

# Condición absorbente discreta no-local (DNL) en elementos finitos para modelos de propagación de ondas en el mar

Ruperto Bonet, Norberto Nigro, Mario Storti y Sergio Idelsohn

Grupo de Tecnología a Mecánica del INTEC  
 Güemes 3450, 3000 - Santa Fe, Argentina  
 Tel.: 54-342-455 91 75, Fax: 54-342-455 09 44  
 E-mail: rbonet@venus.arcrde.edu.ar

## Resumen

El método de elementos finitos de Galerkin es empleado para obtener soluciones aproximadas de problemas de radiación y dispersión de ondas modeladas por la ecuación de Berkhoff en dominios no acotados. En este trabajo se ha desarrollado un novedoso método para incorporar la condición de radiación exacta en el infinito en el esquema numérico. La determinación del espectro del operador discreto de Helmholtz sobre un dominio estructurado próximo a la frontera del dominio computacional ha posibilitado la obtención de una condición de frontera perfectamente absorbente no-local en el medio discreto. Las pruebas numéricas validan estas conclusiones.

## NON-LOCAL ABSORBENT BOUNDARY CONDITION IN THE DISCRETE MEDIUM

## Summary

The Galerkin finite element method is used to approximate the solutions of Berkhoff's equation for water wave radiation and scattering in an unbounded domain. To incorporate the exact far field radiation condition in the numerical scheme a novel method has been developed. The determination of Helmholtz discrete operator spectrum over an structured domain close to the boundary of computational domain allows the design of a non-local perfectly absorbent boundary condition in the discrete medium. Numerical tests validate these conclusions.

## INTRODUCCIÓN

En la ingeniería oceánica la transformación de ondas en el mar debido a la influencia del fondo tiene un lugar relevante para el diseño y planificación de construcciones costeras, tales como, rompeolas, puertos, playas artificiales, etc. Las ondas superficiales aparecen en muchas formas, desde pequeñas ondulaciones hasta grandes marejadas, algunas con pequeña amplitud, o la suficiente para romper. Un amplio rango de interacciones pueden aparecer debido a la forma del fondo, la presencia de islas interiores o corrientes marinas, lo cual convierte la descripción del movimiento de las olas en un fenómeno complejo. Esta característica ha originado el desarrollo de diversas teorías ondulatorias que posibilitan explicar en tiempo real la evolución de dichos fenómenos costeros.

Los modelos de propagación de ondas en el mar basados en la ecuación de "mild-slope"<sup>1,2,16</sup>

$$\nabla_h(CC_g \nabla \phi) + k^2 CC_g \phi = 0 \quad (1)$$

han encontrado una amplia aplicación en la ingeniería costera y otros estudios. Los resultados de dichos modelos están a veces influenciados por el tratamiento aproximado de las condiciones de fronteras artificiales. Esta condición de frontera contiene las ondas dispersadas originadas debido a los efectos de la batimetría y/o la presencia de otras fronteras (posiblemente reflejantes).

Uno de los problemas en la simulación numérica de estos fenómenos es, sin dudas, la reducción del dominio computacional. En general, el dominio del fluido se extiende al infinito en las direcciones horizontales. En este caso una condición de radiación en el infinito es requerida para que el problema matemáticamente sea bien planteado. Esta condición establece que la solución corresponde a ondas salientes solamente y es conocida como la condición de radiación de Sommerfeld<sup>10</sup>.

Algunos modelos de elementos finitos propuestos por Mei<sup>14</sup> y desarrollados por Tsay & Liu<sup>17</sup>, Kostense<sup>13</sup>, Chen & Houston<sup>3</sup> y Xu & Panchang<sup>18</sup> aproximan la batimetría y representan la región exterior al dominio computacional por una profundidad constante. De esta manera es posible describir en forma exacta las propiedades de las ondas dispersadas fuera del dominio computacional. Las ondas dispersadas tienen que satisfacer la condición de radiación en el infinito y ellas pueden ser descritas por una serie de Fourier-Bessel, o utilizando elementos infinitos (H.S. Chen<sup>4</sup>).

Por razones computacionales, sin embargo, es necesario reducir el dominio computacional a un mínimo, y por tanto el dominio del fluido será truncado a alguna distancia del área de interés por fronteras artificiales. Para obtener un problema bien planteado, son necesarias condiciones sobre dichas fronteras, que simulen el comportamiento de la parte exterior del dominio del fluido. Para problemas con superficie libre, tales como, la propagación de ondas gravitatorias en el mar, se requiere, que las ondas superficiales al aproximarse a una frontera artificial sean totalmente transmitidas (“absorbidas”) en la frontera, o sea, que la frontera sea totalmente transparente, y por lo tanto, no origine reflexión de ondas.

Usualmente la frontera artificial es colocada suficientemente lejos del área de interés en el modelo, de manera que la imprecisión de tales condiciones no afecte los resultados en esta área, sin embargo, ello redundará en un notable aumento del costo computacional.

Muchas investigaciones en el pasado, y en el presente reciente, han desarrollado aproximaciones parabólicas de diferentes órdenes como condiciones de fronteras locales, para el cálculo de las ondas dispersadas del dominio del fluido<sup>6,11,19</sup>. Tales aproximaciones son fácilmente implementadas en códigos de diferencias finitas o elementos finitos, pero debido a que ellas caracterizan a ondas salientes que viajan con una dirección predominante, sólo las componentes de las ondas que viajan en esa dirección son absorbidas totalmente, hecho que hizo notar Kirby<sup>12</sup>. Con el aumento del orden de la derivada respecto a la componente lateral, tales aproximaciones pueden acomodar ondas salientes con una gran apertura, la cual todavía es limitada y puede ser problemática en dominios de forma compleja.

Una nuevo avance en este camino fue logrado por Givoli y Keller<sup>9</sup>, por medio del método DtN para la solución de problemas de acústica mediante el operador de Helmholtz. Este procedimiento formula un problema de frontera en una región acotada por la imposición de una relación funcional entre la función y su derivada normal sobre la frontera artificial. Su formulación discreta es expresada en términos de una serie infinita, la cual, en forma matricial vincula todos los nodos sobre la frontera artificial. Esta condición es una condición de frontera exacta, no-local y no reflejante que es impuesta sobre el exterior del dominio computacional.

En años recientes Y. Chen, y F. Liu<sup>5</sup> usaron la aproximación pseudo-espectral de Fourier para reducir la ecuación de “mild-slope” en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias para el potencial modificado,  $\phi\sqrt{CC_g}$ , en los puntos de colocación a lo largo de la dirección longitudinal a la costa. Esta aproximación permite describir el campo ondulatorio mediante una serie de modos desacoplados, incluyendo los modos de propagación “hacia adelante” y “hacia atrás”, o sea, la solución aproximada mediante series de Bremmer contiene

el espectro angular discreto completo. De esta manera caracterizan no sólo la refracción y difracción del oleaje, sino también la reflexión.

En este trabajo desarrollamos una condición de frontera discreta no-local (DNL) para modelos elípticos de ondas en el mar mediante el método de Galerkin. Este procedimiento es un método alternativo para el tratamiento de las fronteras artificiales de modelos elípticos de propagación de ondas en el mar, mediante el cual, reflexiones arbitrarias del dominio del fluido pueden ser absorbidas. Esta aproximación desarrollada en un medio discreto es original y fue propuesta inicialmente en el contexto de un dominio de diferencias finitas estudiado por Bonet<sup>2</sup>. Esta condición se basa en el uso del espectro discreto del operador de Helmholtz, y el desarrollo de un procedimiento original para desacoplar la matriz acoplada del "stencil" en todos los modos de propagación "hacia adelante" y "hacia atrás". La condición DNL, al igual que la versión discreta de la formulación DtN, acopla todos los grados de libertad sobre la frontera artificial, por lo que la representación matricial derivada es una submatriz llena en la matriz global, correspondiente a los nodos del contorno absorbente. La aplicación de esta condición a modelos elípticos de propagación de ondas en el mar sobre un fondo horizontal (en diferencias finitas) mostró que la condición de frontera DNL es una condición de frontera no-reflejante en el medio discreto<sup>2</sup>.

La formulación DNL, a diferencia de los procedimientos antes mencionados, permite desarrollar un tratamiento sistemático para una amplia variedad de operadores y espacios de funciones de interpolación, en el marco de la evolución del método de los elementos finitos.

El orden de presentación de este trabajo es como sigue. En la próxima sección, se desarrolla la formulación DNL mediante el método de Galerkin, la siguiente sección caracteriza a la matriz DNL que vincula los valores nodales de la capa correspondiente a la frontera artificial y la capa sucesiva. La verificación de este procedimiento y las comparaciones con los métodos convencionales son descritas mediante dos ejemplos que caracterizan la refracción y/o difracción del oleaje.

## EL PROBLEMA DE NEUMANN CON UNA FRONTERA DNL

Consideramos el problema de Neumann con una frontera DNL asociado a la ecuación de Berkhoff (1)

$$\begin{aligned} \nabla_h(CC_g \nabla \phi) + k^2 CC_g \phi &= 0 \quad \text{en } R \\ \phi &= \bar{\phi} \quad \text{para } y \in [0, l2] \text{ y } x = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= 0 \quad \text{para } x \in [0, l1] \text{ y } y = 0 \text{ ó } y = l2 \\ + \text{ c. de frontera tipo DNL} & \quad \text{para } y \in [0, l2] \text{ y } x = l1 \end{aligned} \quad (2)$$

sobre el rectángulo  $R = [0, l1] \times [0, l2]$  con condiciones de frontera tipo Neumann sobre las fronteras verticales. En este problema consideramos que el número de onda  $k(x, y)$  variable tiende a una constante  $k(x, y) = k$  en una región  $\Omega \subset R$  próxima a la frontera artificial.

Obtengamos la solución discreta de la ecuación de Helmholtz con un número de onda  $k(x, y) = k$  constante en la región rectangular  $\Omega$  (ver Figura 1) sujeta a las condiciones de fronteras descritas mediante el problema (2).

En lo que sigue nosotros consideramos una discretización general del dominio computacional  $R$ , con la particularidad de que la región  $\Omega$  sea discretizada mediante una malla "estructurada" (ver Figura 2). En esta red denotamos por la capa  $j$  a la capa correspondiente a la frontera artificial del dominio computacional, y por  $\phi^j$  los valores nodales de la solución por elementos finitos correspondientes a los nodos de dicha capa.

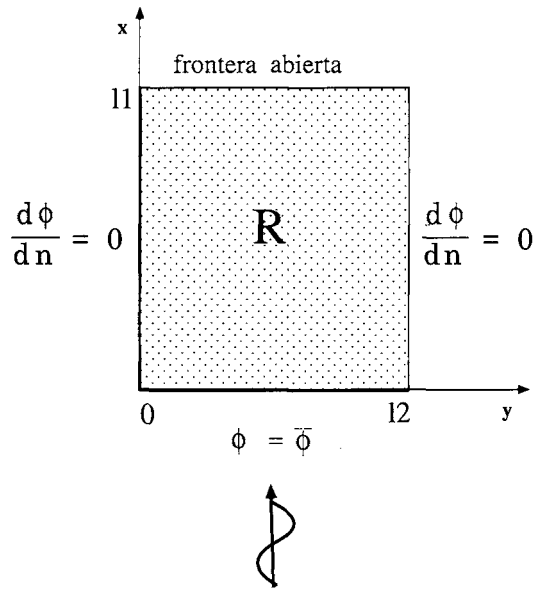


Figura 1. Un modelo de dominio en coordenadas rectangulares

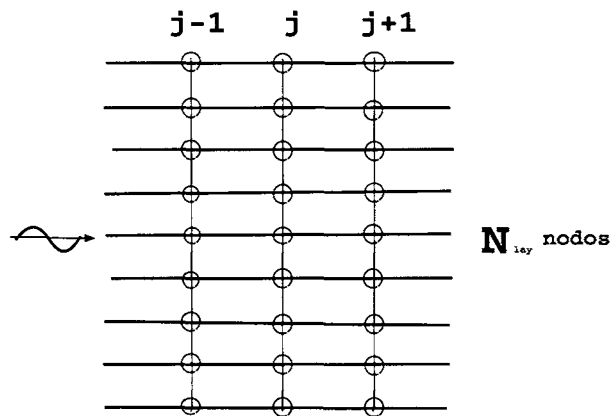


Figura 2. Discretización sobre una malla estructurada

Como el dominio  $\Omega$  es prismático, es conveniente utilizar la discretización parcial de la ecuación de Helmholtz, de tal manera que permita expresar mediante una ecuación en diferencias la dependencia entre los valores nodales de la solución numérica correspondientes a las capas  $j-1$ ,  $j$  y  $j+1$ . La discretización de la ecuación de Helmholtz con elementos lineales en la dirección transversal, origina un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en la dirección  $x$  de la forma

$$I\ddot{\phi} - M^{-1}K\phi + k^2I\phi = \bar{0} \quad (3)$$

donde las matrices  $M$ ,  $K$  representan las matrices de masa, y de rigidez globales de la discretización unidimensional en la dirección transversal, la matriz  $I$  es la matriz identidad, y  $h_y$  representa la longitud del elemento en la discretización realizada. Todas las matrices referidas son matrices cuadradas de orden  $N_{ley}$ , siendo este el número de nodos colocados sobre el dominio  $\Omega$  en la dirección transversal (ver Figura 1).

Dado que hemos tomado una malla estructurada, la discretización de la ecuación (3) puede ser realizada en diferencias finitas o en elementos finitos. Por el momento haremos referencia a ambas y la conveniencia de su empleo será discutida posteriormente. De esta manera, tenemos

$$(-I\phi^{j-1} + 2I\phi^j - I\phi^{j+1}) - ((kh_x)^2 I - h_x^2 M^{-1} K)L(\phi^j) = \bar{0} \quad (4)$$

donde  $L(\phi^j) = \phi^j$  si empleamos diferencias finitas, o  $L(\phi^j) = \frac{(\phi^{j-1} + 4\phi^j + \phi^{j+1})}{6}$  si empleamos elementos finitos lineales.

Tal discretización parcial se puede emplear evidentemente de diferentes maneras, pero independientemente de esto, el "stencil" correspondiente a los nodos de una capa  $j$  es de la forma

$$A\phi^{j-1} + B\phi^j + A\phi^{j+1} = 0 \quad (5)$$

donde a diferencia de la discretización completa por el método de diferencias finitas<sup>2</sup>, la matriz  $B$  es una matriz llena, y la matriz  $A$  es una matriz diagonal o una matriz llena en dependencia de la discretización empleada. La matriz de los coeficientes correspondiente a la capa  $j-1$  es igual a la de la capa  $j+1$  debido a la simetría del operador. Premultiplicando por  $A^{-1}$  toda la ecuación y haciendo la descomposición espectral de  $(A^{-1}B)$  tenemos

$$A^{-1}B = \Lambda V^{-1} \quad (6)$$

donde  $\Lambda$  es una matriz diagonal formada por los autovalores de  $A^{-1}B$  y  $V$  el sistema de autovectores de  $A^{-1}B$ . La ecuación (6) puede ser escrita en la forma

$$V^{-1}\phi^{j-1} + \Lambda V^{-1}\phi^j + V^{-1}\phi^{j+1} = 0 \quad (7)$$

Si definimos  $U = V^{-1}\phi^j$  escribimos entonces (7) en la forma

$$U^{j-1} + \Lambda U^j + U^{j+1} = 0 \quad (8)$$

o mediante,  $N_{iay}$  ecuaciones escalares en diferencias desacopladas

$$u_i^{j-1} + \lambda_i u_i^j + u_i^{j+1} = 0 \quad (9)$$

donde

$$U^j = \begin{pmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ \vdots \\ u_{N_{iay}}^j \end{pmatrix} \quad (10)$$

En un campo infinitamente alejado, consideramos que  $U^j = \mu^j U^0$  obteniendo una ecuación característica cuadrática

$$\mu_i^2 + \lambda_i \mu_i + 1 = 0 \quad (11)$$

cuya solución  $\mu_i$  se expresa mediante una combinación lineal de  $\mu_i^+$  y  $\mu_i^-$ , entonces, las soluciones  $u_i^j$  de la ecuación (9) se expresan mediante una suma de ondas que se propagan "hacia adelante"  $(u_i^j)^+$  y "hacia atrás"  $(u_i^j)^-$ .

$$u_i^j = c_i^+ \mu_i^{+j} + c_i^- \mu_i^{-j} = (u_i^j)^+ + (u_i^j)^- \quad (12)$$

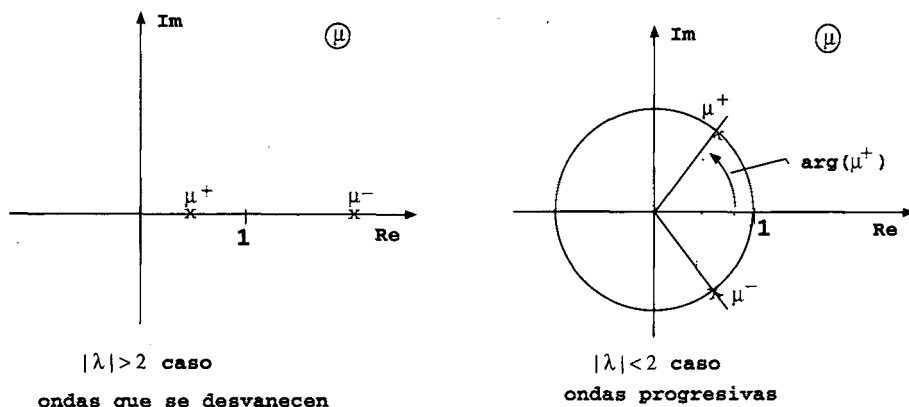


Figura 3. Localización de los autovalores  $\mu^\pm$  en el plano complejo

Para que la condición de frontera sea no-reflejante es necesario eliminar la influencia de las ondas que se propagan “hacia atrás” y están caracterizadas por las soluciones de la ecuación característica (11). Un análisis cualitativo del comportamiento de las raíces  $\mu_i^\pm$  en el plano complejo posibilitará la caracterización que buscamos.

Notemos que las raíces  $\mu_i^\pm$  de la ecuación característica satisfacen (prescindiendo del subíndice  $i$  por el momento)  $\mu^+ \mu^- = 1$  debido a que los coeficientes de  $\mu^2$  y  $\mu^0$  son iguales a uno.

Para nuestro estudio distinguimos los casos de raíces reales (desiguales o no) y de raíces complejas y conjugadas. Como se aprecia en la Figura 3, en dependencia del signo de  $|\lambda| - 2$  caracterizamos ondas que se desvanecen u ondas progresivas:

- Si  $|\lambda| > 2$  entonces  $\mu^\pm$  son reales y del mismo signo.
- Si  $|\lambda| < 2$  entonces  $\mu^\pm$  son complejos conjugados y de módulo unitario.

En el caso de que las ondas se desvanecen, o sea, si  $|\lambda| > 2$  se evidencia que las ondas que se propagan “hacia adelante” se caracterizan por  $|\mu^+| < 1$ . De igual manera las ondas que se propagan “hacia atrás” se caracterizan por  $|\mu^-| > 1$ .

Resulta de interés el caso de ondas progresivas ( $|\lambda| < 2$ ), por el hecho de que  $\mu^\pm$  son complejos conjugados y de módulo uno, o sea, que las raíces de la ecuación característica están ubicadas sobre la circunferencia unidad, centrada en el origen de coordenadas (ver Figura 3). En este caso elegimos  $\mu^+$  tal que  $\text{im}(\mu^+) > 0$  y demostremos que este criterio coincide con elegir que las componentes  $\mu^+(\mu^-)$  correspondan a ondas que se propagan con velocidad de grupo hacia la derecha (izquierda).

A tal efecto modificamos el problema (2) añadiendo un pequeño término disipativo  $\delta^2 = \frac{\delta\omega}{C^2 h}$  en la ecuación de Helmholtz, siendo  $C$  la velocidad de fase del medio,  $h$  la distancia nodal en una malla uniforme, y  $\omega$  la frecuencia angular del movimiento armónico. Aquí consideraremos que el incremento  $\delta\omega$  es mayor o igual que cero. De manera análoga se tiene para el problema perturbado la ecuación del haz perturbado para cada componente en la forma

$$\mu_i^2 + (\lambda_i + i(\delta h)^2)\mu_i + 1 = 0 \quad (13)$$

Basándose en la pequeñez de la perturbación, las soluciones  $\mu_p$  de la ecuación (13) se pueden expresar por

$$\mu_p \approx \mu \mp \frac{i(\delta h)^2}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \mu \quad (14)$$

Debido a que  $|\lambda| < 2$ , se tiene que

$$\frac{\delta\mu^\pm}{\mu} = \mp \frac{(\delta h)^2}{\sqrt{4 - \lambda^2}} \quad (15)$$

Como las soluciones  $\mu_p^\pm$  se encuentran sobre la circunferencia unidad, se pueden expresar de la forma  $\exp(\pm ik_x h)$ , por lo cual

$$\left| \frac{\delta\mu^\pm}{\mu} \right| = h\delta k_x \quad (16)$$

De (15),(16) y la expresión dada para  $\delta^2$  se deduce fácilmente la igualdad siguiente

$$\frac{|\delta\omega|}{\delta k_x} = C_g = C\sqrt{4 - \lambda^2} \quad (17)$$

siendo  $C$  y  $C_g$  las velocidades de fase y grupo, respectivamente. Finalmente, se tienen las igualdades siguientes

$$\frac{\delta\mu^\pm}{\mu^\pm} = \mp \frac{|\delta\omega| h}{C_g} \quad (18)$$

$$\mu_p^\pm = \left(1 \mp \frac{|\delta\omega| h}{C_g}\right) \mu^\pm \quad (19)$$

las cuales muestran que  $\mu_p^\pm$  se mueve sobre el rayo definido por  $\mu^\pm$ , en el caso de  $\mu^+$  hacia el interior del círculo y en el caso de  $\mu^-$  hacia el exterior del mismo, lo cual significa físicamente que las ondas que viajan con componente  $\mu^-$  divergen hacia  $\infty$ , y por lo tanto, son eliminadas. Efectivamente, mediante el principio de absorción límite haciendo  $\delta\omega$  tender hacia cero, se tiene la elección  $\mu = \mu^+$ .

Para cualquier  $i$ , tenemos que

$$(u^+)_i^j = c_i^+ \mu_i^{+j} \quad (20)$$

Recomponiendo el vector  $U^+$  en la base canónica  $(e_i)_{i=1, \dots, N_{\text{lay}}}$ , se tiene

$$\begin{aligned} (U^+)^{j+1} &= \sum_{i=1}^{N_{\text{lay}}} (u_i^{j+1})^+ e_i \\ &= \sum_{i=1}^{N_{\text{lay}}} (u_i^j)^+ \mu_i e_i \\ &= G(U^+)^j \end{aligned} \quad (21)$$

siendo la matriz  $G = \text{diag}(\mu_1(\lambda), \dots, \mu_{N_{\text{lay}}}(\lambda))$  y volviendo a la base  $V$ , se tiene que

$$\begin{aligned} (\phi^+)^{j+1} &= V(U^+)^{j+1} \\ &= VG(U^+)^j \\ &= (VGV^-)(V(U^+)^j) \\ &= F(\phi^+)^j \end{aligned} \quad (22)$$

Finalmente, la matriz  $F$  que relaciona los vectores nodales  $(\phi^+)^{j+1}$  y  $(\phi^+)^j$  se expresa por

$$F = VGV^{-1} \quad (23)$$

Análogamente se cumple

$$(\phi^-)^{j+1} = F^{-1}(\phi^-)^j \quad (24)$$

Puede verse fácilmente a partir de (23) que  $F$  satisface la siguiente ecuación matricial

$$AF^2 + BF + A = 0 \quad (25)$$

Debemos hacer notar que la matriz  $F$  ha sido obtenida aquí mediante el empleo de elementos lineales. Evidentemente este proceso puede ser repetido de igual manera utilizando elementos de orden superior, aspecto que será abordado en próximos trabajos.

## MATRIZ DNL

El procedimiento DNL basado en el comportamiento del haz cuadrático operacional  $A\mu^2 + B\mu + A$  donde  $A$  y  $B$  representan los operadores matriciales originados por la discretización parcial del operador de Helmholtz (con  $k(x, y) = k$  constante) provee una matriz que relaciona los vectores nodales de las capas  $j$  y  $(j + 1)$ , en la dirección normal a la frontera del dominio de cálculo. Dicha matriz posee las características siguientes:

- Es una matriz llena.
- Es una matriz cíclica.
- La suma de los elementos por filas es constante.
- El espectro discreto está ubicado en el semiplano superior, sobre el círculo unidad, en su interior y sobre el eje real para ondas que se desvanecen, y sobre la circunferencia para los modos progresivos.

Dado que la matriz  $DNL$  es esencialmente obtenida mediante un procedimiento numérico, la influencia de la discretización resulta de mayor interés en su construcción, y mostremos, como en la medida en que refinamos la malla, la condición  $DNL$  se aproxima a la condición perfectamente absorbente del medio continuo. Para describir su comportamiento cualitativo calculamos los errores absolutos de amplitud  $|\rho|$  y de fase  $|\sigma|$  del vector nodal  $\phi^{j+1}$  respecto al vector  $F\phi^j$ , en dependencia de la distancia nodal  $h$  de la malla y de los modos transversales  $k_y$  generados por una onda monocromática incidente en el contorno. Para ello ponemos la expresión exacta  $\phi_l^j = \exp i(k_y h_y l + \sqrt{k^2 - k_y^2} h_x j)$ , y mediante las expresiones  $|\rho| = ||\phi^{j+1} - F\phi^j||$  y  $|\sigma| = | \text{fase}(\phi^{j+1}) - \text{fase}(F\phi^j) |$  realizamos los cálculos correspondientes. Se verificó que los errores de amplitud para los modos progresivos es cero, por lo cual profundizaremos en la influencia de la discretización en el error de fase.

En la Figura 4 mostramos el cálculo del error de fase sobre una malla uniforme, empleando 10, 20, 30 y 40 elementos por longitud de onda, respectivamente. Como se puede apreciar la sucesión de errores de fase es convergente, hacia cero, independientemente, del proceso de discretización empleado. Aún más, el proceso de construcción de la DNL por el método de diferencias finitas o el de los elementos finitos lineales originan errores de fases del mismo orden y, en la medida que refinamos la malla, estos errores de fase se aproximan uno respecto al otro. Sin embargo, cuando empleamos el procedimiento de discretización parcial con elementos finitos en la dirección transversal y diferencias finitas en la dirección longitudinal (MEF/DIF) para un intervalo de frecuencias dado se logra disminuir el error de fase respecto a las discretizaciones por diferencias finitas (DIF) o elementos finitos (MEF).



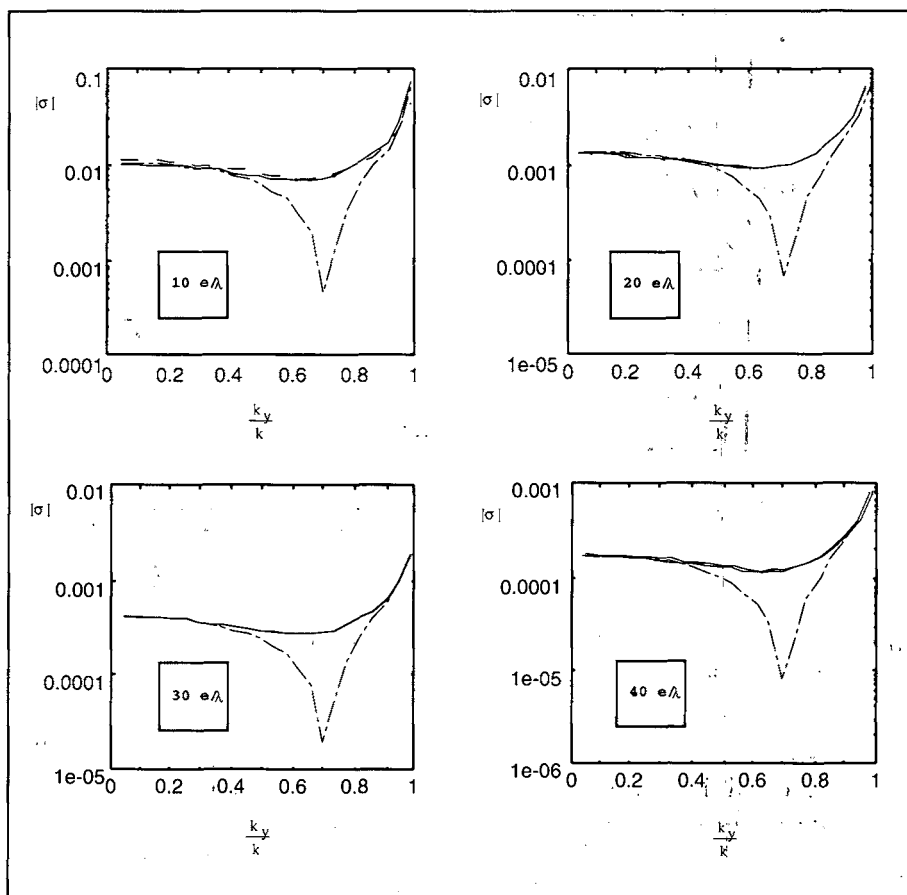


Figura 4. Error de fase empleando la matriz DNL con diferentes procedimientos de discretización (- - DIF, --- MEF/DIF, - MEF) sobre mallas uniformes

## EJEMPLOS NUMÉRICOS

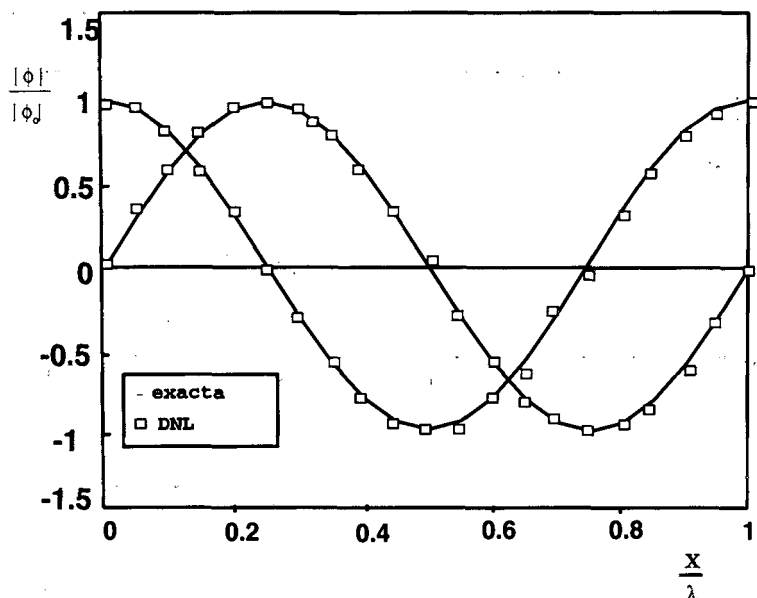
Los ejemplos numéricos propuestos van dirigidos a la validación de la condición discreta absorbente no-local (DNL) en la resolución numérica de problemas de propagación de ondas en el mar usando el método de Galerkin, donde son comparadas las soluciones dadas por el modelo con soluciones analíticas conocidas, o con soluciones de esquemas numéricos que emplean condiciones de borde locales de primer orden, las cuales nos permiten verificar el ajuste de la solución con la condición de contorno empleada a la realidad física del problema.

### Propagación de ondas sobre fondo horizontal

La propagación del oleaje sobre un fondo horizontal, se comporta como un tren de ondas progresivas que avanza conservando la dirección de propagación. Para este tipo de ondas la expresión analítica de la elevación de la superficie libre  $\zeta$  tiene la forma<sup>8</sup>

$$\zeta(x, y) = \frac{H}{2} e^{i[\delta_0 + k_0 r \cos(\theta - \theta_0)]} \quad (26)$$

donde  $k_0$  es el número de onda en aguas profundas,  $H$  la altura de la ola,  $\theta_0$  el ángulo que forma la dirección de propagación con el eje  $x$ , y  $\delta_0$  la fase inicial con la que el oleaje entra en el dominio.



**Figura 5.** Amplitudes de las ondas progresivas sobre un fondo plano. Comparación entre la solución analítica y la solución numérica

En tal caso consideramos un tren de ondas monocromáticas de periodo 0,8007 s que incide normalmente en un dominio rectangular de 1,0 longitud de onda en la dirección  $x$ , por 1/20 longitudes de onda en la dirección  $y$ . Se seleccionó una resolución de 20 elementos por longitud de onda y con el objetivo de evaluar la funcionabilidad de la condición absorbente (DNL) al fondo del dominio de cálculo, se impuso una condición entrante tipo Robin, y condiciones de contorno laterales tipo Neumann. La solución mediante elementos finitos mostrada en la Figura 5 demuestra una correspondencia absoluta con la solución analítica para una profundidad  $h = 10$  m.

### Propagación de ondas sobre fondo inclinado

Cuando los contornos de la batimetría son paralelos a la dirección a lo largo de la costa y no existen obstáculos en el interior del dominio, los efectos de difracción se anulan. Aún más, si la reflexión es ignorada, los resultados de la teoría de rayos deben ser recuperados mediante la ecuación de "mild-slope". Para verificar este punto con el presente modelo, hemos seleccionado un perfil de playa usado por Grassa<sup>8</sup>. El perfil de la playa usado en los experimentos numéricos es dado como

$$h(x) = \max(10, \min(11 - 0,001 * x, 2)) \text{ m} \quad (27)$$

en el cual la coordenada  $x$  y la profundidad  $h$  tienen unidades en metros. El periodo de la onda incidente es de 10,726 s y la amplitud de la onda es  $\phi_0 = 1$  m. A una profundidad  $h = 10$  m la onda incidente tiene una longitud de onda de 100 m.

La batimetría ha sido discretizada entre (0,0)-(1200,800) con una resolución de 20 elementos por longitud de onda en la dirección del eje  $x$ .

La predicción del valor teórico de la altura de la ola y oblicuidad a cualquier profundidad de acuerdo a la teoría lineal de ondas se puede hacer mediante<sup>8</sup>

$$H^2 C_g \cos(\theta) = \text{cte} \quad (28)$$

$$k \sin(\theta) = \text{cte} \quad (29)$$

siendo  $H$  la altura de la ola y  $C_g$  la velocidad de grupo. La comparación entre los resultados de la aplicación del método de Galerkin empleando la condición de frontera  $DNL$  y la teoría de rayos son mostrados en la Figura 6. Esta figura muestra el comportamiento de los coeficientes de shoaling ( $\theta_0 = 0$  grado) y de refracción para  $\theta_0 = 30, 60, 70, 80$  y  $89$  grados, respectivamente. Tales coeficientes fueron obtenidos mediante un procedimiento numérico que separa el campo incidente del campo reflejado.

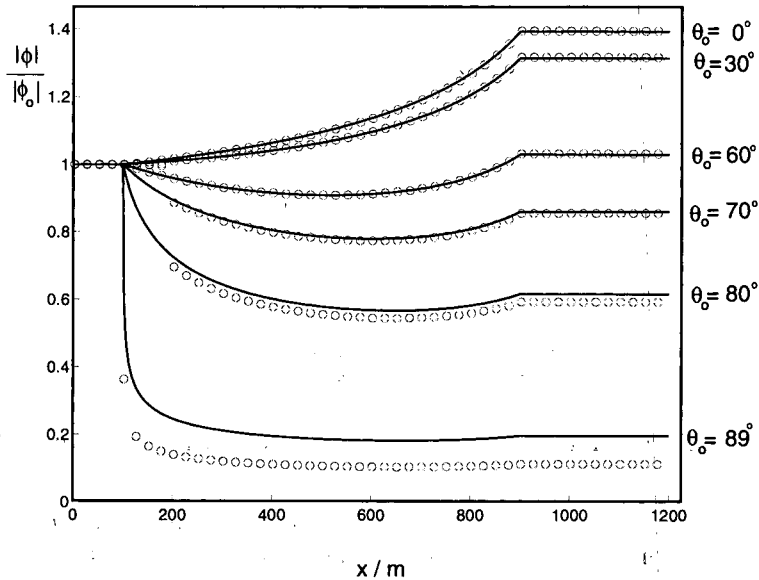


Figura 6. Variación de las amplitudes sobre un perfil de playa para diferentes ángulos de incidencia. Comparación entre la solución numérica (-) y la teoría de rayos (o)

En tal sentido, es importante comprobar si la condición absorbente empleada origina alguna limitación en el esquema numérico sobre el ángulo de incidencia del oleaje, dado que no las hay desde el punto de vista analítico. Las simulaciones realizadas dieron resultados altamente satisfactorios y en el caso de ángulos de incidencia de  $89$  grados se observa una pérdida de precisión debido al método de Galerkin.

### Foco ondulatorio detrás de una elevación circular sumergida que descansa sobre un fondo plano

Con el propósito de demostrar la importancia de la condición de frontera  $DNL$ , nosotros investigamos el foco de un tren de ondas monocromáticas detrás de una elevación circular sumergida, que descansa sobre un fondo plano (Ensayo de Ito & Tanimoto)<sup>11</sup>, (ver Figura 7). Debido a la simetría axial de la elevación del fondo, los patrones del foco ondulatorio detrás de la elevación son independientes del ángulo de incidencia, si el modelo predice esto correctamente.

La geometría del experimento de Ito & Tanimoto es mostrada en la Figura 7. La profundidad del agua sobre el fondo plano es  $h_1 = 0,15$  m, y la profundidad del agua en la región de la elevación es descrita por

$$h = h_2 + 0,15625 \cdot [(x - 1,2)^2 + (y - 1,2)^2] \quad (30)$$

donde  $h_2 = 0,05$  m es la profundidad en la cresta de la elevación. Un tren de ondas monocromático con una altura de  $1,04$  cm, y un periodo de  $0,511$  s entra en el dominio con un ángulo de incidencia de  $\theta_0 = 0$  grado.

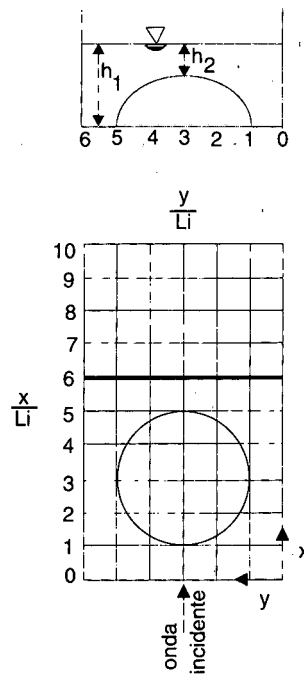


Figure 7. Geometría del dominio computacional para el experimento de Ito & Tanimoto<sup>11</sup>

En este experimento se estudiaba la transformación de un tren de ondas periódico al pasar sobre una elevación del fondo (“shoal”) y en el que se reproducía el efecto combinado de refracción y difracción. Según la teoría de rayos, se produce un cáustico tras sobrepasar el “shoal” (Figura 8), prediciendo por lo tanto alturas de olas indefinidas.

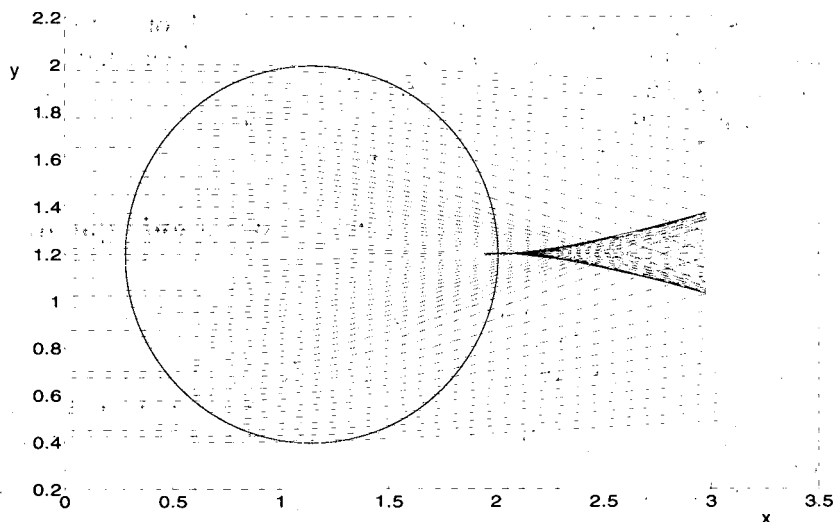
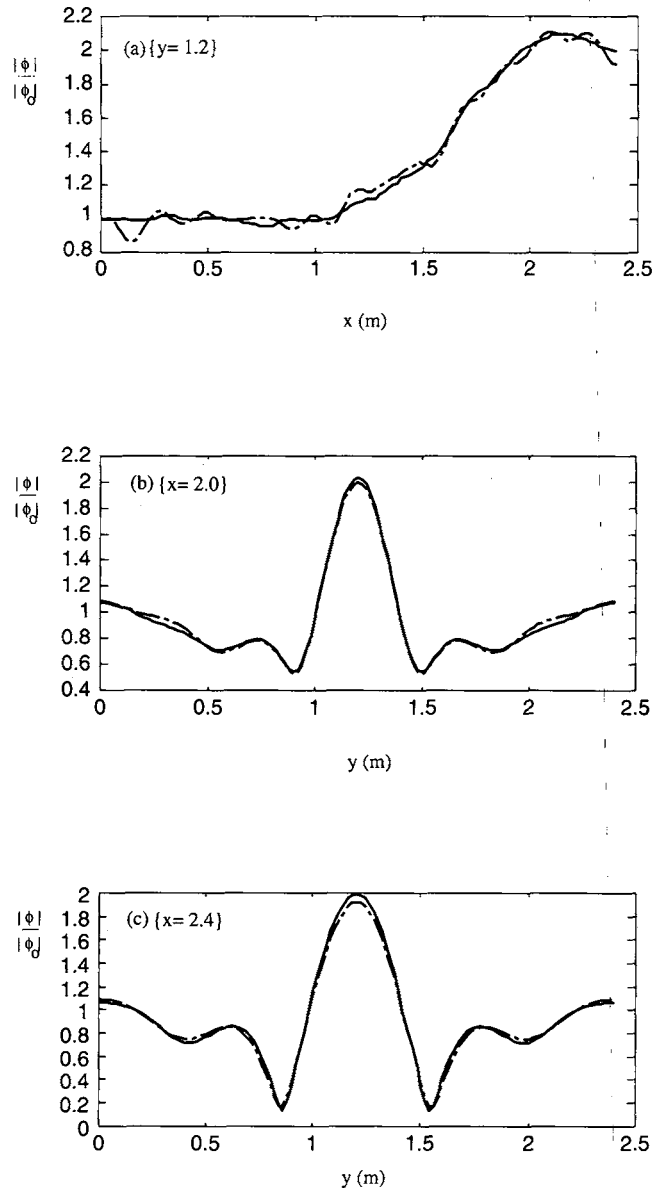


Figura 8. Teoría de rayos. Foco ondulatorio detrás de la elevación circular del fondo

A diferencia de los trabajos de Rivero<sup>15</sup>, Duck, Dalrymple & Kirby<sup>7</sup> el empleo de la condición de frontera DNL posibilita reducir el dominio computacional (Figura 7) hasta la línea marcada en negrita (correspondiente a la sección  $x/L_i = 6$ ), es decir, los resultados numéricos presentados aquí son obtenidos con la condición de frontera DNL colocada a una 1,0 longitud de onda del “shoal”. Experimentos numéricos realizados demuestran que

a una distancia menor la influencia de la componente  $\phi^-$  es muy importante y debe tenerse en cuenta, debido a la influencia de la difracción del oleaje en esa zona.



**Figure 9.** a) Sección 3, b) Sección 5, c) Sección 6. Comparación de los resultados del modelo usando las condiciones de frontera de primer orden y la DNL, en términos de las amplitudes de ondas normalizadas con respecto a la amplitud incidente (— DNL; --- condición de frontera local de primer orden)

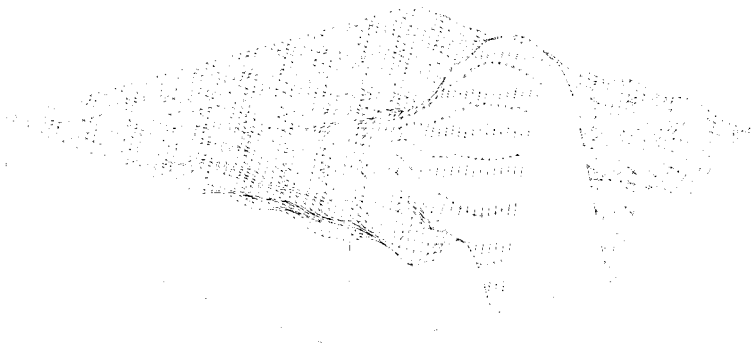
En la Figura 9 mostramos una comparación entre los resultados numéricos del método de Galerkin con una condición de frontera local de primer orden y con la condición de frontera DNL. Tal comparación se hace mediante los resultados de la amplitud normalizada a lo largo de secciones en el modelo. La Figura 9c representa amplitudes a lo largo del tanque, mientras que las Figuras 9a y 9b presentan resultados paralelos al generador. En la Figura 9 se reproducen los resultados, siendo la línea discontinua correspondiente a la solución numérica empleando la condición de frontera de primer orden y la línea continua

correspondiente a la solución empleando la condición de frontera *DNL*. El eje vertical muestra la relación del oleaje en un punto dado, respecto al oleaje incidente.

En la Figura 9a que corresponde al eje central longitudinal del tanque de ensayos, ambos modelos reproducen bien el aumento de amplitud en la formación del cóustico principal, aunque es significativo el efecto de las reflexiones en la frontera (al fondo del tanque) del dominio computacional respecto a la solución numérica correspondiente a la condición de primer orden.

Los perfiles de la Figuras 9b muestran el mayor grado de desarrollo del cóustico y ambos modelos predicen bien el máximo del cóustico.

Los perfiles de la Figura 9c sobreestiman ligeramente la amplitud del cóustico principal y de forma más importante los valores de mínima amplitud, próximo a los puntos anfidromos que aparecen en el ensayo.



**Figura 10.** Resultados numéricos de la distribución de las amplitudes normalizadas de las ondas. Perspectiva 3-D. Experimento de Ito & Tanimoto<sup>11</sup>

Los resultados numéricos presentados aquí empleando la condición de frontera *DNL* muestran una buena correspondencia con los resultados experimentales de Ito & Tanimoto, para el caso  $H_i/L_i = 0,0026$ , siendo  $H_i$  y  $L_i$  la altura y longitud de la onda incidente, los cuales, pueden ser encontrados en la literatura referenciada<sup>7,11</sup>, etc. La Figura 10 muestra la distribución espacial de las amplitudes normalizadas de las olas.

## CONCLUSIONES

El método *DNL* ha sido propuesto para incorporar la condición de radiación en el infinito de forma exacta. Mediante la condición *DNL* se obtiene una condición de frontera perfectamente absorbente hasta los  $N_{lay}$  modos transversales definidos por el número de nodos sobre la frontera absorbente (Figura 1), la cual origina una matriz cíclica y llena que acopla todos los nodos de dicho contorno. El procedimiento *DNL* es verificado mediante casos pruebas con soluciones analíticas, y aproximadas, encontrándose una buena correspondencia entre las soluciones numéricas y las soluciones patrones, respectivamente. En este trabajo se muestra la convergencia de la condición *DNL* a la condición completamente absorbente del continuo, cuando hacemos tender hacia cero la distancia nodal, independientemente del método de discretización empleado.

Las ventajas del procedimiento *DNL* radican en que las operaciones se realizan en el medio discreto, a diferencia de las condiciones teóricas aproximadas de tipo locales y parabólicas, y de la condición no-local tipo *DtN* donde se requiere el conocimiento de un sistema base de funciones del operador a resolver.

El método *DNL* permite la reducción del dominio de cómputo y origina soluciones correctas y estables sobre el mismo, lo cual redundará en un significativo ahorro en la modelación

de los problemas en cuestión. Sin embargo, como en el caso de los modelos elípticos tradicionales y algunos modelos de ecuaciones parabólicas (Dalrymple y Martin<sup>6</sup>), este nuevo procedimiento está todavía limitado a profundidades constantes en la región exterior al dominio computacional. Esfuerzos por eliminar esta limitación serán descritos en futuros trabajos.

El proceso de cálculo de la DNL se basa en el uso de los procedimientos del paquete LAPACK para la determinación de los autovalores. El proceso computacional en la versión en coordenadas rectangulares desarrollado aquí, no incrementa ni el costo ni el tiempo de CPU.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido financiamiento del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, Argentina) mediante el proyecto BID 802/OC-AR PID Nr. 26 y de la Universidad Nacional del Litoral (Argentina).

## REFERENCIAS

- 1 J.C.W. Berkhoff, "Mathematical Models for simple Harmonic Linear Water Waves. Wave Diffraction and Refraction", Delft Hydraulic Laboratory, Public. 163, (1976).
- 2 R. Bonet, N. Nigro, M.A. Storti y S.R. Idelsohn, "Condición absorbente discreta no-local (DNL) en diferencias finitas para modelos elípticos de propagación de ondas en el mar" *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 14, N° 4, pp. 481-500, (1998).
- 3 H.S. Chen y J.R. Houston, "Calculation of water level oscillation in coastal harbors", Instructional Rep. CERC-87-2, Coastal Engng. Research Center, WES, Vicksburg, (1987).
- 4 H.S. Chen, "Infinite Elements for water wave radiation and scattering", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 11, pp. 555-569, (1990).
- 5 Y. Chen y P.L.-F. Liu, "A pseudospectral approach for scattering of water waves", *Proc. R. Soc. Lond.*, **A445**, pp. 619-636, (1994).
- 6 R.A. Dalrymple y P.A. Martin, "Perfect boundary conditions for parabolic water-wave models", *Proc. R. Soc. Lond.*, **A437**, pp. 41-54, (1992).
- 7 K.S. Duck, R.A. Dalrymple y J.T. Kirby, "An angular spectrum model for propagation of Stokes waves", *J. Fluid Mech.*, Vol. **221**, pp. 205-232, (1990).
- 8 J.M. Grassa, "Modelos parabólicos de propagación del oleaje", CEPYC, CEDEX, Madrid, España, (1991).
- 9 D. Givoli y J.B. Keller, "Non-reflecting boundary conditions for elastic waves", *Wave Motion*, **12**, pp. 261-279, (1990).
- 10 I. Harari y T.J.R. Hughes, "Galerkin/least-square finite element methods for the reduced wave equation with non-reflecting boundary conditions in unbounded domains", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **98**, pp. 411-454, North - Holland, (1992).
- 11 Y. Ito y K. Tanimoto, "A method of numerical analysis of wave propagation-application to wave diffraction and refraction", *Proceedings of the 13th International Conference on Coastal Engineering*, ASCE, New York, (1972).

- 12 J.T. Kirby, "A note on parabolic radiation boundary conditions for elliptic wave calculations", *Coastal Engng.*, **13**, pp. 211-218, (1989).
- 13 J.K. Kostense, K.L. Meijer, M.W. Dingemans, A.E. Mynett y P. Van den Bosch, "Wave energy dissipation in arbitrarily shaped harbours of variable depth", *In Proc. 20th Int. Conf. Coastal Engng.*, pp. 2002-2016, (1986).
- 14 C.C. Mei, "*The applied dynamics of ocean surface waves*" New York, Wiley, (1983).
- 15 F.J. Rivero, M. Rodríguez y A.S. Arcilla, "Propagación del oleaje sobre fondo variable y en presencia de corrientes", *II Jornadas Españolas de Ingeniería de Costas y Puertos*, 10-11 Mayo 1993, Gijón, (1993).
- 16 R. Smith and T. Sprinks, "Scattering of surface waves by a conical island", *J. Fluids Mech.*, Vol. **72**, pp. 373-384, (1975).
- 17 T.-K. Tsay, and P.L.-F. Liu, "A finite element model for wave refraction and diffraction", *Appl. Ocean Res.*, Vol. **5**, pp. 30-37, (1983).
- 18 B. Xu y V.G. Panchang, "Outgoing boundary conditions for finite-difference elliptic water-wave models", *Proc. R. Soc. Lond.*, **A 441**, pp. 575-588, Great Britain, (1993).
- 19 B. Xu., V. Panchang y Z. Demirebik, "Exterior Reflections in Elliptic Harbor Wave Model", *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, May 1996, pp. 118-125, (1996).