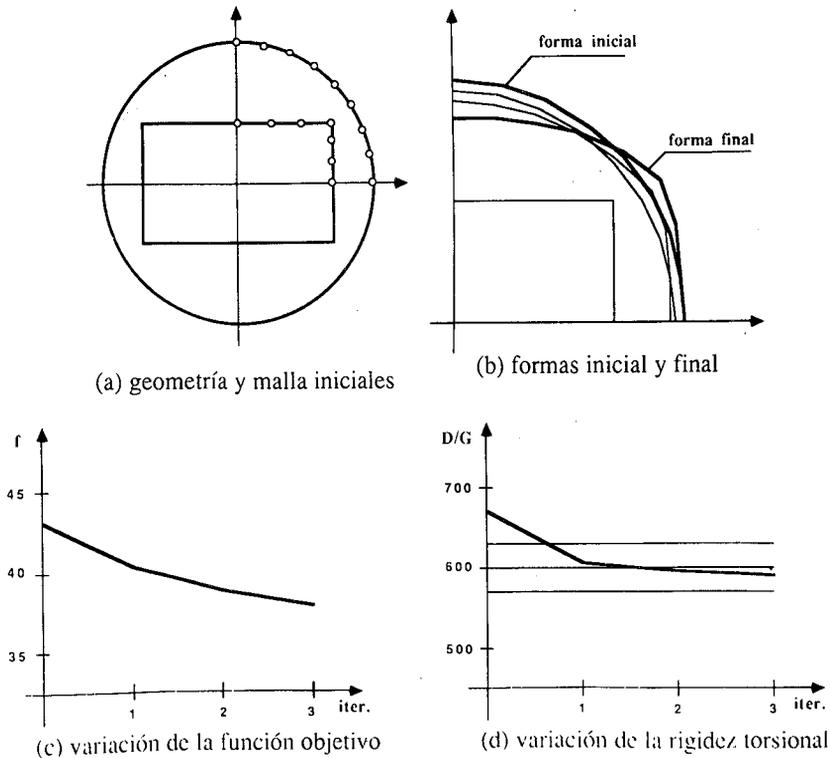


Figura 15. Ejemplo 4: sección circular con agujero rectangular.

El siguiente caso es un problema más complejo, con un cuadrado exterior fijo, y un agujero interior situado excéntricamente (Figura 16). Son necesarias 16 iteraciones para alcanzar el mínimo de la función objetivo, con una drástica reducción de la misma como cabía esperar. Hay que destacar de nuevo que incluso en este caso los puntos de diseño se mantienen dentro de la banda de restricción. Los valores utilizados son $\varepsilon_R = 0.01$; $\varepsilon_m = 5^0$; $D_0/G = 860$.

A continuación se presenta un caso triplemente conexo, con el exterior fijo y dos agujeros interiores (Figura 17). En este caso es de esperar la intersección de los dos

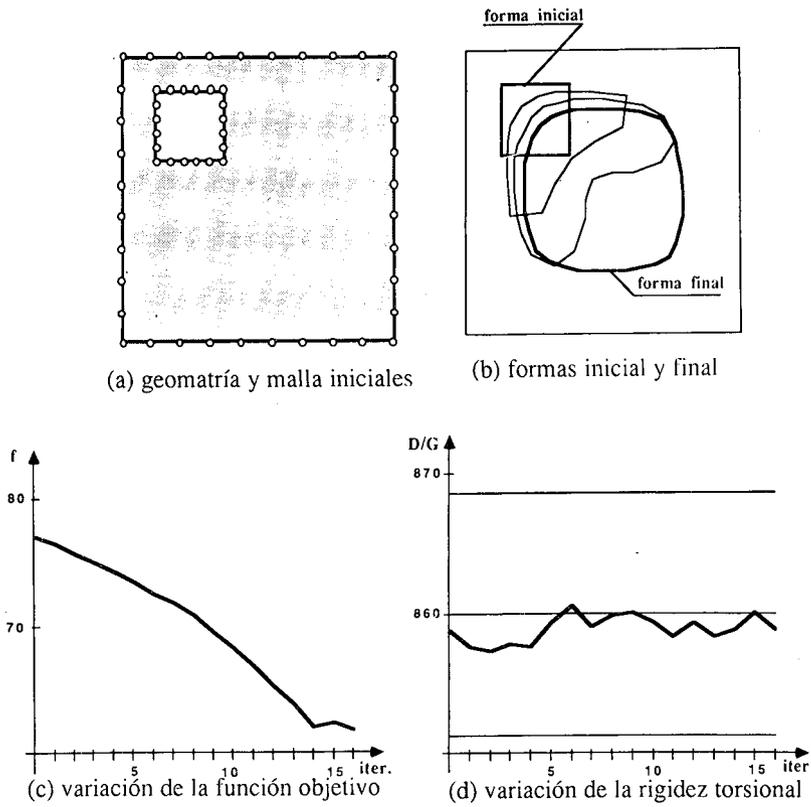


Figura 16. Ejemplo 5: sección cuadrada con agujero excéntrico.

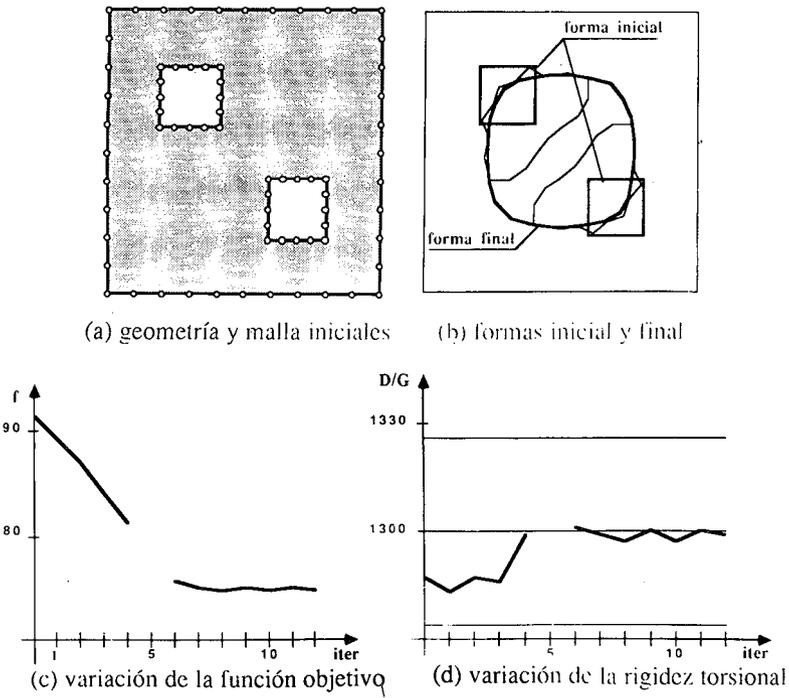


Figura 17. Ejemplo 6: sección cuadrada con dos agujeros.

contornos interiores para dar un único agujero central casi circular (los resultados confirman plenamente las previsiones). Sólo son necesarias 12 iteraciones para alcanzar el óptimo. El corte entre los dos contornos interiores se produce en la iteración 5, redefiniéndose la malla y continuando el proceso. Los valores utilizados son $\varepsilon_R = 0.02$; $\varepsilon_m = 5^0$; $D_0/G = 1300$.

Finalmente, se presenta un problema ortótropo con cuatro agujeros interiores fijos y doble simetría (Figura 18). La forma final obtenida se acerca a una elipse cuya relación de semiejes casi reproduce la de los módulos de rigidez, que es $G_x/G_y = 4$. El número de iteraciones necesario para llegar al óptimo es de 5. Los valores utilizados son $\varepsilon_R = 0.03$; $\varepsilon_m = 5^0$; $D_0/G_x = 130$.

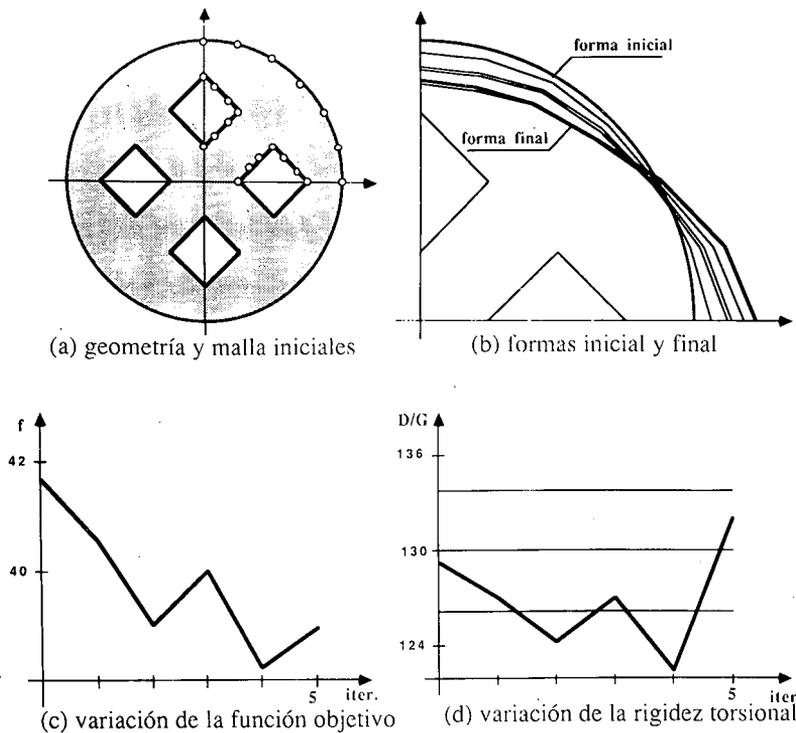


Figura 18. Ejemplo 7: sección ortótropa múltiplemente conexas.

CONCLUSIONES

Se ha presentado la formulación completa de la optimización de secciones sometidas a torsión mediante elementos de contorno, así como el método numérico y el proceso de optimización utilizados para resolver el problema.

Los resultados muestran una rápida convergencia y generalidad cuando se compara con otros métodos, y mucho menor número de datos y tiempo de CPU que si se utilizan elementos finitos.

Es interesante resaltar el hecho de que los puntos de diseño permanecen dentro de la banda de restricción a lo largo del proceso, lo que significa que los diseños intermedios

son también válidos, aunque no óptimos, siendo posible detener el proceso cuando se considere conveniente.

No existe restricción en la forma o tamaño de las secciones, debido a la utilización de las coordenadas de los nodos como variables de diseño, lo cual garantiza que se alcanza un óptimo real si se utiliza una buena discretización.

Finalmente, los criterios de redefinición utilizados permiten una más rápida convergencia, con una regularización automática de la malla a lo largo del proceso.

REFERENCIAS

1. E.J. Haug y J. Cea, "Optimization of Distributed Parameter Structures", *Proceedings of the NATO advanced Study Inst. on Opt. of Dist. Param. Structu. Systems*, Editores: E.J. Haug y J. Cea, Iowa, (1980).
2. E.J. Haug y J.S. Arora, "Applied Optimal Design", Ed. John Wiley and Sons, (1979).
3. C. Mota Soares, "Computer Aided Optimal Design (Structural and Mechanical Systems)", Ed. C. Mota Soares, Troia, Portugal, (1986).
4. A.J. Durelli, "Optimización de Formas Estructurales", *Series del Instituto de Ingeniería*, U.N.A.M. no. 437, (1981).
5. N. Kijuchi y J.E. Taylor, "Shape Optimization of Elastic Bars in Torsion", *Proceedings of the Euromechanics Colloquium*, pp. 216-223, Siegen, (1982).
6. L.M. Kurshin y P.N. Onoprienko, "Determination of the Shapes of Doubly Connected Bar Sections of Maximum Torsional Stiffness", *PMM 40*, pp. 1020-1026, (1976).
7. K. Dems, "Multiparameter Shape Optimization of Elastic Bars in Torsion", *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, Vol. 113, pp. 247-263, (1978).
8. C.A. Mota y L.M. Oliveira, "Boundary Elements in Shape Optimization", *Third National Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, Lisboa, (1983).
9. C.A. Mota, L.M. Oliveira y H.C. Rodrigues, "Optimization of the Shape of Solid and Hollow Shafts Using Boundary Elements", *Proc. Fifth Int. Conf. on B.E.*, Hiroshima, (1983).
10. C.A. Mota, H.C. Rodrigues, L.M. Oliveira y E.J. Haug, "Optimization of the Geometry of Shafts Using Boundary Elements", *ASME Design Automation Conf.*, Michigan, (1983).
11. I.S. Sokolnikoff, "Mathematical Theory of Elasticity", Mc Graw Hill (2 Ed.), (1956).
12. O.D. Kellog, "Foundations of Potential Theory", Springer Verlag, (1929).
13. F. París, A. Martín y E. Alarcón, "Potential Theory" in Progress in B.E.M. C.A., Brebbia (Ed.), Halsted Press, (1981).
14. F. París, "El Método de los Elementos de Contorno en la Teoría del Potencial y la Elasticidad", *Tesis Doctoral*, U.P. Madrid, (1979).