

Tratamiento del fenómeno de fatiga isotérmica mediante la mecánica de medios continuos

Sergio Oller y Alberto Suero

Universitat Politècnica de Catalunya
ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona
Tel.: 34-93-401 74 01, Fax: 34-93-401 10 48
e-mail:oller@etsecpcb.upc.es

Resumen

En el presente trabajo se desarrolla un nuevo modelo constitutivo, basado en la mecánica de medios continuos, que permite modelizar el comportamiento a fatiga isotérmica bajo cargas periódicas. Este modelo abre la posibilidad de tratar en forma conjunta fenómenos acoplados, tales como la combinación de fatiga con daño, plasticidad, fenómenos viscosos y temperatura. Se presenta una formulación basada en la teoría de la plasticidad y daño y se establecen las modificaciones necesarias a realizar en estas teorías para garantizar la inclusión del fenómeno de fatiga. Por último se muestran las cualidades del modelo mediante un ejemplo que permite deducir sus capacidades.

ISOTHERMIC FATIGUE FORMULATION USING THE CONTINUUM MECHANICS FRAME WORK

Summary

In the present work is developed a new constitutive model, based on the mechanics of continuous medium, which permits the simulation of the isothermal behavior fatigue of the parts under non-periodic loads. This model permit to behave in unifies form-coupled phenomena, such as the fatigue combination with damage, plasticity, viscous phenomena and temperature. It is presented a formulation based on the theory of the plasticity and damage and are established the necessary modifications to accomplish in these theories, to guarantee the incorporation of the fatigue phenomenon. Finally, through an academic example are shown the qualities of the model.

INTRODUCCIÓN

Las cargas cuyas amplitudes son variables a lo largo del tiempo producen sobre las estructuras una rotura a valores de tensión inferior a las producidas por cargas de amplitud constante. A este fenómeno se le denomina fatiga y es definido de un modo más general por las normativas ASTM¹² como: "el proceso de cambio estructural permanente, progresivo y localizado que ocurre en un punto del material sujeto a tensiones y deformaciones de amplitudes variables y que produce grietas que conducen a una fractura total luego de un cierto número de ciclos".

La fatiga es la causante de la mayor parte de las roturas de las piezas en servicio, tanto en los mecanismos actuantes en estructuras aeronáuticas, navales y automovilísticas, como en las estructuras civiles de puentes, etc.

El estudio de la fatiga exige comprender que no es un fenómeno asociado al concepto clásico de plasticidad y/o daño y que la rotura se produce bajo cargas que están aun en el período elástico del comportamiento del material. Concretamente se produce una pérdida de

resistencia en función del número de ciclos que induce a un posterior rebase de la resistencia máxima, provocando un problema de plasticidad y/o daño secundario.

Las roturas por fatiga son especialmente peligrosas porque no suelen presentar indicios de fallo inminente, sino que este se produce de modo repentino y sin observar deformaciones plásticas de conjunto. Se trata pues de roturas frágiles que se caracterizan por presentar zonas bien diferenciadas: una de textura lisa con muestra de rotura dúctil y otra de textura gruesa rugosa más brillante que es donde se localiza la rotura final al rebasar la resistencia máxima disminuida por el fenómeno de fatiga.

Hay que recordar que normalmente la fatiga no sobreviene sola y que siempre está acompañada de otros efectos mecánicos que en un principio pueden parecer secundarios, pero al final se tornan determinantes en la vida de las piezas.

En una pieza sometida a cargas cíclicas se pueden distinguir varias etapas durante el proceso de fatiga (Figura 1):

- Región I, que corresponde a una fase donde se producen los primeros cambios microestructurales, aumento de densidad de dislocaciones y formación de microfisuras y posterior localización de las zonas con daño irreversible;
- Región II, donde se inician las macrogrietas y formación de fisuras con orientación dominante;
- Región III, donde se produce un proceso de propagación inestable, provocando la fractura o fallo total de la pieza.

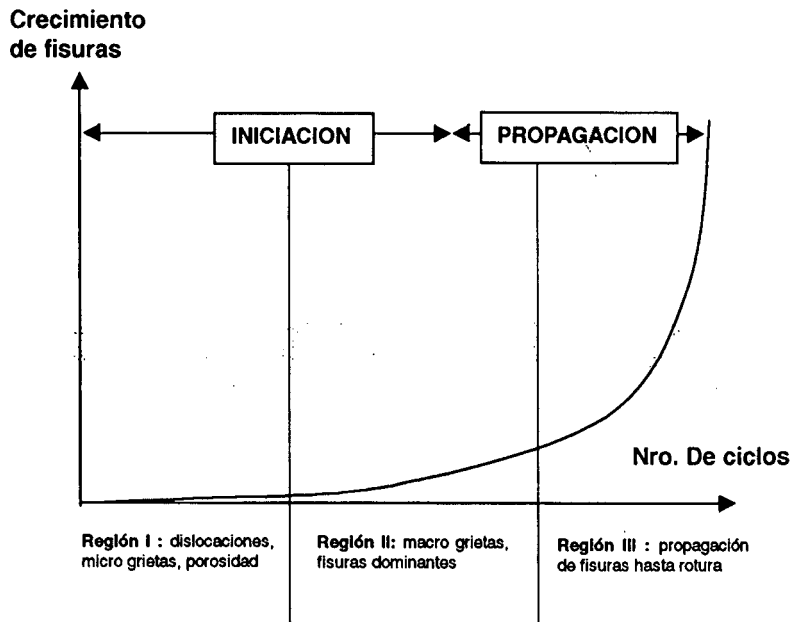


Figura 1. Etapas de la vida a fatiga de un material

La duración de cada etapa descritas anteriormente puede variar considerablemente en función del tipo de material, carga, geometría, temperatura, irregularidades, etc. También es necesario hacer notar que a menudo es bastante difícil distinguir nítidamente las etapas antes mencionadas.

BREVE REVISIÓN DEL TRATAMIENTO TRADICIONAL DE LA FATIGA

El primer estudio sobre la fatiga se realizó sobre materiales metálicos alrededor del año 1829 en Alemania, después de observar el fallo en cadena de estructuras de soporte en minas, sometidas a cargas que usualmente eran consideradas seguras. Esta situación despertó el interés por el estudio de piezas sometidas a cargas cíclicas. Más tarde tuvo especial relevancia con el advenimiento del transporte ferroviario.

Hacia 1860 A. Wöhler¹³, un ingeniero de ferrocarriles bávaro, dio un impulso trascendental al conocimiento del fenómeno de fatiga, después de realizar numerosos ensayos bajo diversas condiciones de carga para determinar la causa de la rotura prematura de los ejes ferroviarios. Fruto de sus estudios eran las caracterizaciones sobre comportamiento a fatiga en términos de amplitud de tensión-número de ciclos de vida (curvas S-N), así como el concepto de resistencia límite de fatiga o indurancia.

Las curvas S-N, o curvas de Wöhler (Figura 2), se obtienen experimentalmente tras someter a distintas muestras a estados cíclicos de carga y establecer la relación de pérdida de resistencia en función del número de ciclos de carga. La definición de la carga se realiza mediante su período, su relación de amplitudes $\Delta S = S_{max} - S_{min}$ o la relación de reversión $R = S_{min}/S_{max}$.

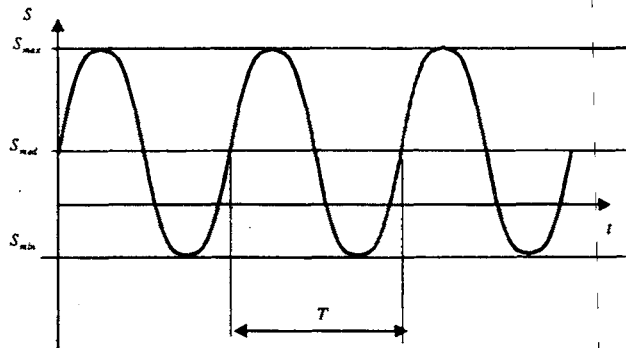


Figura 2a. Evolución de la tensión en un punto

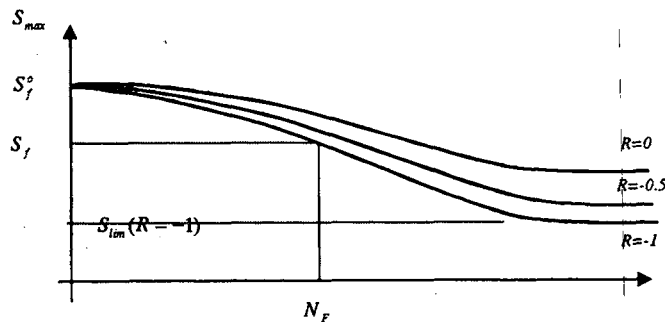


Figura 2b. Curvas S-N o curvas de Wöhler

Años más tarde, a principios del 1900, los estudios se encaminaron a entender el endurecimiento y ablandamiento cíclico de los metales y encontrar curvas de histéresis de deformación y vida en fatiga¹⁵. Esto se hizo a partir de ciclos de desplazamiento de amplitud constante, evitando así efectos de crecimiento desmedido de la tensión, que provocan fenómenos de rotura combinado con fatiga.

Hacia 1950 Manson¹⁶ y Coffin¹⁷ establecieron la idea de que la deformación plástica es la responsable final del daño cíclico en los metales y propusieron una expresión derivada de experimentos que relaciona el número de ciclos con la magnitud de la deformación inelástica.

Otra dirección de los estudios de fatiga fue propuesta sobre la base de la mecánica de fractura. Así aparecen los trabajos de Irwin¹⁸ que intentan relacionar los fenómenos de fatiga con la fractura a través de los factores de intensidad de tensiones. En esta misma línea, años más tarde, Paris, Gómez y Anderson¹⁹ caracterizan el crecimiento de las fisuras por fatiga mediante la utilización del factor de intensidad de tensiones. Ellos fueron los primeros en sugerir que el aumento de la longitud de estas fisuras dependían del rango de fluctuación del factor de intensidad de tensiones. Años más tarde Paris²⁰ propone una notoria relación matemática entre el número de ciclos y la longitud de fisura, haciendo así realidad su idea original.

En estos últimos años se produce un cambio fundamental en el estudio de la fatiga y Chaboche^{14,21} presenta un trabajo donde se puede ver como este fenómeno de fatiga puede ser incorporado en la teoría de daño de la mecánica de medios continuos. Este estudio se basa en admitir que el daño depende en una variable interna de deterioro que permite tratar adecuadamente el fenómeno de acumulación y localización de dislocaciones. Esta variable interna se propone estableciendo una relación entre el daño y el número de ciclos.

Todo esto ha sido presentado para cargas periódicas, donde se puede establecer en forma clara un período dominante. Poco se ha hecho en el caso de cargas no periódicas, sin embargo pueden consultarse los trabajos escritos al respecto por Miner²².

LA FATIGA DENTRO DE LA MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

Como se puede ver en el apartado anterior, los estudios para modelar el comportamiento a fatiga de los metales sometidos a alto número de ciclos se han basado hasta hace poco tiempo en aproximaciones empíricas²³ y más recientemente en la utilización de la mecánica de fractura²⁰. Si bien este último trabajo ha conseguido caracterizar bastante bien el comportamiento para cortos ciclos de vida, no ha ocurrido lo mismo para cargas de larga duración. También han habido grandes inconvenientes en el estudio de problemas cíclicos con amplitudes variables y períodos no constantes, asimismo como en la predicción de los efectos acoplados que ocurren bajo la acción conjunta de una carga cíclica que produce fatiga superpuesta a otra carga no cíclica que produce efectos no lineales instantáneos.

El problema se complica aun más cuando sobrevienen efectos plásticos producidos por la elevada magnitud de la carga, combinados con sus efectos cíclicos que también producen plasticidad. La fatiga, aun en ausencia de plasticidad detectable a escala macroscópica, produce un comportamiento no lineal plástico por cambio a nivel microestructural en el metal. Esto conlleva a la formación de fisuras y desemboca en el fenómeno fundamental de fatiga que se presenta a altos números de ciclos.

Toda la descripción que antecede hace pensar que la estructura teórica mecánica de las formulaciones inelásticas continuas, como la plasticidad y el daño^{3,4,7}, son apropiadas para el tratamiento de este fenómeno no lineal. Desde otro punto de vista, se puede decir que el efecto mecánico conocido como fatiga produce una disminución de la resistencia del material en función del número de ciclos, índice de reversión, amplitud de la sollicitación, frecuencia, etc. Esta disminución de resistencia somete al material a comportamientos inelásticos que pueden entenderse como microfracturas y posterior coalecencia de las mismas, conduciendo al colapso total en las piezas estructurales.

Además de la justificación fundamental que se acaba de exponer, un modelo formulado dentro de la mecánica de medios continuos permite solventar una serie de carencias que tienen aquellos basados en mecánica de fractura, como:

- Los modelos clásicos propuestos para el estudio de la fatiga se limitan a predecir el número de ciclos de vida de los materiales bajo cargas periódicas^{19,20}. El modelo propuesto, en

cambio permite introducir el fenómeno de pérdida de resistencia de los metales producido por los efectos combinados de fatiga, fractura, daño, plasticidad, viscoelasticidad, etc. Así, se puede tener en cuenta fenómenos complejos que ocurren en los materiales, pudiendo hacer predicciones sobre piezas en servicio y estudiar su seguridad en un determinado momento de su vida.

- Extendiendo aun más la idea presentada en el párrafo anterior, conviene recordar que los ensayos experimentales constituyen una buena herramienta para casos concretos y para obtención de parámetros, pero no pueden extrapolarse sus resultados a situaciones más complejas que las estudiadas en el laboratorio. Tampoco la "mecánica de fractura" ofrece una solución amplia a este problema, resultando complicado cuantificar de este modo el efecto producido en condiciones complejas de carga. Abordando de una forma más general el problema, desde la óptica de la mecánica de medios continuos, es posible tener en cuenta los efectos combinados de otros factores como la temperatura, la tensión media, los estados multiaxiales, el fenómeno de daño plástico, la viscoelasticidad, etc.
- La introducción de una nueva variable interna, relacionada con el problema de la fatiga, permitirá tratar el fenómeno de acumulación de daño sin necesidad de formular una regla complementaria. De este modo el modelo que aquí se propone es capaz de tener en cuenta fenómenos de acumulación no lineal del daño, que tiene lugar cuando se solicita a una pieza a distintos niveles de amplitud de carga.

Modelo elasto-plástico con daño. Formulación básica

Se considera un problema general termomecánico acoplado y en particular en este trabajo sólo se presenta la parte correspondiente al problema mecánico afectado de los términos térmicos^{3,4,7}, por lo tanto se debe tener presente que no se incluye la parte térmica influenciada por el problema mecánico, debido a que se trata de un problema estándar de conducción de calor⁷.

Las teorías inelásticas de plasticidad y/o daño, resuelven el problema del comportamiento del material una vez abandonado el régimen elástico y ambas teorías permiten estudiar el cambio de resistencia que sufre un punto del sólido por efectos inelásticos, pero no son sensibles al efecto cíclico de las cargas. No obstante, su formulación básica permite incorporar estos fenómenos de pérdida de resistencia por efectos instantáneos, acoplados con los efectos cíclicos.

Cada punto del sólido, sigue una ley constitutiva elasto-plástica con daño (plasticidad con degradación de rigidez^{5,6,9}). Así la evolución de la tensión depende de la variable libre de deformación del componente y del grupo de variables internas plásticas y de daño.

Esta teoría trata en conjunto los fenómenos de acumulación de deformación permanente mediante la teoría de plasticidad y el de degradación de rigidez mediante la teoría de daño.

Modelo de daño plástico

Se basa en la hipótesis de aditividad de la energía libre entre la parte elástica Ψ^e y la plástica Ψ^p . Esto ocurre en la configuración referencial para un cierto campo de entropía η , una temperatura θ y una deformación elástica de Green $E_{ij}^e = E_{ij} - E_{ij}^p - E_{ij}^\theta$, tal que estas dos últimas actúan como variables libres del problema^{1,5,6,9}

$$\Psi = \Psi^e(E_{ij}^e, d, \theta) + \Psi^p(\alpha^p, \theta) = \left\{ (1 - d) \frac{\rho^2}{2m^o} [E_{ij}^e C_{ijkl}^o(\theta) E_{kl}^e] + \Psi^p(\alpha^p, \theta) \right\} - \theta \eta \quad (1)$$

Considerando la segunda ley de la termodinámica (desigualdad de Clasius-Duhem^{3,4,7})

$$\Xi_m = \frac{S_{ij} : \dot{E}_{ij}^p}{m^o} - \dot{\Psi} - \frac{J}{\theta m^o} q_i \nabla \theta \geq 0 \quad (2)$$

resulta la siguiente definición de la tensión y entropía

$$S_{ij} = m^o \frac{\partial \Psi^e}{\partial E_{ij}^e} = (1-d)\rho^2 C_{ijkl}^o(E_{kl}^e); \quad \eta = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (3)$$

donde m^o es la densidad del material, E_{ij}^e , E_{ij} , E_{ij}^p , E_{ij}^θ los tensores de deformación, elástico, total, plástico y térmico, respectivamente, $d^{ni} \leq d \leq 1$ variable de daño mecánica, C_{ijkl}^o tensor constitutivo del material en estado virgen, S_{ij} el tensor de tensiones para un punto y ρ^2 variable de regradación del material.

Función de discontinuidad plástica F y potencial plástico G

Se definen funciones homogéneas de primer grado en las tensiones, de la forma

$$\begin{aligned} F(S_{ij}, \alpha^p, \theta) &= f(S_{ij}, \theta) - K(S_{ij}, \alpha^p, \theta) = 0 \\ G(S_{ij}, \alpha^p) &= g(S_{ij}) = \text{cte.} \end{aligned} \quad (4)$$

donde $f(S_{ij}, \theta)$ y $g(S_{ij})$ son funciones de tensión y potencial equivalente, respectivamente, $K(S_{ij}, \alpha^p, \theta)$ el umbral de resistencia y $\alpha^p = \int_0^t \dot{\alpha}^p dt$ las variables internas del modelo plástico^{5,6,9}.

Evolución del flujo plástico y de las variables internas

Se adopta la forma clásica para la definición de las variables internas. Esto es

$$\begin{aligned} \dot{E}_{ij}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial S_{ij}} \\ \dot{\alpha}^p &= \dot{\lambda} H(S_{ij}, \alpha^p) = \dot{\lambda} (h_p)_{ij} \frac{\partial G}{\partial S_{ij}} \end{aligned} \quad (5)$$

donde λ es el factor de consistencia plástica y H una función escalar de argumentos tensoriales^{5,6,9}.

Función de discontinuidad de daño

Se define, al igual que en plasticidad, funciones homogéneas de primer grado en las tensiones. Esto es

$$G^D(S_{ij}, d, \theta) = \bar{S}(S_{ij}, \theta) - f_c(S_{ij}, d, \theta) = 0 \quad (6)$$

donde $\bar{S}(S_{ij}, \theta)$ es la función de daño en el espacio dañado, $f_c(S_{ij}, d, \theta)$ es el umbral de resistencia de daño y $d = \int_0^t \dot{d} dt$ la variable interna del modelo de daño^{5,6,9}.

Regla de evolución de las variables interna de daño

$$\dot{d}_{\text{mec}} = \dot{\mu} \frac{\partial G^D}{\partial \bar{S}} \quad (7)$$

donde μ es el factor de consistencia de daño y G^D la función umbral de daño^{5,6,9}.

Ley constitutiva tangente

A partir de las condiciones de consistencia $\dot{F} = 0$, y $\dot{G}^D = 0$, resulta la variación temporal de la tensión, que puede escribirse en la siguiente forma

$$\dot{S}_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl}^e \dot{E}_{kl} - \mathbf{C}_{ijkl}^p \dot{E}_{kl}^p - \mathbf{C}_{ijkl}^s \dot{E}_{kl}^\theta \rightarrow \dot{S}_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl}^{ep} \dot{E}_{kl} - \mathbf{C}_{ijkl}^\theta \dot{E}_{kl}^\theta$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{ijkl}^s &= (1-d)\mathbf{C}_{ijkl}^o \\ \mathbf{C}_{ijkl}^e &= \mathbf{C}_{ijkl}^s - \frac{1}{(1-d)} \frac{\partial G^D}{\partial \bar{S}} \left[\left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial S_{rs}^o} \right) \mathbf{C}_{rsij}^o \right] S_{kl} \\ \mathbf{C}_{ijkl}^p &= \mathbf{C}_{ijkl}^s - \frac{2}{\rho} (h_p)_{ij} S_{kl} \\ \mathbf{C}_{ijkl}^{ep} &= \mathbf{C}_{ijkl}^e - \frac{\mathbf{C}_{ijrs}^p \frac{\partial G}{\partial S_{rs}} \frac{\partial F}{\partial S_{mn}} \mathbf{C}_{mnkl}^e}{-\frac{\partial F}{\partial \alpha_r^p} (h_r)_{tu} \frac{\partial G}{\partial S_{tu}} + \frac{\partial F}{\partial S_{mn}} \mathbf{C}_{mnr s}^p \frac{\partial G}{\partial S_{rs}}} \\ \mathbf{C}_{ijkl}^\theta &= \mathbf{C}_{ijkl}^s - \frac{\mathbf{C}_{ijrs}^p \frac{\partial G}{\partial S_{rs}} \left(\frac{\partial F}{\partial S_{mn}} - \frac{\partial F}{\partial S_{mn}} \mathbf{C}_{mnkl}^e \right)}{-\frac{\partial F}{\partial \alpha_r^p} (h_r)_{tu} \frac{\partial G}{\partial S_{tu}} + \frac{\partial F}{\partial S_{mn}} \mathbf{C}_{mnr s}^p \frac{\partial G}{\partial S_{rs}}} \end{aligned} \quad (8)$$

De esta forma se ha descrito la ley constitutiva tangente para un modelo de plasticidad con daño afectado por la temperatura. A continuación se describe la forma en que se incluye el fenómeno de fatiga dentro de esta estructura teórica.

Formulación del problema de fatiga isotérmica. Modelo elasto-plástico con daño

Presentación de la formulación

A continuación se define sólo el caso particular de fatiga isotérmica sin regradación. El tratamiento que se presenta en este trabajo difiere considerablemente de aquel introducido por Chaboche²¹, pues aquí no se define la evolución de la variable interna de daño en función del número de ciclos, sino que se formula una función que modifica del umbral de discontinuidad (fluencia plástica o daño), y a través de esta se provoca una evolución implícita de las variables internas de los modelo inelásticos de plasticidad o daño.

Consiste en introducir el efecto del número de ciclos en la función de discontinuidad plástica y de daño, exigiendo el cumplimiento simultáneo de las mismas

$$\begin{aligned} f(S_{ij}) - K(S_{ij}, \alpha^p) \cdot f_{\text{red}}(N, S_{\text{med}}, R) = 0 &\implies \underbrace{\left(\frac{f(S_{ij})}{f_{\text{red}}(N, S_{\text{med}}, R)} \right)}_{f'(S_{ij}, N, R)} - K(S_{ij}, \alpha^p) = 0 \\ \bar{S}(S_{ij}) - f_c(S_{ij}, d) \cdot f_{\text{red}}(N, S_{\text{med}}, R) = 0 &\implies \underbrace{\left(\frac{\bar{S}(S_{ij})}{f_{\text{red}}(N, S_{\text{med}}, R)} \right)}_{\bar{S}'(S_{ij}, N, R)} - f_c(S_{ij}, d) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

La función $f_{red}(N, S_{med}, R)$ hace sensible los modelos de plasticidad y daño al fenómeno de fatiga, N es el número de ciclos actual, $R = S_{max}/S_{min}$ es el factor de reversión de la tensión y S_{med} la tensión media (Figura 3).

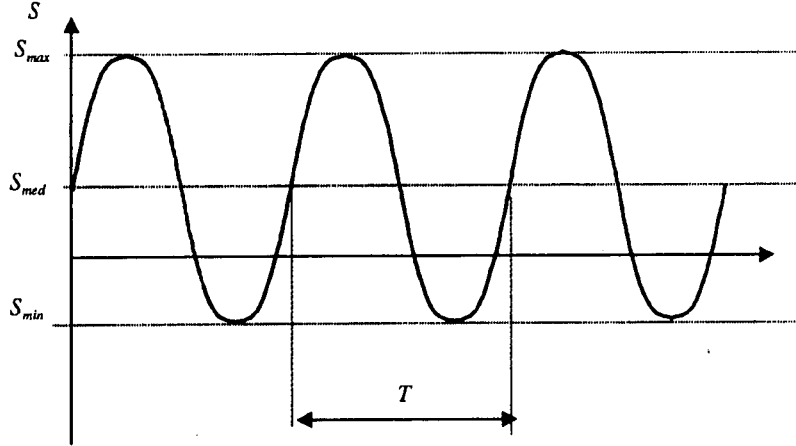


Figura 3. Evolución de la tensión en un punto

De esta forma, la ley constitutiva tangente para un problema de fatiga isotérmico queda escrita como

$$\dot{S}_{ij} = C_{ijkl}^t \dot{E}_{kl} \quad (10)$$

donde

$$C_{ijkl}^t = C_{ijkl}^e - \frac{C_{ijrs}^s \frac{\partial G}{\partial S_{rs}} \frac{\partial f'}{\partial S_{mn}} C_{mnlk}^e}{-\frac{\partial F}{\partial \alpha^p} (h_p)_{tu} \frac{\partial G}{\partial S_{tu}} + \left(\frac{\partial f'}{\partial S_{mn}} \right) C_{mnr s}^s \frac{\partial G}{\partial S_{rs}}} \quad (11)$$

donde

$$C_{ijkl}^e = C_{ijkl}^s - \frac{1}{(1-d)} \left[\frac{\partial \bar{S}'}{\partial S_{rs}^0} C_{ijrs}^0 \right] S_{kl}$$

Se define también la variable de deterioro global en función de la disipación normalizada, esto es

$$\dot{q} = \Xi_m f(S_{ij}) = (\Xi^p + \Xi^d) \left[\frac{r(S_{ij})}{g_f} + \frac{(1-r(S_{ij}))}{g_c} \right], \quad r(S_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{para tracción pura} \\ 0 & \text{para compresión pura} \end{cases}$$

donde Ξ^p , Ξ^d son las disipaciones producidas por el problema plástico y de daño respectivamente y g_f , g_c los límites máximos de energía que puede disipar un punto al final del proceso de deterioro total. Debe observarse que esta definición obliga al cumplimiento simultáneo de las condiciones de consistencia plástica y de daño. También se puede ver que el proceso mecánico que se ha descrito anteriormente permite acoplar fenómenos dependientes o no del tiempo y del número de ciclos, por lo tanto el camino para alcanzar una determinada resistencia, resulta de la composición de otros dos definidos en espacios independientes (Figura 4).

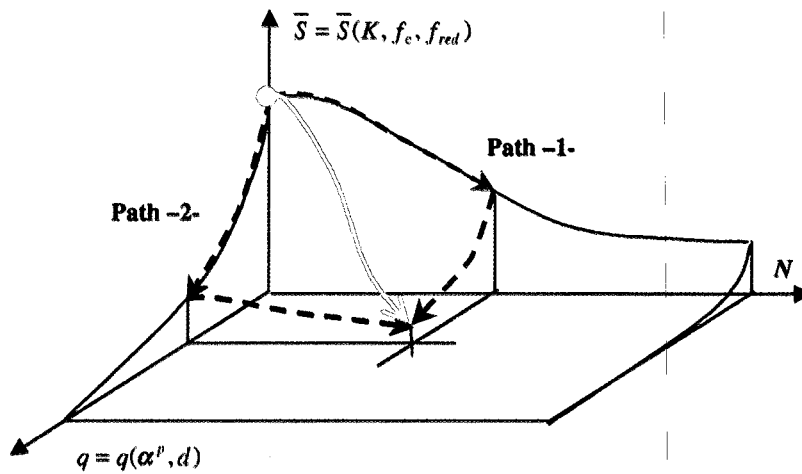


Figura 4. Distintos caminos para converger a un punto del espacio de tensión equivalente

En la Figura 4 también se observa esquemáticamente la evolución de la variable de daño global, luego de ocurrir un número de ciclos y haber entrado en plasticidad y/o daño.

Curvas de Wöhler

Las curvas de Wöhler permiten definir la función $f_{red}(N, S_{med}, R)$ de disminución de resistencia por fatiga. Como se ve en la definición básica de estas curvas, puede ocurrir una disminución de resistencia del material, aun para puntos del material sometidos por debajo del límite elástico.

Se denomina N_F al número de ciclos que necesita un punto del sólido sometido a una tensión S_f , para alcanzar el umbral de comportamiento elástico.

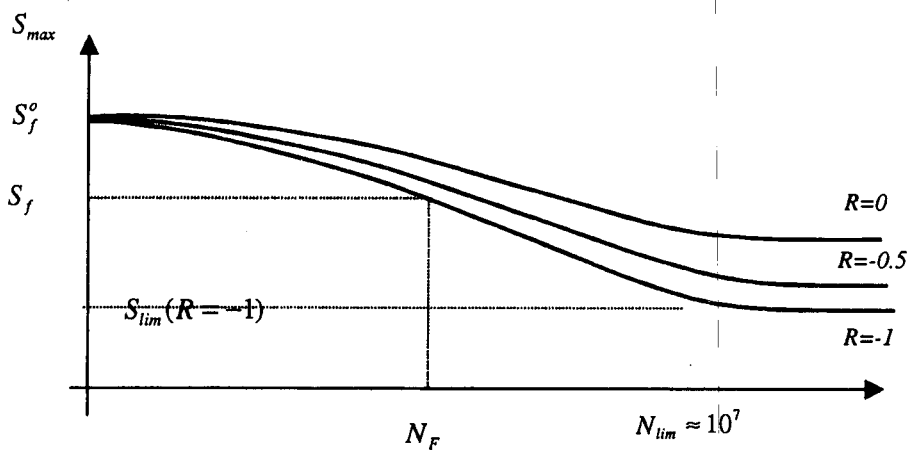


Figura 5. Curva de Wöhler y la resistencia máxima de un punto

Particularización de la función de reducción $f_{red}(N, S_{med}, R)$ para un acero A517

A continuación se presenta a modo de ejemplo las expresiones que describen la evolución de la resistencia del material para un acero del tipo A517. Para un estado virgen, es decir para $N = 0$ ciclos la resistencia vale $S_{max} = S_f^0 = 8389 \text{ kp/cm}^2$, y a su vez esta corresponde al umbral de resistencia instantáneo para un problema no-cíclico.

Se propone para $N \rightarrow \infty$ alcanzar el límite de indurancia $S_{lim} = S_f^0 \left(\frac{1}{1,26} + \frac{R}{3,3} \right)$ a través de una evolución de la resistencia máxima de la forma

$$S_{max} = S_f^0 e^{-A(\log N)^\alpha} \tag{12}$$

Imponiendo $S_{lim} = S_{max}(N = N_{lim} = 10^7)$, se obtiene el límite de indurancia

$$S_{lim} = S_f^0 \left(\frac{1}{1,26} + \frac{R}{3,3} \right) S_f^0 e^{A(\log N)^\alpha} \rightarrow A = \frac{\ln \left(\frac{1}{1,26} + \frac{R}{3,3} \right)}{7^\alpha} \tag{13}$$

Con el objeto de ajustar las curvas de Wöhler se adopta $\alpha = 4(2^{2R})$, resultando curvas como la que se muestra en la Figura 6.

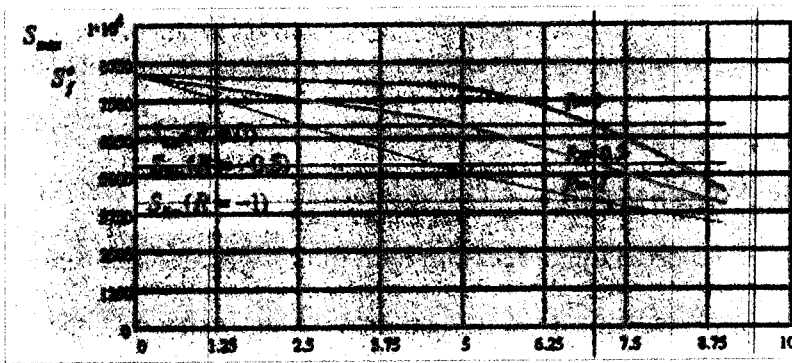


Figura 6. Aproximación de las curvas de Wöhler

Se definen las curvas de resistencia límite a la fatiga para el acero A517 a partir de sus características²⁴ y resultan según las siguientes aproximaciones

$$S_f(N) = \begin{cases} S_f(N = 0) = S_f^0 \\ S_f(N < N_F) = S_f^0 e^{-B_2(\log N)^\beta} = S_f^0 f_{red}(N, S_{med}, R) > S_{max}(N) \\ S_f(N = N_F) S_f^0 e^{-A(\log N)^\alpha} \\ S_f(N_F \leq N \leq N_{lim}) = S_f = S_f^0 e^{-B_1(\log N)^\beta} = S_f^0 f_{red}(N, S_{med}, R) \\ S_f(N \geq N_{lim}) = S_f = S_f^0 e^{-B_2(\log N)^\beta} = S_f^0 f_{red}(N, S_{med}, R) \end{cases} \tag{14}$$

donde

$$B_1 = \frac{\ln \left(\frac{S_{APLI}}{S_f^0} \right)}{(\log N_F)^\beta}, \quad B_2 = \frac{\ln \left(\frac{S_{lim}}{S_f^0} \right)}{(7)^\beta}, \quad \beta = 4, 2^{2R} C$$

$$N_F = \log^{-1} \left[7^\alpha \sqrt{\frac{\ln \left(\frac{S_{APLI}}{S_f^0} \right)}{\ln \left(\frac{1}{1,26} + \frac{R}{3,3} \right)}} \right]$$

Donde S_{APLI} representa el nivel de tensión aplicada en el punto.

Tratamiento de la fatiga térmica

Se entiende por fatiga térmica aquella que se desarrolla por la sola acción de la temperatura, sin la influencia de cargas mecánicas externas²³. Este fenómeno ha sido estudiado experimentalmente y se conocen las cualidades del comportamiento de los materiales metálicos cuando están sometidos a ciclos térmicos a baja y alta temperatura. Actualmente el tratamiento numérico de este problema no ha sido abordado y se está investigando una vía de solución siguiendo en la línea teórica que se ha descrito en este trabajo.

EJEMPLOS DE COMPROBACIÓN

Formas de las curvas de pérdida de resistencia por fatiga según la teoría

A continuación se muestran las curvas de pérdida de resistencia del material que se utiliza en el ejemplo de fatiga que se expone en el apartado siguiente. Estas curvas son hipotéticas y sólo están pensadas para mostrar la cualidad de la respuesta del modelo descrito en el presente trabajo. Es importante notar, cuan sensible son estas curvas a la magnitud de la tensión media y al factor de reversión de tensiones. Estos casos que se muestran a continuación deben interpretarse como explicativos del funcionamiento de un punto sometido a desplazamiento impuesto armónico que produce un nivel de tensión máxima durante el campo elástico de comportamiento y luego decae esta tensión a medida que aumenta el número de ciclos de aplicación de la acción.

Estas curvas han sido obtenidas a partir de las expresiones (14) y han sido particularizadas para un determinado nivel de tensión aplicada.

Ciclos de carga bajo una tensión media alta cercana al límite de fluencia plástico instantáneo

En la Figura 7 se puede observar un punto del material sometido a una tensión aplicada S_{APLI} muy cercana al límite de fluencia plástico. Esta situación produce un pronto deterioro del material por fatiga, obligando a una pérdida de resistencia a medida que aumenta el número de ciclos.

$$S_f^0 = 8389,6 \text{ kg/cm}^2, S_{APLI} = 7140 \text{ kg/cm}^2, R = -1, C = 2$$

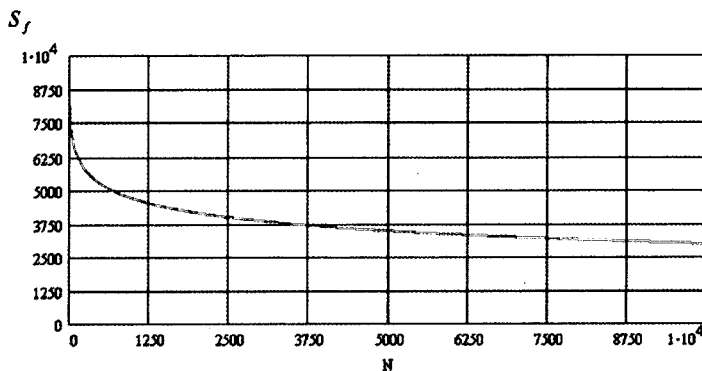


Figura 7. Evolución de la tensión en un punto para:
 $S_f^0 = 8389,6 \text{ kg/cm}^2, S_{APLI} = 7140 \text{ kg/cm}^2, R = -1, C = 2$

Ciclos de carga bajo una tensión media baja cercana a cero

En este caso (Figura 8), se puede ver que a pesar del aumento del número de ciclos la resistencia del material baja muy poco, debido a que la tensión aplicada S_{APLI} es prácticamente nula.

$$S_f^0 = 8389,6 \text{ kg/cm}^2, S_{\text{APLI}} = 0,01 \text{ kp/cm}^2, R = -1, C = 2$$

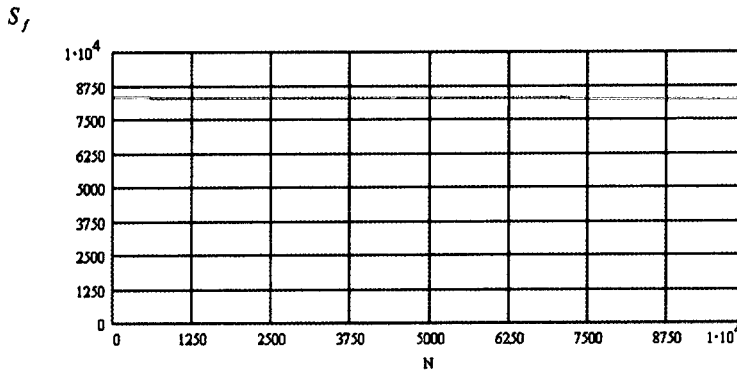


Figura 8. Evolución de la tensión en un punto para:
 $S_f^0 = 8389,6 \text{ kg/cm}^2, S_{\text{APLI}} = 0,01 \text{ kp/cm}^2, R = -1, C = 2$

Ciclos de carga bajo una tensión media alta cercana al límite de fluencia plástico instantáneo

En este caso, similar al que se ha presentado en la Figura 7, se observa como al disminuir el factor de reversión R , se produce un efecto de pérdida de resistencia más pronunciada.

$$S_f^0 = 8389,6 \text{ kg/cm}^2, S_{\text{APLI}} = 7140 \text{ kp/cm}^2, R = -1,5$$

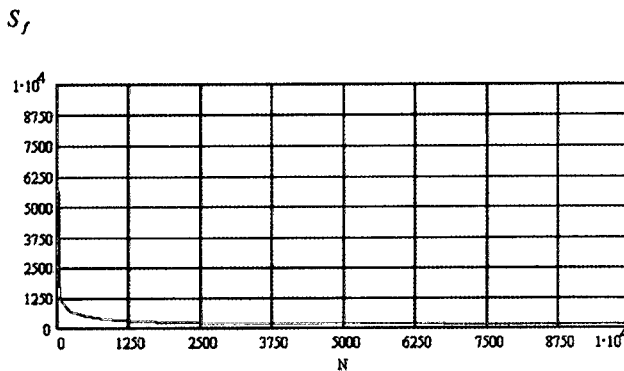


Figura 9. Evolución de la tensión en un punto para:
 $S_f^0 = 8389,6 \text{ kg/cm}^2, S_{\text{APLI}} = 7140 \text{ kp/cm}^2, R = -1,5$

Evolución de la fractura por fatiga en una probeta entallada

A continuación se presenta la evolución de la fractura en una probeta de acero A517, cuyas características se muestran en la Figura 10, sometida a un desplazamiento armónico de amplitud constante $\delta = 0,002 \text{ cm}$.

Características del material, geometría y malla de elementos finitos

Elementos: 125 Nodos: 156 Elementos cuadrangulares de 4 nodos y 4 puntos de Gauss

Características del material:

Material metálico sometido a microfisuración mediante un modelo de daño isótropo
 $E = 2,1 \times 10^6$ kp/cm², $\nu = 0,0$, $S_0^f = 8389,6$ kp/cm², $G_f = G_c = 10$ kp/cm

Característica de la sollicitación:

Período medio de la acción: $T = 1$ s, factor de reversión de la carga: $R = -1$,
 incremento de tiempo: $\Delta t = 3$ s, incremento de ciclos: $N = (t/T)^2$

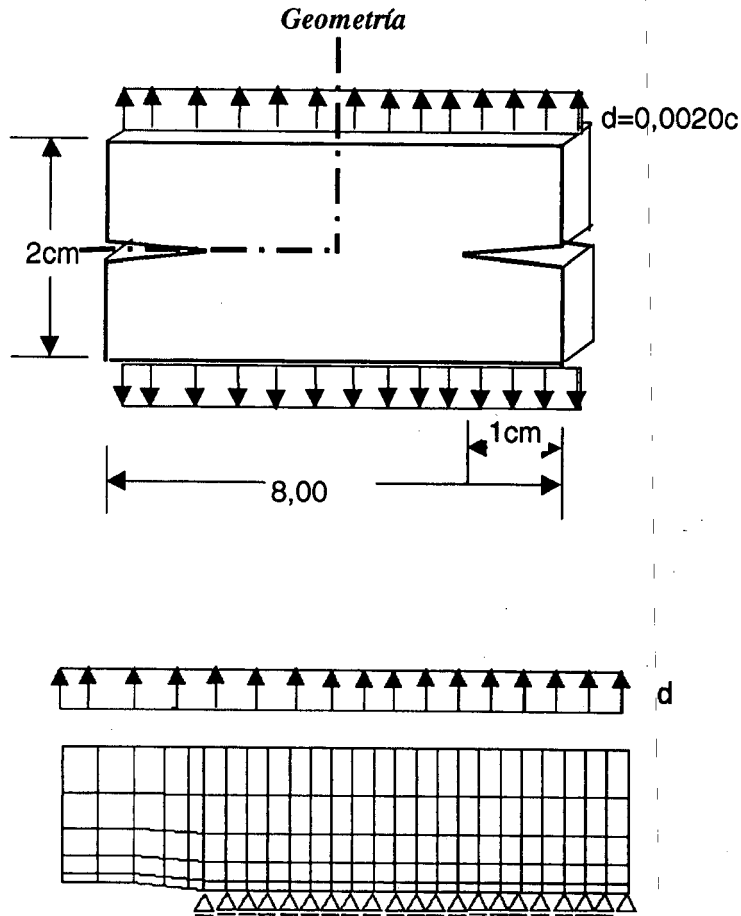


Figura 10. Malla de elementos finitos y esquema de cálculo. a) Geometría y condiciones de borde; b) Malla de elementos finitos y esquema de cálculo

Crecimiento de la localización de deformaciones-fisuración

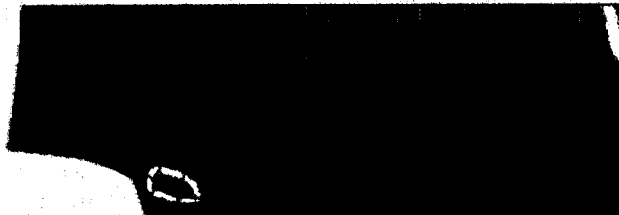
A continuación se muestra la evolución del deterioro que se produce sobre la pieza, sometida a ciclos de desplazamientos de amplitud constante. Es importante observar que durante estos ciclos, el estado tensional máximo es ligeramente inferior al límite elástico en los puntos más exigidos de la pieza. No obstante esto, se puede ver un agotamiento de la pieza que conlleva a un crecimiento de la fisura a lo largo de su eje de simetría horizontal.

En la última serie de estas figuras puede observarse como la fisura producida por la fatiga queda marcada por el fenómeno de localización de deformaciones que se produce sobre el eje de la entalla.

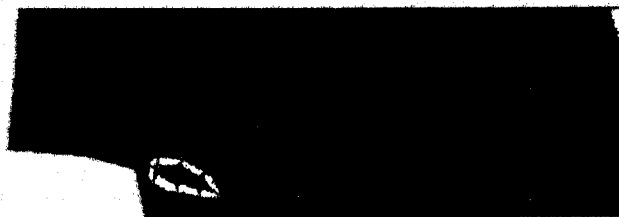
Malla deformada y mapa de deformaciones ε_{yy} para $N_c = 81$



Malla deformada y mapa de deformaciones ε_{yy} para $N_c = 225$



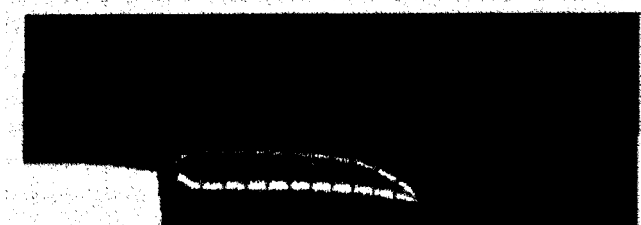
Malla deformada y mapa de deformaciones ε_{yy} para $N_c = 441$



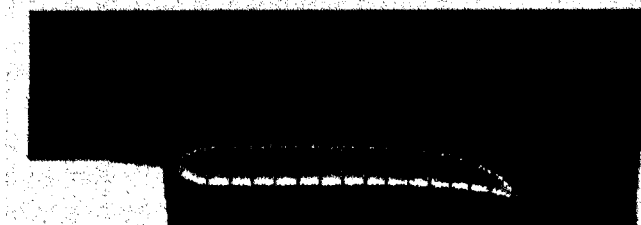
Malla deformada y mapa de deformaciones ε_{yy} para $N_c = 729$



Malla deformada y mapa de deformaciones ε_{yy} para $N_c = 1090$



Malla deformada y mapa de deformaciones ε_{yy} para $N_c = 1520$



Malla deformada y mapa de deformaciones ε_{yy} para $N_c = 2030$

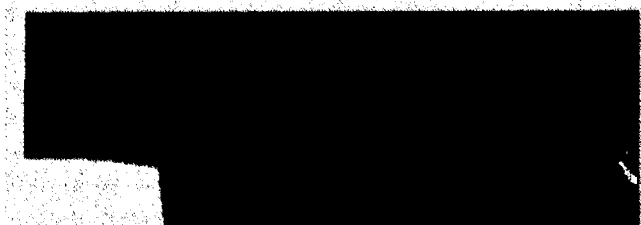


Figura 11. Evolución del índice de daño (fisuración) a lo largo del eje de la pieza

Curvas de evolución del daño a lo largo del eje de la pieza

La siguiente curva muestra la evolución del daño en cada punto que se indica en la Figura 12, en función del número de ciclos. Se puede observar como los primeros puntos sufren un rápido crecimiento del daño, en tanto, por ejemplo el punto 17 inicia su daño en $N = 2,0 \times 10^3$.

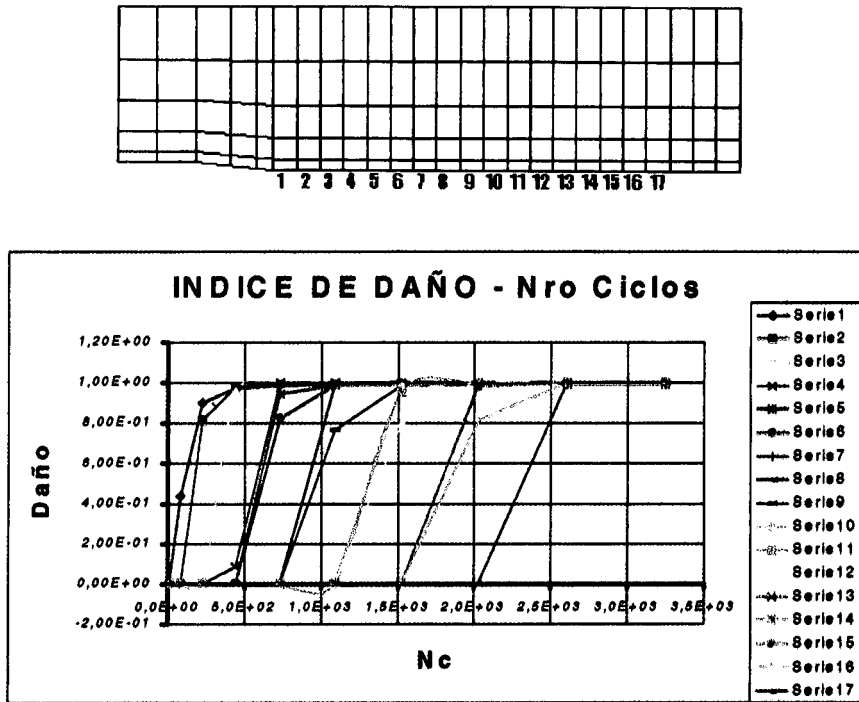


Figura 12. Curvas de evolución del índice de daño a lo largo del eje de la pieza

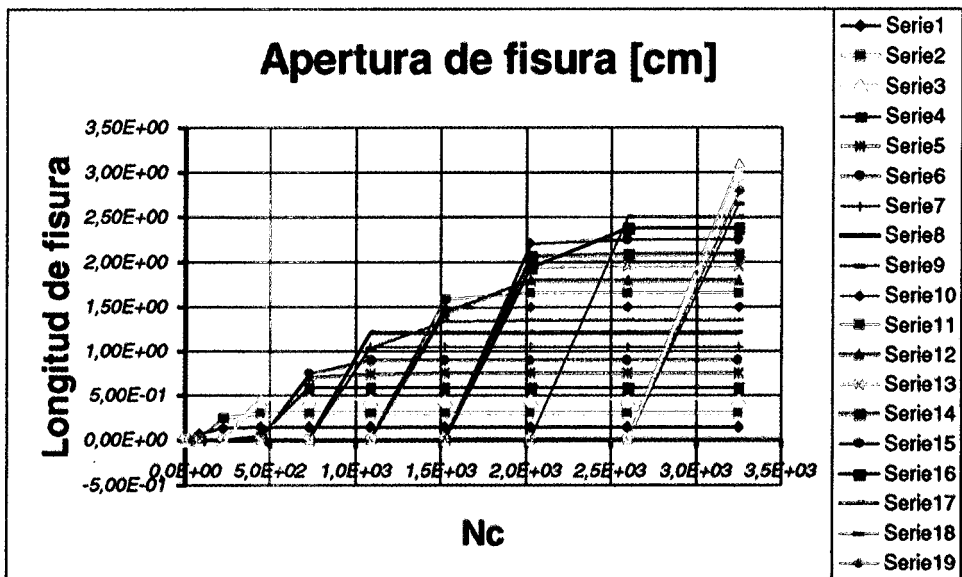


Figura 13. Evolución de la longitud de fisura a en función del número de ciclos

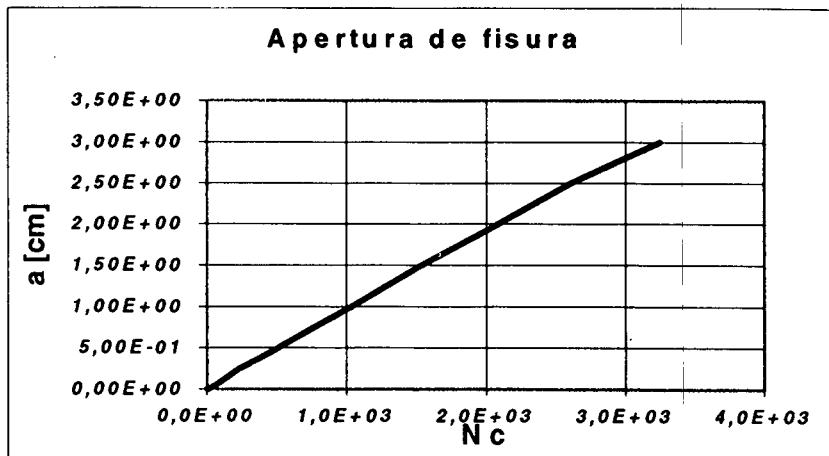


Figura 14. Envolvente de la evolución de la longitud de fisura a en función del número de ciclos (envolvente de las curvas de la Figura 13)

En las Figuras 13 y 14 se presenta la evolución de la longitud de fisura a en función del número de ciclos. En el primer gráfico se muestra la evolución punto por punto y en el segundo su envolvente. Obsérvese que la tendencia de esta envolvente es una recta. Esto se debe a que la acción es un desplazamiento constante y no una carga, lo que hace que a medida que se va abriendo la probeta también se va relajando la carga.

Curvas de evolución de la tensión a lo largo del eje de la pieza

En esta serie de curvas se puede observar la evolución de la tensión en cada punto de la pieza por donde discurre la fractura. Es conveniente recordar, que cada una de estas series corresponde a un punto de los señalados en la figura del subapartado anterior. En ellas se puede observar también que en ningún momento del proceso se alcanza el límite instantáneo de daño $S_0^f = 8389,6 \text{ kp/cm}^2$. Apesar de esto se entra en estado de daño en todos los puntos, tal como se muestra en las figuras del subapartado anterior.

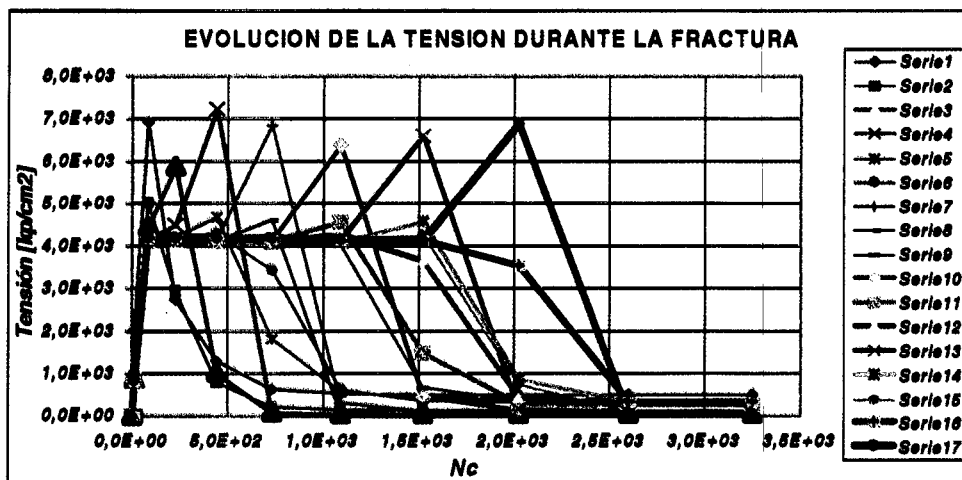


Figura 15. Curvas de evolución de tensión a lo largo del eje de la pieza

En esta última figura también puede observarse como como los puntos mantienen una cierta tensión media y luego crecen bruscamente, para inmediatamente caer a cero. Ejemplo de esto es lo que muestra la evolución de tensión en el punto 17 (último de la serie).

A continuación se presentan las curvas punto por punto para los distintos números de ciclos. En estas curvas se puede observar como la tensión es nula en todos los puntos para cero ciclos (serie 1) y así va aumentando a medida que aumentan los ciclos hasta llegar a 3250 ciclos donde la tensión es prácticamente nula en todos los puntos (serie 11). También es importante mostrar nuevamente, que en ningún caso se alcanza el umbral de daño instantáneo $S_0^f = 8389,6 \text{ kp/cm}^2$, sin embargo el material se fatiga y pierde resistencia, haciendo crecer el daño y la longitud de la fisura.

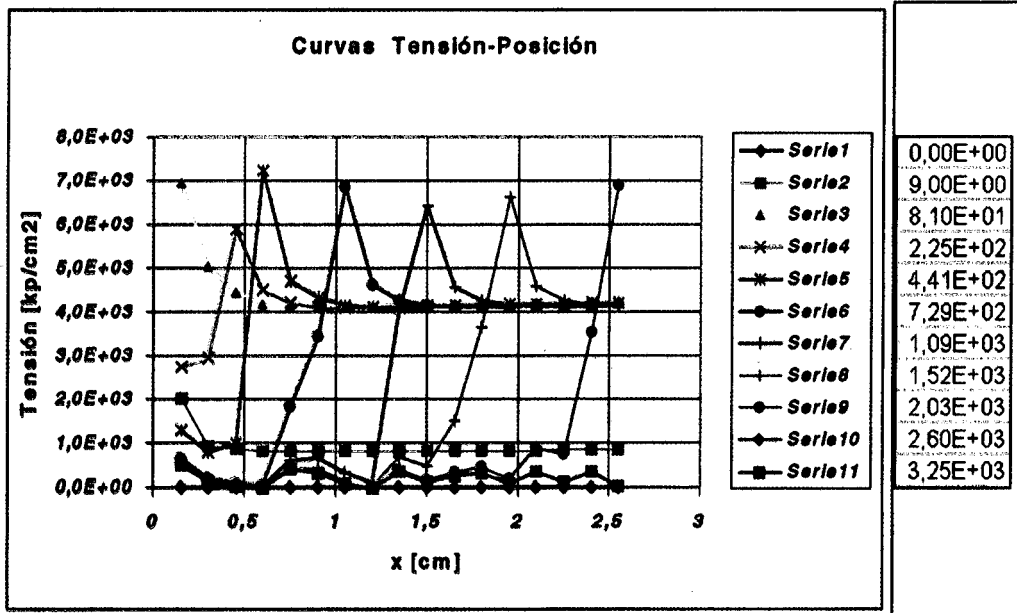


Figura 16. Curvas de evolución de tensión para cada posición de los puntos (curvas tensión-posición)

Evolución de la fractura por fatiga en una probeta. Método clásico de Paris

En este subapartado se resuelve parte del problema ya definido en el apartado anterior, siguiendo la formulación clásica de mecánica de fractura propuesta por Paris²⁰. Como verificación de los resultados presentados anteriormente se obtiene a continuación la evolución de la apertura de fisura vs. el número de ciclos (Figura 14), utilizando la fórmula de Paris.

La formulación de Paris²⁰ define el crecimiento de una fisura a partir de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{da}{dN} = A \cdot (\Delta K_I)^m$$

donde las constantes $A = 0,66 \times 10^{-8}$ y $m = 2,25$ están definidas en este caso para el acero tipo A517. El factor de intensidad de tensiones se define en mecánica de fractura clásica como $K_I = 1,12\sqrt{\pi \cdot a} \cdot S$ para una pieza del tipo de la que se estudia en este ejemplo, luego el incremento de dicho factor se escribe como $\Delta K_I = 1,12\sqrt{\pi \cdot a} \cdot \Delta S$.

Integrando la ecuación de Paris, se obtiene el número de ciclos necesario para provocar una apertura de fisura de tamaño a

$$\Delta N = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{A(\Delta K_I)^m}$$

Sustituyendo en esta última las constantes antes definidas, se puede escribir en forma discreta

$$\Delta N = \frac{\Delta a}{0,66 \times 10^{-8} [1,98(\Delta S) \cdot \sqrt{a_{vg}}]}$$

siendo $\Delta a = a_2 - a_1$ el incremento de fisura en pulgadas desde a_1 hasta a_2 , $a_{vg} = (a_1 + a_2)/2$ el tamaño medio de la fisura expresado en pulgadas y $\Delta S = S_{max} - S_{min}$ la amplitud de tensión del ciclo de carga en "ksi".

Es necesario recordar que la formulación de Paris, está pensada para cargas que producen tensiones impuestas cuyos máximos se mantienen constantes, mientras dure la acción y proporcionan un crecimiento de fisura de tipo exponencial respecto del número de ciclos. Por el contrario, aquí se presenta un ejemplo donde se impone un desplazamiento controlado, por lo tanto el aumento del tamaño de la fisura (pérdida de sección resistente) provoca una relajación tensional en el material. Para utilizar la fórmula de Paris bajo estas condiciones de desplazamiento impuesto, es necesario considerar la disminución de tensión en función del decrecimiento de la sección resistente mediante la siguiente expresión

$$S = S_0 \left(\frac{L - 2a}{L} \right)$$

donde L es el ancho de la pieza a el tamaño de la fisura y S_0 la tensión inicial necesaria para producir el desplazamiento impuesto (tensión media).

Con estas consideraciones se obtiene el crecimiento de la fisura según el método de Paris y se compara con los resultados obtenidos mediante la teoría que se presenta en este artículo (Figura 14), comprobando que las respuestas coinciden bastante bien y que en ambos casos se obtiene un crecimiento de grieta cuasilineal con el número de ciclos.

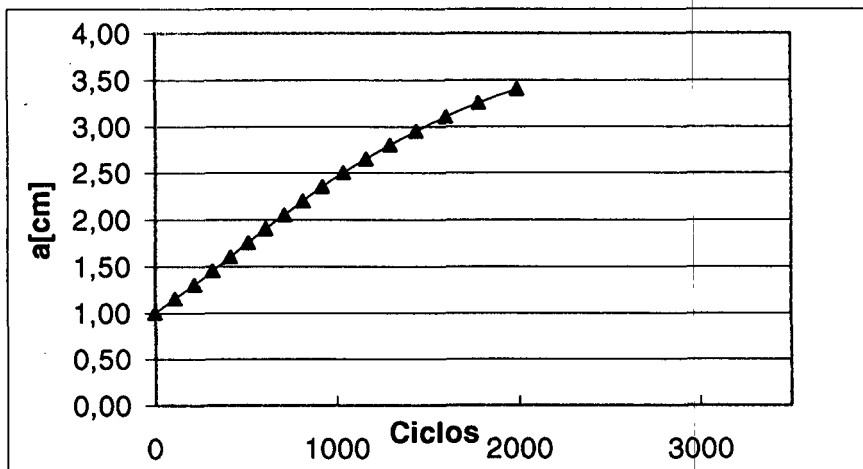


Figura 17. Envolvente de la evolución de la longitud de fisura a en función del número de ciclos. Obtenida mediante la formulación de Paris²⁰

Recordar que para comparar las curvas de las Figuras 14 y 17 hay que tener en cuenta que el tamaño de fisura en el método de Paris se define a partir del borde exterior de la pieza

es decir $a_0 = 1$, mientras que en el cálculo mediante el modelo presentado en este artículo, a representa el tamaño real de la fisura (no incluye la dimensión de la entalla).

La ventaja del modelo que se presenta en este artículo, respecto de la formulación clásica de mecánica de fractura, está en que además de reproducir correctamente el fenómeno de propagación de fisuras y la rotura de piezas sometidas a cargas cíclicas, la formulación basada en la mecánica de medios continuos ofrece otras ventajas ya comentadas a lo largo del presente trabajo, como la combinación con otros fenómenos mecánicos: plasticidad, daño, grandes deformaciones, inestabilidad, acoplamiento termo-mecánico, fenómenos viscosos, etc.

CONCLUSIONES

El presente trabajo trata sobre un modelo constitutivo, basado en la mecánica de medios continuos, que permite modelizar el comportamiento a fatiga isotérmica para cargas periódicas. Las ventajas que comporta la utilización de esta formulación son evidentes, pues permite considerar el sólido como un continuo, donde pueden tratarse una gran cantidad de fenómenos adicionales que con las teorías clásicas de fatiga sería imposible. Como ejemplo de esto, se puede decir que la combinación de fatiga con daño, plasticidad fenómenos viscosos y temperatura dan a esta estructura de trabajo un atractivo importante. Otro aspecto relevante es que utiliza como base de soporte a teorías mecánicas con una base termodinámica bien establecidas, y por lo tanto se garantiza el cumplimiento de los principios básicos de la mecánica. En este trabajo se pueden observar también algunos resultados que muestran las capacidades de esta teoría.

REFERENCIAS

- 1 A. Green y P. Naghdi, "A general theory of an elastic-plastic continuum", *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. **18**, pp. 19–281, (1964).
- 2 A. Green y P. Naghdi, "A dynamical theory of interacting continua", *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. **3**, p. 231, (1965).
- 3 J. Lubliner, "On thermodynamics foundations of non-linear solid mechanics", *Int. Journal Non-Linear Mechanics*, 7, pp. 237–254, (1972).
- 4 J. Lubliner, "*Plasticity theory*", Macmillan Publishing, USA, (1990).
- 5 J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller y E. Oñate, "A plastic-damage model for concrete", *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. **25**, 3, pp. 299–326, (1989).
- 6 B. Luccioni, S. Oller y R. Danesi, "Coupled plastic-damage model", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **129**, pp. 81–90, 1 y 2, (1996).
- 7 L. Malvern, "*Introduction to the mechanics of continuous medium*", Prentice Hall, USA, (1969).
- 8 I. Neamtu, S. Oller y E. Oñate, "A generalized mixing theory elasto-damage-plastic model for finite element analysis of composite", *Computational plasticity fundamentals and applications*, Part 2, pp. 1214–1219, D. Owen, E. Oñate, E. Hinton (Eds.), (1997).
- 9 S. Oller, "Modelización numérica de materiales friccionales", Monografía CIMNE, 3, Barcelona, (1991).
- 10 S. Oller, E. Oñate, J. Miquel Canet y S. Botello, "A plastic damage constitutive model for composite materials", *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. **33**, 17, pp. 2501–2518, (1996).

- 11 C. Trusdell y R. Toupin, "*The classical field theories*", S. Flugge (Ed.), Handbuch der Physik III/I, Springer Verlag, Berlin, (1960).
- 12 "Standard definitions of terms relating to fatigue testing and statical analysis of fatigue data", ASTM Designation, E206-72, (1960).
- 13 A. Wöhler, "Test to determine the forces acting on railway carriage axles and capacity of resistance of the axle", *Engineering*, Vol. 11, pp. 199, (1871).
- 14 J. Chaboche, "Continuum damage mechanics and its application to structural lifetime prediction", *Rech. Aerosp.*, 4, pp. 37-53, (1987).
- 15 L. Bairstow, "The elastic limit of iron and steel under cyclical variation of stress", *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A210 p. 35, (1910).
- 16 S. Manson, "Behaviour of metals under condition of thermal stress", *Nat. Adv. Co. Aero.*, Report 1170, (1954).
- 17 L. Coffin, "The stability of metals under cyclic plastic strain", *Trans Amer. Soc. Mech. Engng.*, Vol. 82, pp. 671, (1960).
- 18 G. Irwin, *J. Appl. Mech. Trans.*, ASME, E79, pp. 361-364, (1957).
- 19 P. Paris, M. Gómez y W. Anderson, "Trend Engng.", Univ. Wash, 13, 9, (1961).
- 20 P. Paris y F. Erdogan, "A critical analysis of crack propagation laws", ASME, *J. Basic Engng.*, Vol. 85, pp. 528-534, (1963).
- 21 J. Chaboche, "Une loi différentielle dédommagement de fatigue avec cumulation non linéaire", *Revue Française de Mécanique.*, pp. 50-51, (1974).
- 22 M. Miner, "Cumulative damage fatigue", *J. App. Mech.*, Vol. 12, A-159, (1945).
- 23 P. Forrest, "*Fatigue of metals*", Pergamon Press, London, (1962).
- 24 A. Suero, "Simulación numérica de del problema de fatiga mediante la mecánica de medios continuos", Tesina de especialidad, Escuela de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona, Universidad Politécnica de Cataluña, Junio, (1998)